Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

O JEDNÉ ITERAČNÍ METODĚ ŘEŠENÍ SOUSTAV NELINEÁRNÍCH ROVNIC, II

MIROSLAV ŠISLER, Praha

(Došlo dne 7. listopadu 1960)

V této druhé části článku jsou zkoumány některé další vlastnosti iterační metody definované v prvé části. Metoda je aplikována při numerickém řešení dvou soustav nelineárních rovnic.*)

IV

Nyní odvodíme některé další postačitelné podmínky pro konvergenci iteračních metod definovaných vztahy (22), (22′) a (37), (37′) z [6].

Lemma 8. Z (22) *a* (22′) *plyne*

$$\begin{aligned} (39)\quad \text{a)}\ \boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu = {} & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu)(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\nu)\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu-1,n}) - \right. \\ & \left. - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\nu)\right)(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\nu)\left(\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}_\nu) - \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}_{\nu-1})\right) . \\ & . (\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\nu)\, \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu-1,n})(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}) , \end{aligned}$$

kde

$$\boldsymbol{p}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k}\boldsymbol{x}_\nu - (1 - \xi_{\nu-1,k})\,\boldsymbol{x}_{\nu-1} , \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1 , \quad k = 1, 2, \ldots, n ;$$

$$\begin{aligned} (40)\quad \text{b)}\ \boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu = {} & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu) \ldots \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{\mu+1})(\boldsymbol{x}_{\mu+1} - \boldsymbol{x}_\mu) - \\ & - \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu) \ldots \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{i+1})\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_i)\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{i-1,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{i-1,n}) - \right. \\ & \qquad \left. - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i)\right)(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}) - \\ & - \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu) \ldots \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{i+1})\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_i)\left(\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}_i) - \right. \\ & \qquad \left. - \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}_{i-1})\right)(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}) - \\ & - \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu) \ldots \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{i+1})\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_i)\, \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{i-1,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{i-1,n})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}) , \end{aligned}$$

kde

$$\boldsymbol{p}_{i-1,k} = \xi_{i-1,k}\boldsymbol{x}_i - (1 - \xi_{i-1,k})\,\boldsymbol{x}_{i-1} , \quad 0 < \xi_{i-1,k} < 1 , \quad k = 1, 2, \ldots, n , \quad \nu > \mu .$$

*) První část článku viz [6].

Důkaz. a) Podle věty o přírůstku funkce platí

$$z(x_\nu) = z(x_{\nu-1}) + F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1}) + \\ + Z(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

kde

$$p_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k} x_\nu - (1 - \xi_{\nu-1,k}) x_{\nu-1}, \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Z (22″) dostaneme tedy postupně

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} - x_\nu = &- B(x_\nu) z(x_\nu) = \\ = &- B(x_\nu)(z(x_{\nu-1}) + F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1}) + \\ &+ Z(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1})) = B(x_\nu) B^{-1}(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) - \\ &- B(x_\nu) F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1}) - \\ &- B(x_\nu) Z(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1}) = \\ &= B(x_\nu) B^{-1}(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) - B(x_\nu) F(x_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - \\ &- B(x_\nu)(F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n}) - F(x_\nu))(x_\nu - x_{\nu-1}) - \\ &- B(x_\nu) Z(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1}) = \\ &= A(x_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) - B(x_\nu)(F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n}) - F(x_\nu))(x_\nu - x_{\nu-1}) - \\ &- B(x_\nu)(B^{-1}(x_\nu) - B^{-1}(x_{\nu-1}))(x_\nu - x_{\nu-1}) - \\ &- B(x_\nu) Z(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - x_{\nu-1}), \end{aligned}$$

což je (39).

b) Platí

$$B(x_i) y(x_i) = B(x_i) F(x_i) x_i - B(x_i) z(x_i) = x_i - A(x_i) x_i - B(x_i) z(x_i). \tag{27}$$

Podle tvrzení a) tohoto lemmatu dostaneme

$$\begin{aligned} - B(x_i) z(x_i) = x_{i+1} - x_i = A(x_i)(x_i - x_{i-1}) - B(x_i)(F(p_{i-1,1}, \ldots, p_{i-1,n}) - \\ - F(x_i))(x_i - x_{i-1}) - B(x_i)(B^{-1}(x_i) - B^{-1}(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) - \\ - B(x_i) Z(p_{i-1,1}, \ldots, p_{i-1,n})(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

kde

$$p_{i-1,k} = \xi_{i-1,k} x_i - (1 - \xi_{i-1,k}) x_{i-1}, \quad 0 < \xi_{i-1,k} < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Z (22) plyne zřejmě pro $\nu > \mu$

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} &= A(x_\nu) \ldots A(x_{\mu+1}) x_{\mu+1} + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1}) B(x_i) y(x_i) = \\ &= A(x_\nu) \ldots A(x_{\mu+1}) x_{\mu+1} + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1})(x_i - A(x_i) x_i - B(x_i) z(x_i)) = \\ &= A(x_i) \ldots A(x_{\mu+1}) x_{\mu+1} + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1}) x_i - \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_i) x_i - \\ &- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1}) B(x_i) z(x_i) = \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1}) x_i - \\ &- \sum_{i=\mu+2}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_i) x_i - \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1}) B(x_i) z(x_i) = \\ &= \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1}) x_i - \sum_{i=\mu+1}^{\nu-1} A(x_\nu) \ldots A(x_{i+1}) x_{i+1} - \end{aligned}$$

$$- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, z(x_i) = x_\nu + \sum_{i=\mu+1}^{\nu-1} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\,(x_i - x_{i+1}) -$$
$$- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, z(x_i)\,.$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} - x_\nu &= \sum_{i=\mu+1}^{\nu-1} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\,(x_i - x_{i+1}) + \\ &+ \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\,[A(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) - \\ &- B(x_i)\,(F(p_{i-1,1}, \dots, p_{i-1,n}) - F(x_i))\,(x_i - x_{i-1}) - B(x_i)\,(B^{-1}(x_i) - \\ &- B^{-1}(x_{i-1}))\,(x_i - x_{i-1}) - B(x_i)\, Z(p_{i-1,1}, \dots, p_{i-1,n})\,(x_i - x_{i-1})] = \\ &= - \sum_{i=\mu+1}^{\nu-1} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) - \\ &- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, B(x_i)\,(F(p_{i-1,1}, \dots, p_{i-1,n}) - \\ &- F(x_i))\,(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, B(x_i)\,(B^{-1}(x_i) - \\ &- B^{-1}(x_{i-1}))\,(x_i - x_{i-1}) - \\ &- \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, Z(p_{i-1,1}, \dots, p_{i-1,n})\,(x_i - x_{i-1})\,. \end{aligned}$$

Odtud již vyplývá (40), neboť

$$- \sum_{i=\mu+1}^{\nu-1} A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A(x_\nu) \dots A(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= A(x_\nu) \dots A(x_{\mu+1})\,(x_{\mu+1} - x_\mu)\,.$$

Lemma 9. *Buď $U(y)$ unitární matice, $\|B(x_\nu)\| \leqq b$. Potom platí*

$$\begin{aligned} \text{(41)} \qquad \text{a)}\ \|x_{\nu+1} - x_\nu\| &\leqq n^3 \|U^{-1}(y)\, A(x_\nu)\, U(y)\|\, \|x_\nu - x_{\nu-1}\| + \\ &+ n^2 b \|F(p_{\nu-1,1}, \dots, p_{\nu-1,n}) - F(x_\nu)\|\, \|x_\nu - x_{\nu-1}\| + \\ &+ n^2 b \|B^{-1}(x_\nu) - B^{-1}(x_{\nu-1})\|\, \|x_\nu - x_{\nu-1}\| + \\ &+ n^2 b \|Z(p_{\nu-1,1}, \dots, p_{\nu-1,n})\|\, \|x_\nu - x_{\nu-1}\|\,, \end{aligned}$$

kde

$$p_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k} x_\nu - (1 - \xi_{\nu-1,k})\, x_{\nu-1}\,, \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1\,, \quad k = 1, 2, \dots, n\,;$$

$$\begin{aligned} \text{(42)} \qquad \text{b)}\ \|x_{\nu+1} - x_\nu\| &\leqq n^3 \|U^{-1}(y)\, A(x_\nu) \dots A(x_{\mu+1})\, U(y)\|\, \|x_{\mu+1} - x_\mu\| + \\ &+ n^5 b \sum_{=\mu+1}^{\nu} \|U^{-1}(y)\, A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, U(y)\|\, \|F(p_{i-1,1}, \dots, p_{i-1,n}) - F(x_i)\|\,. \\ &\qquad .\, \|x_i - x_{i-1}\| + \\ &+ n^5 b \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \|U^{-1}(y)\, A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, U(y)\|\, \|B^{-1}(x_i) - B^{-1}(x_{i-1})\|\, \|x_i - x_{i-1}\| + \\ &+ n^5 b \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \|U^{-1}(y)\, A(x_\nu) \dots A(x_{i+1})\, U(y)\|\, \|Z(p_{i-1,1}, \dots, p_{i-1,n})\|\, \|x_i - x_{i-1}\|\,, \end{aligned}$$

kde

$$p_{i-1,k} = \xi_{i-1,k} x_i - (1 - \xi_{i-1,k}) x_{i-1}, \quad 0 < \xi_{i-1,k} < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu > \mu .$$

Důkaz. Postupujeme stejně jako u lemmatu 7.

Věta 3. *Buď $\mathbf{x}_0$ bod a μ kladné číslo. Pro každé $\mathbf{x} \in K[\mathbf{x}_0, 2\mu]$, $\mathbf{u} \in K[\mathbf{x}_0, 2\mu]$, nechť je* $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, *$\mathbf{P}(\mathbf{x})$ positivně definitní symetrická matice, $\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leqq b$ a nechť $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|B_{kj}(\mathbf{x}) - B_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_2$,*[10] *$|\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})| \leqq M_3$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom existují čísla λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ a unitární matice $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ tak, že pro libovolné body $\mathbf{y} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\mathbf{x}_i \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$* (ν je libovolné přirozené číslo) *platí nerovnost $\|\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y}) \,.\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\| \leqq Kq^\nu$. Platí-li pro přirozené číslo ν_0 nerovnost*

$$P = n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2 + M_3) < \frac{1}{2}$$

a je-li

$$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)\left(n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2 + M_3)\right)^{\nu_0 - 1}}\right),$$

potom posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ definovaná vztahy (22), (22') *konverguje k jistému bodu $\mathbf{a} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, jež je pak jediným řešením soustavy* (1) *v $K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Pro chybu platí následující odhady:*

$$\text{(43)} \qquad \text{a)} \quad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_3)\right] \delta_l ,$$

kde

$$\delta_l = \max_{i=(k-1)\nu_0, \ldots, k\nu_0 - 1} \delta_i , \quad k = 1, 2, \ldots ;$$

$$\text{(44)} \qquad \text{b)} \quad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_3)\right]^k \delta_m ,$$

kde

$$\delta_m = \max_{i=0,1,\ldots,\nu_0 - 1} \delta_i , \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Důkaz. Požadovaná čísla λ, K, q a matice $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ existují podle lemmatu 5.

I. Nejprve dokážeme indukcí, že $\mathbf{x}_i \in K[\mathbf{x}_0, \lambda]$ a

$$d_{i-1} \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)\left(n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2 + M_3)\right)^{\nu_0 - 1}} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, \nu_0 .$$

[10]) $B_{kj}(\mathbf{x})$ přitom značí prvek matice $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ stojící v k-tém řádku a j-tém sloupci. Je-li $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ matice typu uvedeného v poznámce 5, je zřejmě $M_2 = M_1$.

Protože je

$$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}}\right),$$

je

$$d_0 = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} \leqq \frac{\lambda}{2}, \quad \text{čili} \quad \mathbf{x}_1 \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda].$$

Jelikož $\mathbf{x}_1 \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ a tedy i $\mathbf{p}_{0,k} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, platí podle lemma 9

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leqq (n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3)) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \tag{45}$$

Protože platí

$$d_0 \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}},$$

plyne z minulé nerovnosti, že

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 2}}.$$

Je-li tedy $n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3) \geqq 1$, je $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leqq (\lambda/2(\nu_0 + 1))$, takže

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} + \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} = \frac{\lambda}{\nu_0 + 1} \leqq \frac{\lambda}{2}.$$

Je tedy $\mathbf{x}_2 \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$. Je-li $n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3) < 1$, platí podle (45) $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| < \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$ a tedy

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < 2d_0 < \frac{\lambda}{\nu_0 + 1} \leqq \frac{\lambda}{2}.$$

Také v tomto případě je $\mathbf{x}_2 \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$.

Předpokládejme nyní, že jsme již dokázali, že $\mathbf{x}_i \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, a že platí

$$d_{i-1} \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - i}} \tag{46}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1$. Potom je $\mathbf{p}_{i-1,k} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ a z lemma 9 plyne nerovnost

$$\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| \leqq (n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3)) \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1. \tag{47}$$

Z nerovností (46) a (47) (ve kterých položíme $i = \nu_0 - 1$) dostaneme

$$\|\mathbf{x}_{\nu_0} - \mathbf{x}_{\nu_0 - 1}\| \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3))}.$$

Je-li tedy nyní $n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3) \geqq 1$, je $\|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-1}\| \leqq \lambda/2(\nu_0 + 1)$, takže

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_0\| \leqq \|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-1}\| + \|\boldsymbol{x}_{\nu_0-1} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-2}\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| \leqq$$
$$\leqq \nu_0 \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} = \frac{\nu_0}{\nu_0 + 1} \frac{\lambda}{2} < \frac{\lambda}{2}.$$

Je tedy $\boldsymbol{x}_{\nu_0} \in K[\boldsymbol{x}_0, \lambda]$. Je-li $n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2 + M_3) < 1$, platí podle (47)

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-1}\| < \|\boldsymbol{x}_{\nu_0-1} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-2}\| < \|\boldsymbol{x}_{\nu_0-2} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-3}\| < \ldots < \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\| <$$
$$< \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|$$

a tedy

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_0\| \leqq \|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-1}\| + \|\boldsymbol{x}_{\nu_0-1} - \boldsymbol{x}_{\nu_0-2}\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\| +$$
$$+ \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| < \nu_0 \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} < \frac{\lambda}{2}.$$

Také v tomto případě je $\boldsymbol{x}_{\nu_0} \in K[\boldsymbol{x}_0, \lambda]$. Tím je důkaz proveden.

II. Nyní dokážeme úplnou indukcí, že $\boldsymbol{x}_\nu \in K[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $\nu \geqq \nu_0 + 1$.

Protože $\boldsymbol{x}_i \in K[\boldsymbol{x}_0, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu_0$, platí podle lemma 9

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu_0+1} - \boldsymbol{x}_{\nu_0}\| \leqq \left[n^3Kq^{\nu_0} + bn^5\left(1 + \sum_{i=1}^{\nu_0-1} Kq^{\nu_0-i}\right)(M_1 + M_2 + M_3)\right] d_m < Pd_m,$$

kde $d_m = \max\limits_{i=0,\ldots,\nu_0-1} d_i$. Je však

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu_0+1} - \boldsymbol{x}_0\| \leqq \|\boldsymbol{x}_{\nu_0+1} - \boldsymbol{x}_{\nu_0}\| + \|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_0\| < Pd_m + \frac{\lambda}{2} < \lambda,$$

neboť $P < \frac{1}{2}$ a $d_m \leqq \lambda$, takže $\boldsymbol{x}_{\nu_0+1} \in K[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$.

Předpokládejme nyní, že $\boldsymbol{x}_{\nu_0+1}, \boldsymbol{x}_{\nu_0+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_\nu \in K[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$. Podle lemma 9 zřejmě nyní platí postupně

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq Pd_{l_1}, \quad \text{kde} \quad d_{l_1} = \max_{i=\nu-1,\ldots,\nu-\nu_0} d_i,$$
$$d_{l_1} \leqq Pd_{l_2}, \quad \text{kde} \quad d_{l_2} = \max_{i=l_1-1,\ldots,l_1-\nu_0} d_i,$$
$$d_{l_s} \leqq Pd_m, \quad \text{kde} \quad d_m \text{ bylo výše definováno}.$$

Je tedy

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq Pd_{l_1} \leqq P^2 d_{l_2} \leqq \ldots \leqq P^s d_{l_s} \leqq P^{s+1} d_m.$$

Snadno se přitom zjistí, že je-li $k\nu_0 \leqq \nu \leqq (k + 1)\nu_0 - 1$, pak $s + 1 \geqq k$ a tedy $\|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq P^{s+1}d_m \leqq P^k d_m$. Odtud plyne

$$\|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\| + \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}\| + \ldots + \|\mathbf{x}_{\nu_0+1} - \mathbf{x}_{\nu_0}\| + \|\mathbf{x}_{\nu_0} - \mathbf{x}_0\| \leqq$$
$$\leqq \nu_0 P^k d_m + \nu_0 P^{k-1} d_m + \ldots + \nu_0 P d_m + \frac{\lambda}{2} =$$
$$= \nu_0 d_m (P + P^2 + \ldots + P^k) + \frac{\lambda}{2} < \nu_0 d_m \frac{P(1 - P^k)}{1 - P} + \frac{\lambda}{2} <$$
$$< \nu_0 d_m + \frac{\lambda}{2} < \nu_0 \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} + \frac{\lambda}{2} < \lambda .$$

Je tedy $\mathbf{x}_{\nu+1} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Naše tvrzení je tedy dokázáno.

III. O posloupnosti $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ nyní dokážeme, že je cauchyovská. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$ a přirozené číslo k, pro které $2\nu_0 d_m P^k \leqq \varepsilon$. Dokážeme, že pro libovolná čísla ν, μ, pro která platí $\nu \geqq k\nu_0$, $\mu \geqq k\nu_0$ platí $\|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu\| \leqq \varepsilon$. Buď $\mu > \nu$ a l, r buďte přirozená čísla, pro která $l\nu_0 \leqq \nu \leqq (l + 1)\nu_0 - 1$, $r\nu_0 \leqq \mu \leqq (r + 1)\nu_0 - 1$. Potom platí

$$\|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu\| \leqq \|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_{\mu-1}\| + \|\mathbf{x}_{\mu-1} - \mathbf{x}_{\mu-2}\| + \ldots + \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\| \leqq$$
$$\leqq \nu_0 P^r d_m + \nu_0 P^{r-1} d_m + \ldots + \nu_0 P^l d_m = \nu_0 d_m P^l (1 + P + \ldots + P^{r-l}) <$$
$$< 2\nu_0 d_m P^l \leqq 2\nu_0 d_m P^k \leqq \varepsilon .$$

Posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ je tedy cauchyovská a v důsledku uzavřenosti a omezenosti množiny $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ konvergentní. Je tedy $\lim_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$, kde $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$.

IV. Nyní dokážeme, že bod $\mathbf{a}$ je řešením soustavy (1). Podle (22″) platí

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu) ,$$

takže

$$\|\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)\| \leqq M_2 \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\| .$$

Je tedy $\|\mathbf{z}(\mathbf{a})\| = \lim_{\nu\to\infty} \|\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)\| = 0$ v důsledku spojitosti funkcí $F_k(\mathbf{x})$. Soustava lineárních rovnic $F_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, F_n(\mathbf{x}) = 0$ má pak pouze triviální řešení $f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{a}) = \ldots = f_n(\mathbf{a}) = 0$, neboť

$$0 \neq \det \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{F}_1'(\mathbf{a})\, \mathbf{F}_1(\mathbf{a})) = (\det \mathbf{F}_1(\mathbf{a}))^2 ,$$

kde $\mathbf{F}_1(\mathbf{a})$ je matice soustavy $F_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

V. Odhady pro chybu se odvodí podobně jako obdobné odhady v části II. důkazu věty 2.

VI. Dokážeme konečně, že bod $\mathbf{a}$ je jediné řešení v $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Kdyby $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$ bylo takové řešení, platilo by zřejmě $\delta'_{k\nu_0} = \|\mathbf{x}_{k\nu_0} - \mathbf{a}'\| \leqq P^k \delta'_m$ a tedy vybraná posloupnost $\{\mathbf{x}_{k\nu_0}\}_{k=1}^{\infty}$ by konvergovala k $\mathbf{a}'$, což je spor. Tím je věta 3 úplně dokázána.

Pro iterační metodu definovanou vztahy (37), (37′) dostaneme stejnou úvahou, jakou jsme odvodili větu 2′, větu 3′ obdobnou větě 3.

Věta 3'. *Buď $\mathbf{x}_0$ bod a μ kladné číslo. Pro každé $\mathbf{x} \in K[\mathbf{x}_0, 2\mu]$, $\mathbf{u} \in K[\mathbf{x}_0, 2\mu]$ nechť jsou matice $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ positivně definitní, $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ symetrická, $\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leqq b$ [11]) a nechť $|v_{kj}(\mathbf{x}) - v_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|u_{kj}(\mathbf{x}) - u_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_2$ [12]) pro každé $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.[13]) Potom existují čísla λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ a unitární matice $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ tak, že pro libovolné body $\mathbf{y} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\mathbf{x}_i \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$* (ν je libovolné přirozené číslo) *platí nerovnost $\|\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\| \leqq Kq^\nu$. Platí-li pro přirozené číslo ν_0 nerovnost*

$$R = n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2) < \frac{1}{2}$$

a je-li

$$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)\,(n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}}\right),$$

potom posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ definovaná vztahy (38), (38') *konverguje k jistému bodu $\mathbf{a} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, jenž je pak jediným řešením soustavy* (36) *v $K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Pro chybu platí následující odhady:*

$$\text{a)} \quad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 M_1 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)\right] \delta_l\,,$$

kde

$$\delta_l = \max_{i=(k-1)\nu_0, \ldots, k\nu_0 - 1} \delta_i\,, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$\text{b)} \quad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 M_1 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)\right]^k \delta_m\,,$$

kde

$$\delta_m = \max_{i=0, \ldots, \nu_0 - 1} \delta_i\,, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

V

Numerickou účinnost metod definovaných vztahy (2), (2') a (22), (22') si nyní ukážeme na dvou numerických příkladech.

Příklad 1. Metodu definovanou vztahy (2) a (2') budeme aplikovat na řešení soustavy

$$x^3 - 2xy + 2 = 0\,, \quad xy^2 - 2y = 0\,,$$

jejímž přesným řešením jsou hodnoty $x = \sqrt[3]{2} \doteq 1{,}259\,9210$, $y = \sqrt[3]{4} \doteq 1{,}587\,4011$. (Viz též [5].)

[11]) $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}))^{-1}$.

[12]) $u_{kj}(\mathbf{x})$ značí prvek v k-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x})$.

[13]) Stačí předpokládat, že $|v_{kj}(\mathbf{x}) - v_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$ pro $k \leqq j$, neboť matice $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ je symetrická.

Jako počáteční aproximaci zvolme $(x_0, y_0) = (1{,}3;\ 1{,}6)$. Vzhledem k poznámce 1 lze psát

$$x_{\nu+1} = x_\nu +$$
$$+ \frac{1}{(3x_\nu^2 - 2y_\nu)^2 + y_\nu^4}\left[-(3x_\nu^2 - 2y_\nu)(x_\nu^3 - 2x_\nu y_\nu + 2) - y_\nu^2(x_\nu y_\nu^2 - 2y_\nu)\right],$$

$$y_{\nu+1} = y_\nu + \frac{1}{4x_\nu^2 + (2x_\nu y_\nu - 2)^2}\left[(-2x_\nu(3x_\nu^2 - 2y_\nu) + y_\nu^2(2x_\nu y_\nu - 2))(x_\nu - x_{\nu+1}) + \right.$$
$$\left. + 2x_\nu(x_\nu^3 - 2x_\nu y_\nu + 2) - (2x_\nu y_\nu - 2)(x_\nu y_\nu^2 - 2y_\nu)\right].$$

Dospíváme k této tabulce hodnot:

TABULKA 1

ν	x_ν	y_ν	δ_ν	d_ν
0	1,3	1,6	0,040 0790	0,039 4876
1	1,260 5124	1,565 8218	0,021 5793	0,021 5714
2	1,261 6968	1,587 3932	0,001 7758	0,001 7727
3	1,259 9241	1,587 3978	0,000 0033	0,000 0039
4	1,259 9202	1,587 4011	0,000 0008	

Vezměme si nyní např. bod $\boldsymbol{x}_3 = (1{,}259\,9241;\ 1{,}587\,3978)$ a $\lambda = 0{,}000\,005$ a aplikujme větu 1. V $\mathrm{K}[\boldsymbol{x}_3, 2\lambda]$ je pak $M_1 = 0{,}000\,7357$, $M_2 = 0{,}000\,2696$, $m = 8{,}869\,0512$, $q_{11} = 0$, $q_{12} = 0{,}117\,2089$, $q_{21} = 0{,}100\,4463$, $q_{22} = 0$. Je tedy $R = 0{,}117\,4356$, takže $(d_3)/(1 - R) = 0{,}000\,0044 < 0{,}000\,005 = \lambda$, čímž jsou předpoklady věty 1 splněny. Pro $\nu \geqq 3$ platí tedy

$$\delta_{\nu+1} \leqq 0{,}117\,4356\,\delta_\nu$$

a řešení leží v $\mathrm{K}[\boldsymbol{x}_3, 2\lambda]$, tj. v intervalu

$$1{,}259\,9191 \leqq x \leqq 1{,}259\,9291\,, \quad 1{,}587\,3928 \leqq y \leqq 1{,}587\,4028\,.$$

Příklad 2. Uvažujme soustavu

$$f_1(\boldsymbol{x}) = 3x - 2y + 2z - 10 = 0\,, \quad f_2(\boldsymbol{x}) = 2xy - z^2 - 15 = 0\,,$$
$$f_3(\boldsymbol{x}) = xz^2 + 3y - 10 = 0\,,$$

jejíž přesným řešením jsou hodnoty $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$. Jako počáteční aproximaci zvolme $(x_0, y_0, z_0) = (3{,}9;\ 2{,}1;\ 1{,}1)$. K výpočtu dalších aproximací použijeme formulí (22), (22′), kde klademe podobně jako v příkladě 1 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$, takže můžeme opět postupovat podle poznámky 1. (Předpoklady věty 1 nejsou pro tuto soustavu zřejmě splněny, neboť v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) je $q_{11} + q_{12} > 1$.) Aproximace $(x_{\nu+1}, y_{\nu+1}, z_{\nu+1})$ počítáme tedy pomocí vzorců

$$x_{\nu+1} = x_\nu + \frac{1}{F_{11}(\mathbf{x}_\nu)} \left[-3f_1(\mathbf{x}_\nu) - 2y_\nu f_2(\mathbf{x}_\nu) - z_\nu^2 f_3(\mathbf{x}_\nu) \right],$$

$$y_{\nu+1} = y_\nu + \frac{1}{F_{22}(\mathbf{x}_\nu)} \left[F_{21}(\mathbf{x}_\nu)(x_\nu - x_{\nu+1}) + 2f_1(\mathbf{x}_\nu) - 2x_\nu f_2(\mathbf{x}_\nu) - 3f_3(\mathbf{x}_\nu) \right],$$

$$z_{\nu+1} = z_\nu + \frac{1}{F_{33}(\mathbf{x}_\nu)} \left[F_{31}(\mathbf{x}_\nu)(x_\nu - x_{\nu+1}) + F_{32}(\mathbf{x}_\nu)(y_\nu - y_{\nu+1}) - 2f_1(\mathbf{x}_\nu) + \right.$$
$$\left. + 2z_\nu f_2(\mathbf{x}_\nu) - 2z_\nu x_\nu f_3(\mathbf{x}_\nu) \right],$$

kde

$$F_{11}(\mathbf{x}_\nu) = 9 + 4y_\nu^2 + z_\nu^4, \quad F_{22}(\mathbf{x}_\nu) = 13 + 4x_\nu^2, \quad F_{33}(\mathbf{x}_\nu) = 4 + 4z_\nu^2 + 4z_\nu^2 x_\nu^2,$$
$$F_{21}(\mathbf{x}_\nu) = -6 + 4x_\nu y_\nu + 3z_\nu^2, \quad F_{31}(\mathbf{x}_\nu) = 6 - 4y_\nu z_\nu + 3z_\nu^3 x_\nu,$$
$$F_{32}(\mathbf{x}_\nu) = -4 + 2x_\nu z_\nu.$$

Takto vypočtené aproximace jsou sestaveny v následující tabulce:

TABULKA 2

ν	x_ν	y_ν	z_ν	δ_ν
0	3,9	2,1	1,1	0,100 000
1	3,862 746	2,047 849	1,011 904	0,137 254
2	3,944 111	2,019 929	1,003 596	0,055 889
3	3,976 980	2,008 404	1,001 468	0,023 020
4	3,990 294	2,003 566	1,000 614	0,009 706
5	3,995 882	2,001 517	1,000 259	0,004 118
6	3,998 248	2,000 646	1,000 110	0,001 752
7	3,999 254	2,000 275	1,000 047	0,000 746

DODATEK PŘI KOREKTUŘE

Dodatečně bylo zjištěno, že v důkazu lemmatu 5 (část I, Časopis pro pěst. mat *86* (1961), str. 449–450) je chyba. Definujeme-li pro matici $\mathbf{A}$ normu výrazem $\|\mathbf{A}\| = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, lze však dokázat místo lemmatu 5 toto lemma:

Lemma. *Buď $\mathbf{z}$ nějaký bod, μ kladné číslo. Pro každé $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ buď* det $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, *matice $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ buď symetrická, positivně definitní. Potom existují čísla K, q, λ, $0 < K$, $0 < q < 1$, $0 < \lambda \leqq \mu$ tak, že pro libovolné přirozené číslo ν platí nerovnost*

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\| \leqq Kq^\nu,$$

kde $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, jsou libovolné reálné vektory.

Důkaz. Stejně jako na počátku důkazu lemmatu 5 se dokáže, že pro vlastní čísla $\lambda_i(\mathbf{x})$ matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ platí v $\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ nerovnosti $|\lambda_i(\mathbf{x})| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, a tedy $|\lambda_i(\mathbf{z})| < 1$, $i = 1, \ldots, n$. Existuje tedy norma (označme ji indexem 1) tak, že $\|\mathbf{A}(\mathbf{z})\|_1 < q < 1$ a číslo $0 < \lambda \leqq \mu$, že pro $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$ je též $\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|_1 \leqq q < 1$. Dále existuje konstanta K, že pro libovolnou matici $\mathbf{X}$ platí nerovnost $\|\mathbf{X}\| \leqq K\|\mathbf{X}\|_1$. Buďte nyní $x_i \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, kde ν je nějaké přirozené číslo. Potom platí

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\,\mathbf{A}(\mathbf{x}_2)\ldots\mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\| \leqq K\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\,\mathbf{A}(\mathbf{x}_2)\ldots\mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\|_1 \leqq$$
$$\leqq K\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\|_1\,\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_2)\|_1\ldots\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\|_1 \leqq Kq^\nu\,.$$

Tím je lemma dokázáno.

Vzhledem k tomuto lemmatu a výše uvedené definici normy se příslušné odhady ve větách 2, 2′, 3, 3′ velmi zlepší. Hlavní výsledek práce, tj. věta 3, zní pak takto:

Věta 3. *Buď* $\mathbf{x}_0$ *bod a* μ *kladné číslo. Pro každé* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$, $\mathbf{u} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$ *nechť je* $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ *positivně definitní symetrické matice,* $\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leqq b$ *nechť* $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|B_{kj}(\mathbf{x}) - B_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_2$, $|\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x})\, f_i(\mathbf{x})| \leqq M_3$ pro *každé* $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom existují čísla λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ tak, že pro libovolné body $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ (ν *je libovolné přirozené číslo*) *platí nerovnost* $\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\,\mathbf{A}(\mathbf{x}_2)\ldots\mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\| \leqq Kq^\nu$. *Platí-li pro přirozené číslo* ν_0 *nerovnosti*

$$P = Kq^{\nu_0} + bn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2 + M_3) < \tfrac{1}{2}\,,$$

a je-li $$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0+1)\,(Kq + bn(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}}\right),$$

potom posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definovaná vztahy* (22), (22′) *konverguje k jistému bodu* $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, *jež je pak jediným řešením soustavy* (1) *v* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Pro chybu platí následující odhady:*

$$\delta_{k\nu_0} \leqq \left[Kq^{\nu_0} + bn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_3)\right]\delta_l\,, \tag{48}$$

kde $$\delta_l = \max_{i=(k-1)\nu_0, \ldots, k\nu_0 - 1} \delta_i\,, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$\delta_{k\nu_0} \leqq \left[Kq^{\nu_0} + bn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_3)\right]^k \delta_m\,. \tag{49}$$

kde $$\delta_m = \max_{i=0, \ldots, \nu_0 - 1} \delta_i\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Obdobná situace je i u ostatních vět.

Literatura

[1] *В. Н. Фаддеева:* Вычислительные методы линейной алгебры. Москва, Ленинград 1950.

[2] *L. Mirsky*: An Introduction to Linear Algebra. Oxford 1955.

[3] *E. Reich*: On the Convergence of the Classical Iterative Method of Solving Linear Simultaneous Equations. Ann. Math. Stat. v. *XX*, No 3, 1949, 448–451.

[4] *A. S. Householder*: Principles of Numerical Analysis. New York, Toronto, London, 1953.

[5] *M. Šisler*: O konvergenci iteračních metod řešení soustavy nelineárních rovnic. Apl. Mat., *5* (1960), 141–150.

[6] *M. Šisler*: O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic, I. Čas. pro pěst. mat. *86* (1961), 439—461.

Резюме

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, II

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР (Miroslav Šisler), Прага

В этой второй части работы исследуются дальнейшие свойства итерационного метода, определенного в первой части работы для случая общего разложения матрицы $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$.

Главным результатом является следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{x}_0$ *— точка и* μ *— положительное число. Для любых* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$, $\mathbf{u} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$ *пусть* $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ *— положительно определенная симметрическая матрица,* $\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leqq b$, *и пусть* $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|B_{kj}(\mathbf{x}) - B_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_2$ *(*$B_{kj}(\mathbf{x})$ *является элементом матрицы* $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})$*),* $\left|\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})\right| \leqq M_3$ *для каждого* $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда существуют числа* λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ *так, что для любых точек* $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ *(*ν *— произвольное натуральное число) имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\| \leqq Kq^\nu .$$

Если для любого натурального числа ν_0 *справедлива неравенства*

$$P = Kq^{\nu_0} + bn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2 + M_3) < \frac{1}{2},$$

$$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)},\ \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)\,(Kq + bn(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}}\right),$$

то последовательность $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, *определенная при помощи отношений* (22), (22′), *сходится к известной точке* $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, *которая является тогда единственным решением системы* (1) *в* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Для погрешности найдены оценки* (48), (49).

Для аналогичного итерационного метода для вычисления экстремумов функций n действительных переменных выведена теорема, аналогичная теореме 3 (теорема 3′).

В последнем абзаце работы показана вычислительная эффективность метода на двух численных примерах. Скорость сходимости в обоих случаях очевидна из таблиц. Для сравнения скорости сходимости исследованного метода с методом Ньютона выбирается пример 1 таким же образом, как в работе [5].

Zusammenfassung

ÜBER EIN ITERATIONSVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG DER SYSTEME NICHTLINEARER GLEICHUNGEN, II

MIROSLAV ŠISLER, Praha

In diesem zweiten Teil der Arbeit sind weitere Eigenschaften des im ersten Teil dieser Arbeit definierten Iterationsverfahrens für den Fall der allgemeinen Zerlegung der Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ bewiesen.

Das Hauptergebnis ist der folgende Satz:

Satz 3. *Sei $\mathbf{x}_0$ ein Punkt und μ eine positive Zahl. Für jeden $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$ und jeden $\mathbf{u} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\mu]$ seien:* $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, *die Matrix $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ symmetrisch, positiv definit, $\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leqq b$ und $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$, $|B_{kj}(\mathbf{x}) - B_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_2$, ($B_{kj}(\mathbf{x})$ ist ein Element der Matrix $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})$), $\left|\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})\right| \leqq M_3$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dann existieren die Zahlen λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ derart, dass für beliebige Punkte $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ (ν ist eine beliebige natürliche Zahl) die Ungleichung*

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\| \leqq Kq^\nu$$

gilt. Falls für eine natürliche Zahl ν_0 die Ungleichungen

$$P = Kq^{\nu_0} + bn\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2 + M_3) < \frac{1}{2},$$

$$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(Kq + bn(M_1 + M_2 + M_3))^{\nu_0 - 1}}\right)$$

gelten, dann konvergiert die durch Beziehungen (22), (22') definierte Folge $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ zu einem Punkt $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, und der Punkt $\mathbf{a}$ ist dann die einzige Lösung des Systems (1) in $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Dabei gelten die Fehlerabschätzungen (48), (49).

Für das analoge Iterationsverfahren für die Berechnung der Extremen der Funktionen von n reellen Veränderlichen, die im Absatz III durch Beziehungen (37) und (37') definiert sind, ist ein mit dem Satz 3 analoge Satz abgeleitet (Satz 3').

Im letzten Absatz der Arbeit ist die numerische Wirksamkeit des Verfahrens an zwei Beispielen gezeigt. Die Geschwindigkeit der Konvergenz in beiden Beispielen ist aus den Tabellen offenbar. Für den Vergleich der Geschwindigkeit der Konvergenz unseres Verfahrens mit dem Newtonschen Iterationsverfahren wurde dasselbe Beispiel wie in der Arbeit [5] gewählt (Beispiel 1).