Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Šisler

O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic. I

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 4, 439--461

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117393`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

O JEDNÉ ITERAČNÍ METODĚ ŘEŠENÍ SOUSTAV NELINEÁRNÍCH ROVNIC, I

MIROSLAV ŠISLER, Praha

(Došlo dne 1. července 1960)

V této prvé části článku jsou zkoumány podmínky konvergence a odhad chyby pro jistou iterační metodu pro výpočet reálného řešení soustavy nelineárních rovnic. Je naznačen též způsob použití této metody k výpočtu extrémů funkcí více proměnných. Některými dalšími vlastnostmi této metody a její numerickou účinností se bude zabývat část II.

I

Mějme dánu soustavu n nelineárních rovnic o n neznámých

$$(1) \qquad f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \quad f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0\,, \quad \ldots, \quad f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0\,.$$

O reálných funkcích n reálných proměnných f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, předpokládáme, že mají spojité první a druhé parciální derivace v okolí reálného řešení soustavy (1). Označíme-li $\mathbf{x}$ sloupcový vektor o reálných složkách $x_1, x_2, \ldots, x_n$,[1]) můžeme soustavu (1) zapsat ve tvaru $f_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zavedeme tato označení:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_{k,i}(\mathbf{x})\,, \quad \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}) = f_{k,ij}(\mathbf{x})\,,$$

$$F_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})\,, \quad F_{kj}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\mathbf{x}) f_{i,j}(\mathbf{x})\,.$$

Matice $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_{ij}(\mathbf{x}))$ je pak symetrická a positivně semidefinitní, neboť je součinem transponované matice k funkční matici soustavy (1) a matice funkční.

Definujme dále matice $\mathbf{D}(\mathbf{x})$, $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ takto: $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = (d_{ij}(\mathbf{x}))$, kde $d_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ pro $i \neq j$, $d_{ii}(\mathbf{x}) = F_{ii}(\mathbf{x})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (h_{ij}(\mathbf{x}))$, kde $h_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ pro $i \leqq j$, $h_{ij}(\mathbf{x}) = - F_{ij}(\mathbf{x})$ pro $i > j$. Zřejmě je $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}'(\mathbf{x})$.[2])

[1]) Někdy budeme místo slova vektor říkat též bod.

[2]) $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ značí matici transponovanou k matici $\mathbf{H}(\mathbf{x})$.

Označme ještě $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ a zvolme bod $\mathbf{x}_\nu = \begin{pmatrix} x_{\nu,1} \\ x_{\nu,2} \\ \vdots \\ x_{\nu,n} \end{pmatrix}$.

Je-li $\det(\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu)) \neq 0$, definujme $\mathbf{x}_{\nu+1}$ takto:

(2) $$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu))^{-1} \mathbf{H}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + (\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu))^{-1} \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu),$$

kde

(2') $$\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu).$$

Zjednodušením rovnosti (2) dosazením z (2') dostáváme zřejmě rovnost

(2'') $$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu - (\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu))^{-1} \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu).$$

Poznámka 1. Ze vztahu $\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)$ plyne $(\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}'(\mathbf{x}_\nu))\, \mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)$ a tedy $\mathbf{x} = (\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu))^{-1} \mathbf{H}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x} + (\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu))^{-1} \mathbf{y}(x_\nu)$. Iterační metoda definovaná pomocí (2) a (2') odpovídá tedy známé Seidlově metodě pro řešení soustav lineárních rovnic (vztah $\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)$ znamená soustavu lineárních rovnic).

Definice 1. Pro bod $\mathbf{x} = (x_i)$ a matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ položme

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|, \quad \|\mathbf{A}\| = \max_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} |a_{ij}|.$$

Definice 2. Chybou aproximace $\mathbf{x}_\nu$ nazýváme číslo

$$\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|,$$

kde $\mathbf{a}$ je řešením soustavy (1).

Definice 3. Opravou aproximace $\mathbf{x}_\nu$ nazýváme číslo

$$d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|.$$

Zaveďme ještě toto označení: $K[\mathbf{y}, \mu]$ značí množinu všech (reálných) bodů $\mathbf{x}$, pro které je $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqq \mu/2$.

Dále zvolme body $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ a označme $\mathbf{F}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$, $\mathbf{D}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$, $\mathbf{H}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$, $\mathbf{H}'(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$, $\mathbf{Z}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$, matice takto definované:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = \begin{pmatrix} F_{11}(\mathbf{q}_1), & F_{12}(\mathbf{q}_1), & \ldots, & F_{1n}(\mathbf{q}_1) \\ F_{21}(\mathbf{q}_2), & F_{22}(\mathbf{q}_2), & \ldots, & F_{2n}(\mathbf{q}_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n1}(\mathbf{q}_n), & F_{n2}(\mathbf{q}_n), & \ldots, & F_{nn}(\mathbf{q}_n) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ -F_{21}(\mathbf{q}_2), & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -F_{n1}(\mathbf{q}_n), & -F_{n2}(\mathbf{q}_n), & \ldots, & -F_{n,n-1}(\mathbf{q}_n), & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n) = \{F_{11}(\boldsymbol{q}_1), F_{22}(\boldsymbol{q}_2), \ldots, F_{nn}(\boldsymbol{q}_n)\}\,,^3)$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n) - \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n)\,,$$

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n) = (e_{kj})\,, \quad \text{kde} \quad e_{kj} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\boldsymbol{q}_k) f_i(\boldsymbol{q}_k)\,.$$

Nejprve dokážeme některé pomocné věty:

Lemma 1. *Z rovností* (2) *a* (2′) *plyne*

$$(3) \quad \boldsymbol{x}_{\nu+2} - \boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}_{\nu+1})\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_{\nu+1})(\boldsymbol{x}_{\nu+2} - \boldsymbol{x}_{\nu+1}) + \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}_{\nu+1})\,\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}_{\nu+1})\,.$$
$$.\,(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu) + \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}_{\nu+1})\,.$$
$$.\,[(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}_\nu) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_\nu)) - (\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n}))](\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu) +$$
$$+ \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}_{\nu+1})[\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n}) - \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}_{\nu+1})](\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu) -$$
$$- \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}_{\nu+1})\,\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n})(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu)\,.$$

Přitom $\boldsymbol{p}_{\nu k} = \xi_{\nu k}\boldsymbol{x}_{\nu+1} - (1 - \xi_{\nu k})\,\boldsymbol{x}_\nu$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. Rovnosti (2) a (2′) jsou ekvivalentní s (2″).

Z (2″) plyne

$$(4) \qquad \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu) = -\,(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}_\nu) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_\nu))(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu)\,.$$

Podle věty o přírůstku funkce platí

$$(5) \qquad F_k(\boldsymbol{x}_{\nu+1}) = F_k(\boldsymbol{x}_\nu) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}_{\nu k})(x_{\nu+1,j} - x_{\nu,j})\,,$$

kde

$$\boldsymbol{p}_{\nu k} = \xi_{\nu k}\boldsymbol{x}_{\nu+1} - (1 - \xi_{\nu k})\,\boldsymbol{x}_\nu\,, \quad 0 < \xi_{\nu k} < 1\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Je však

$$(6) \qquad \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} f_{i,k}(\boldsymbol{x}) f_{i,j}(\boldsymbol{x}) =$$
$$= F_{kj}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x})\,.$$

Dosadíme-li (6) do (5), dostaneme

$$F_k(\boldsymbol{x}_{\nu+1}) = F_k(\boldsymbol{x}_\nu) + \sum_{j=1}^{n} F_{kj}(\boldsymbol{p}_{\nu k})(x_{\nu+1,j} - x_{\nu,j}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\boldsymbol{p}_{\nu k}) f_i(\boldsymbol{p}_{\nu k})(x_{\nu+1,j} - x_{\nu,j})\,.$$

Zapíšeme-li tuto rovnost pomocí matic, dostaneme

$$(7) \quad \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\nu+1}) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n})(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu) + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n})(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu)\,.$$

---

[3]) Symbol $\{d_1, \ldots, d_n\}$ značí jako obvykle diagonální matici.

Z (2) plyne

$$(D(x_{\nu+1}) - H(x_{\nu+1}))\, x_{\nu+2} = H'(x_{\nu+1})\, x_{\nu+1} + y(x_{\nu+1}),$$
$$D(x_{\nu+1})\, x_{\nu+2} = H(x_{\nu+1})\, x_{\nu+2} + H'(x_{\nu+1})\, x_{\nu+1} + y(x_{\nu+1})$$

a po dosazení z (2') obdržíme

$$D(x_{\nu+1})(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) = H(x_{\nu+1})(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) - z(x_{\nu+1}),$$
$$x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = D^{-1}(x_{\nu+1})\, H(x_{\nu+1})(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) - D^{-1}(x_{\nu+1})\, z(x_{\nu+1}). \tag{8}$$

Postupným použitím (7) a (4) dostáváme z (8) rovnost

$$\begin{aligned} x_{\nu+2} - x_{\nu+1} &= D^{-1}(x_{\nu+1})\, H(x_{\nu+1})(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) - D^{-1}(x_{\nu+1})\, z(x_\nu) - \\ &\quad - D^{-1}(x_{\nu+1})\, F(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_{\nu+1} - x_\nu) - \\ &\quad - D^{-1}(x_{\nu+1})\, Z(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_{\nu+1} - x_\nu) = \\ &= D^{-1}(x_{\nu+1})\, H(x_{\nu+1})(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) + D^{-1}(x_{\nu+1})(D(x_\nu) - H(x_\nu))\,. \\ &\quad .\,(x_{\nu+1} - x_\nu) - D^{-1}(x_{\nu+1})(D(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n}) - H(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n}) - \\ &\quad - H'(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n}))(x_{\nu+1} - x_\nu) - D^{-1}(x_{\nu+1})\, Z(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_{\nu+1} - x_\nu) = \\ &= D^{-1}(x_{\nu+1})\, H(x_{\nu+1})(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) + D^{-1}(x_{\nu+1})\, H'(x_{\nu+1})(x_{\nu+1} - x_\nu) + \\ &\quad + D^{-1}(x_{\nu+1})[(D(x_\nu) - H(x_\nu)) - (D(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n}) - H(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})]\,. \\ &\quad .\,(x_{\nu+1} - x_\nu) + D^{-1}(x_{\nu+1})[H'(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n}) - H'(x_{\nu+1})](x_{\nu+1} - x_\nu) - \\ &\quad - D^{-1}(x_{\nu+1})\, Z(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_{\nu+1} - x_\nu), \end{aligned}$$

což je (3).

Lemma 2. *Je-li a řešením soustavy* (1), *plyne z* (2) *a* (2') *rovnost*

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} - a &= D^{-1}(x_\nu)\, H(x_\nu)(x_{\nu+1} - a) + D^{-1}(x_\nu)\, H'(x_\nu)(x_\nu - a) + \\ &+ D^{-1}(x_\nu)(F(x_\nu) - F(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n}))(x_\nu - a) - D^{-1}(x_\nu)\, Z(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a), \end{aligned} \tag{9}$$

kde $p_{\nu k} = \xi_{\nu k} x_\nu - (1 - \xi_{\nu k})\, a$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. Z (2'') plyne

$$x_{\nu+1} = x_\nu + D^{-1}(x_\nu)\, H(x_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu) - D^{-1}(x_\nu)\, z(x_\nu). \tag{10}$$

Protože $z(a) = 0$, platí podle věty o přírůstku funkce

$$z(x_\nu) = F(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) + Z(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a), \tag{11}$$

kde $p_{\nu k} = \xi_{\nu k} x_\nu - (1 - \xi_{\nu k})\, a$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dosazením (11) do (10) dostaneme

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} &= x_\nu + D^{-1}(x_\nu) H(x_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu) - D^{-1}(x_\nu)\, F(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a) - \\ &\quad - D^{-1}(x_\nu)\, Z(p_{\nu1}, \ldots, p_{\nu n})(x_\nu - a). \end{aligned} \tag{12}$$

Úpravou rovnosti (12) dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a} &= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}) - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) + \\
&+ \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu 1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu n}))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \\
&- \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu 1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) = \\
&= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}) + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{H}'(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) + \\
&+ \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu 1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu n}))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu 1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}),
\end{aligned}$$

což je (9).

Věta 1. *Buď λ kladné číslo. Pro všechna $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ nechť platí*

$$0 < m \leqq F_{ii}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

$$\frac{1}{F_{ii}(\mathbf{x})} \sum_{j=i}^{i-1} |F_{ij}(\mathbf{x})| \leqq q_{i,1}, \quad \frac{1}{F_{ii}(\mathbf{x})} \sum_{j=i+1}^{n} |F_{ij}(\mathbf{x})| \leqq q_{i,2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$q_{11} = 0, \qquad \frac{1}{F_{11}(\mathbf{x})} \sum_{j=2}^{n} |F_{1j}(\mathbf{x})| \leqq q_{1,2},$$

$$\frac{1}{F_{nn}(\mathbf{x})} \sum_{j=1}^{n-1} |F_{nj}(\mathbf{x})| \leqq q_{n,1}, \qquad q_{n,2} = 0,$$

a buď $q_{i,1} + q_{i,2} < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ a $k, j = 1, 2, \ldots, n$ nechť dále platí

$$|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{y})| \leqq M_1\,,^{4)} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})\right| \leqq M_2\,.$$

Buď dále

$$R = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{q_{i,2} + \dfrac{n(M_1 + M_2)}{m}}{1 - q_{i,1}} < 1\,, \quad \frac{d_0}{1 - R} \leqq \lambda\,.$$

Potom existuje bod $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ takový, že posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ definovaná pomocí (2) a (2') konverguje a je $\lim_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. Bod $\mathbf{a}$ je pak jediným řešením soustavy (1) v $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Pro chybu pak platí odhad

$$\delta_{\nu+1} \leqq R\delta_\nu\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Důkaz. I. Protože je $d_0 < \dfrac{d_0}{1 - R} \leqq \lambda$, je $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ a tedy i $\mathbf{p}_{0i} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, platí podle lemmatu 1

$$\begin{aligned}
|x_{2,i} - x_{1,i}| &\leqq q_{i,1}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| + q_{i,2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| + \\
&+ i\frac{M_1}{m}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| + (n - i)\frac{M_1}{m}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| + n\frac{M_2}{m}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \\
&= q_{i,1}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| + \left(q_{i,2} + \frac{n(M_1 + M_2)}{m}\right)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|\,.
\end{aligned}$$

---

[4]) Stačí, aby $|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{y})| \leqq M_1$ pro $k \leqq j$, neboť matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je symetrická.

Buď i_0 to přirozené číslo, pro které je $|x_{2,i_0} - x_{1,i_0}| = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_{2,i} - x_{1,i}|$.

Potom je

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leqq q_{i_0,1}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| + \left(q_{i_0,2} + \frac{n(M_1 + M_2)}{m}\right)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|,$$

čili

$$d_1 \leqq q_{i_0,1}d_1 + \left(q_{i_0,2} + \frac{n(M_1 + M_2)}{m}\right)d_0,$$

a tedy

$$d_1 \leqq \frac{q_{i_0,1} + \dfrac{n(M_1 + M_2)}{m}}{1 - q_{i_0,1}}\, d_0 \leqq Rd_0 .$$

Přitom je $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leqq Rd_0 + d_0 < \dfrac{d_0}{1 - R} \leqq \lambda$. Je tedy $\mathbf{x}_2 \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Pokračujme dále úplnou indukcí. Předpokládejme, že $\mathbf{x}_i \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$. Potom je též $\mathbf{p}_{\nu-1,i} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takže je podle lemmatu 1 $d_\nu \leqq Rd_{\nu-1}$. Protože je tedy $d_i \leqq Rd_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, platí

$$\|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\| + \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}\| + \ldots + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| =$$
$$= d_\nu + d_{\nu-1} + \ldots + d_0 \leqq R^\nu d_0 + R^{\nu-1}d_0 + \ldots + d_0 < \frac{d_0}{1 - R} \leqq \lambda,$$

takže $\mathbf{x}_{\nu+1} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Pro každé ν je tedy $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ a platí $d_{\nu+1} \leqq Rd_\nu$. Protože množina $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ je omezená a uzavřená, má posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ hromadný bod $\mathbf{a} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$.

II. Dokážeme, že bod $\mathbf{a}$ je řešením soustavy (1): Z (2″) plyne

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = -(\mathbf{D}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu).$$

Označíme-li $S = \sup_{\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]} \|\mathbf{D}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x})\|$, platí $\|\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)\| \leqq nS\|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$ a v důsledku spojitosti funkcí $F_k(\mathbf{x})$ je pak $\|\mathbf{z}(\mathbf{a})\| = \lim_{\nu\to\infty} \|\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)\| = 0$. Platí tedy

$$F_1(\mathbf{a}) = F_2(\mathbf{a}) = \ldots = F_n(\mathbf{a}) = 0 .$$

Protože hodnost funkční matice soustavy (1) v bodě $\mathbf{a}$ je rovna n (z (13) totiž plyne, že $\det \mathbf{F}(\mathbf{a}) \neq 0$,[5]) takže označíme-li funkční matici $\mathbf{G}(\mathbf{x})$, je $\det \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \det(\mathbf{G}'(\mathbf{a}) \,.\, \mathbf{G}(\mathbf{a})) = (\det \mathbf{G}(\mathbf{a}))^2$ a tedy $\det \mathbf{G}(\mathbf{a}) \neq 0$), má homogenní soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{a}) &= f_{1,1}(\mathbf{a})f_1(\mathbf{a}) + \ldots + f_{n,1}(\mathbf{a})f_n(\mathbf{a}) = 0,\\
F_2(\mathbf{a}) &= f_{1,2}(\mathbf{a})f_1(\mathbf{a}) + \ldots + f_{n,2}(\mathbf{a})f_n(\mathbf{a}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_n(\mathbf{a}) &= f_{1,n}(\mathbf{a})f_1(\mathbf{a}) + \ldots + f_{n,n}(\mathbf{a})f_n(\mathbf{a}) = 0
\end{aligned}$$

jediné řešení $f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{a}) = \ldots = f_n(\mathbf{a}) = 0$, takže $\mathbf{a}$ je řešením soustavy (1).

[5]) Důkaz tohoto tvrzení viz např. [4], str. 148.

III. Protože $\mathbf{x}_\nu \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbf{a} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, platí podle lemmatu 2

$$|x_{\nu+1,i} - a_i| \leqq q_{i,1}\|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}\| + q_{i,2}\|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\| + n\frac{M_1}{m}\|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\| + n\frac{M_2}{m}\|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|\,.$$

Je-li i_0 takové, že $|x_{\nu+1,i_0} - a_{i_0}| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu+1,i} - a_i|$, je

$$\|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}\| \leqq q_{i_0,1}\|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}\| + \left(q_{i_0,2} + \frac{n(M_1 + M_2)}{m}\right)\|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|\,,$$

čili

$$\delta_{\nu+1} \leqq \frac{q_{i_0,2} + \dfrac{n(M_1 + M_2)}{m}}{1 - q_{i_0,1}}\,\delta_\nu \leqq R\delta_\nu\,. \tag{14}$$

Je tedy $\lim\limits_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0$, takže posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ konverguje a je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$.

IV. Dokážeme, že $\mathbf{a}$ je jediné řešení soustavy (1) v $K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Kdyby $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$ bylo řešení, platilo by $\delta'_{\nu+1} = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a}'\| \leqq R\delta'_\nu$, a tedy $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$, což je spor.

II

Nyní budeme zkoumat konvergenci iterační metody, která je zobecněním iterační metody vyšetřované v části I. Budeme se opět zabývat výpočtem reálného řešení soustavy (1). Nejprve dokážeme některé pomocné věty.

Lemma 3. *Matice* $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ *buďte positivně definitní,* $\mathbf{P}$ *hermitovská a nechť* $\mathbf{M} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*$.[6]) *Je-li* λ_i *kořenem rovnice* $\det(\lambda\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*) = 0$, *pak* $|\lambda_i| < 1$.

Důkaz. Buď λ_i kořenem rovnice $\det(\lambda\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*) = 0$ a $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{o}$ vektor, pro který $\lambda_i\mathbf{P}\mathbf{x}_i - \lambda_i\mathbf{Q}\mathbf{x}_i - \mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$. Potom je

$$\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{P}\mathbf{x}_i - \lambda_i\mathbf{Q}\mathbf{x}_i\,,$$
$$(\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - \lambda_i(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)\,. \tag{15}$$

Protože je $\mathbf{P}$ hermitovská (tj. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$), platí postupně

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}\mathbf{x}_i) = \lambda_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}\mathbf{x}_i) - \lambda_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i)\,,$$
$$\overline{(\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}\mathbf{x}_i)} = \bar\lambda_i\overline{(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}\mathbf{x}_i)} - \bar\lambda_i\overline{(\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i)}\,,$$
$$(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \bar\lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - \bar\lambda_i(\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)\,. \tag{16}$$

Z rovnic (15) a (16) plyne

$$(\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - \lambda_i\bar\lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) + \lambda_i\bar\lambda_i(\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)\,,$$
$$(1 - |\lambda_i|^2)(\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \lambda_i(1 - \bar\lambda_i)(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)\,. \tag{17}$$

[6]) $\mathbf{Q}^*$ značí transponovanou matici k matici komplexně sdružené.

Odtud je

$$(1 - |\lambda_i|^2)\overline{(\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)} = \bar{\lambda}_i(1 - \lambda_i)\overline{(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)},$$

$$(1 - |\lambda_i|^2)(\mathbf{x}_i, \mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i) = \bar{\lambda}_i(1 - \lambda_i)(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}\mathbf{x}_i),$$

$$(1 - |\lambda_i|^2)(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \bar{\lambda}_i(1 - \lambda_i)(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i). \tag{18}$$

Protože $(\mathbf{M}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = (\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - (\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - (\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)$, je podle (17) a (18)

$$\begin{aligned}(1 - |\lambda_i|^2)(\mathbf{M}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) &= (1 - |\lambda_i|^2)(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - (1 - |\lambda_i|^2)(\mathbf{Q}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) - \\ &- (1 - |\lambda_i|^2)(\mathbf{Q}^*\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = [1 - |\lambda_i|^2 - \bar{\lambda}_i(1 - \lambda_i) - \lambda_i(1 - \bar{\lambda}_i)](\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \\ &= [1 - \lambda_i - \bar{\lambda}_i + |\lambda_i|^2](\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = (1 - \lambda_i)(1 - \bar{\lambda}_i)(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \\ &= |1 - \lambda_i|^2(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i).\end{aligned} \tag{19}$$

Protože je $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{o}$ a $\mathbf{M}$ je positivně definitní, je $(\mathbf{M}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) > 0$, takže podle (19) platí

$$1 - |\lambda_i|^2 = \frac{|1 - \lambda_i|^2(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)}{(\mathbf{M}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)}.$$

Dále musí platit $\lambda_i \neq 1$. Kdyby totiž $\lambda_i = 1$, bylo by $\det(\mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*) = \det \mathbf{M} = 0$, což je spor. Protože $(\mathbf{P}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) > 0$, je $1 - |\lambda_i|^2 > 0$, čímž je lemma 3 dokázáno.

Poznámka 2. Lemma 3 použijeme za předpokladu, že matice $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ budou reálné. V tomto případě je matice $\mathbf{P}$ symetrická a $\mathbf{M} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}'$.

Lemma 4. *Matice $\mathbf{F}$ a $\mathbf{P}$ buďte positivně definitní, $\mathbf{P}$ hermitovská a nechť platí $\mathbf{F} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^*$. Potom je matice $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ regulární.*

Důkaz. Předpokládejme, že matice $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ je singulární. Potom existuje vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, že platí $(\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Z rovnosti $\mathbf{F} + \mathbf{Q}^* = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ plyne, že je též $(\mathbf{F} + \mathbf{Q}^*)\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Platí tedy $\mathbf{x}^*(\mathbf{P} - \mathbf{Q})\,\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x}^*(\mathbf{F} + \mathbf{Q}^*)\,\mathbf{x} = 0$, takže

$$\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x}^*\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{Q}^*\mathbf{x} = 0. \tag{20}$$

Protože je $\mathbf{P}$ hermitovská a positivně definitní, je číslo $\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}$ a tedy i číslo $\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$ reálné. Platí tedy

$$\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}^*}\,\overline{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}'\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{x})' = \mathbf{x}^*\mathbf{Q}^*\mathbf{x}.$$

Sečtením rovností (20) dostaneme $\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{F}\mathbf{x} = 0$. V důsledku positivní definitnosti matice $\mathbf{P}$ je $\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x} > 0$, takže $\mathbf{x}^*\mathbf{F}\mathbf{x} < 0$, což je spor, neboť $\mathbf{F}$ je positivně definitní hermitovská matice (platí totiž $\mathbf{F}^* = \mathbf{P}^* - \mathbf{Q}^* - \mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^* = \mathbf{F}$).

Buďte nyní $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ reálné matice takové, že platí $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ (matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je definována v části I). Platí nyní následující lemma:

Lemma 5. *Buď μ kladné číslo. Pro každé $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$, kde $\mathbf{z}$ je nějaký bod, buď $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ symetrická, positivně definitní. Potom existuje unitární matice $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ a čísla K, q, λ, $0 < K$, $0 < q < 1$, a $0 < \lambda \leqq \mu$ tak, že pro libovolné přirozené* *číslo v platí*

$$\|U^{-1}(y)\,A(x_1)\,A(x_2)\dots A(x_\nu)\,U(y)\| \leqq Kq^\nu\,,$$

kde $A(x) = (P(x) - Q(x))^{-1}\,Q'(x)$ *a* $y \in K[z, \lambda]$, $x_i \in K[z, \lambda]$, $i = 1, 2, \dots, \nu$ *jsou libovolné reálné vektory.*

Důkaz. V $K[z, \mu]$ je matice $F(x)$ podle definice symetrická a positivně semidefinitní. Protože je však pro všechna $x \in K[z, \mu]$ det $F(x) \neq 0$, je matice $F(x)$ positivně definitní. Protože je podle předpokladu matice $P(x)$ positivně definitní v $K[z, \mu]$, platí podle lemma 3 pro kořeny $\lambda_i(x)$ rovnice $\det(\lambda(x)\,P(x) - \lambda(x)\,Q(x) - Q'(x)) = 0$ nerovnost $|\lambda_i(x)| < 1$. Protože $\lambda_i(x)$ jsou v důsledku lemmatu 4 zřejmě i kořeny rovnice $\det(\lambda(x)\,E - (P(x) - Q(x))^{-1}\,Q'(x)) = 0$, tj. rovnice $\det(\lambda(x)\,E - A(x)) = 0$, jsou $\lambda_i(x)$ vlastními čísly matice $A(x)$. Protože je množina $K[z, \mu]$ uzavřená a omezená, je možno zvolit čísla $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, q tak, že $\omega_i \neq \omega_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, a že platí $0 \leqq |\lambda_i(x)| < \omega_i < q < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. V důsledku uzavřenosti a omezenosti množiny $K[z, \mu]$ existuje dále číslo $\varepsilon > 0$ tak, že platí

$$0 \leqq |\lambda_i(x)| \leqq \omega_i - \varepsilon < \omega_i < \omega_i + \varepsilon < q < 1\,, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a $\bigcap_{i=1}^{n} \langle \omega_i - \varepsilon, \omega_i + \varepsilon \rangle = \emptyset$.

Existuje nyní unitární matice $U(x)$ a trojúhelníková matice $\Delta(x)$, že platí $U^{-1}(x)\,.\,A(x)\,U(x) = \Delta(x)$. Pro $x \in K[z, \mu]$, $y \in K[z, \mu]$ definujme matici $\Delta(x, y)$ takto: $\Delta(x, y) = U^{-1}(y)\,A(x)\,U(y)$. Buď B kladné číslo, že platí $\|\Delta(x, y)\| \leqq B$ pro libovolné $x \in K[z, \mu]$, $y \in K[z, \mu]$.

Definujme nyní pro $\delta > 0$ matici $T(\delta) = (t_{ij}(\delta))$ takto:

$$(21) \qquad \begin{aligned} t_{ii}(\delta) &= \omega_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n\,,\\ t_{ij}(\delta) &= \delta \quad \text{pro} \quad i > j\,,\\ t_{ij}(\delta) &= B \quad \text{pro} \quad i < j\,. \end{aligned}$$

Protože $\lim_{\delta \to 0} T(\delta) = T(0)$, je $t_{ij}(0) = 0$ pro $i > j$, takže čísla $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ jsou vlastními čísly matice $T(0)$. Označíme-li $\Omega_1(\delta), \Omega_2(\delta), \dots, \Omega_n(\delta)$ vlastní čísla matice $T(\delta)$, platí $\lim_{\delta \to 0} \Omega_i(\delta) = \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Existuje tedy číslo $\delta_0 > 0$, $0 < \delta_0 \leqq \varepsilon$, že $|\Omega_i(\delta_0) - \omega_i| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$. Protože $\bigcap_{i=1}^{n} \langle \omega_i - \varepsilon, \omega_i + \varepsilon \rangle = \emptyset$, je $\Omega_i(\delta_0) \neq \Omega_j(\delta_0)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Matice $T(\delta_0)$ má tedy vzájemně různá nezáporná vlastní čísla menší než 1.

Nyní dokážeme, že existuje číslo $0 < \lambda \leqq \mu$ takové, že $\Delta(x, y) \ll T(\delta_0)$[7]) pro všechna $x \in K[z, \lambda]$, $y \in K[z, \lambda]$. Označme $\Delta(x, y) = (d_{ij}(x, y))$, $\Delta(x) = (d_{ij}(x))$. Zřejmě je $\Delta(x, x) = \Delta(x)$. Existuje tedy $0 < \lambda \leqq \mu$, že $\|\Delta(x, y) - \Delta(x)\| < \delta_0$ pro $x \in K[z, \lambda]$, $y \in K[z, \lambda]$, takže $|d_{ij}(x, y) - d_{ij}(x)| < \delta_0$. Protože $d_{ij}(x) = 0$ pro

[7]) Je-li $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $b_{ij} \geqq 0$, pak definujeme $A \ll B \Leftrightarrow |a_{ij}| \leqq b_{ij}$ (viz např. [2]). Zřejmě platí a) $(A \ll B,\ C \ll D) \Rightarrow AC \ll BD$; b) $A \ll B \Rightarrow \|A\| \leqq \|B\|$.

$i > j$, je pro $i > j$ $|d_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < \delta_0$. Dále je $d_{ii}(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takže $|d_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \lambda_i(\mathbf{x})| < \delta_0$. Platí tedy

$$|d_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < |\lambda_i(\mathbf{x})| + \delta_0 \leqq |\lambda_i(\mathbf{x})| + \varepsilon \leqq \omega_i .$$

Protože $0 < \lambda \leqq \mu$, je $|d_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqq B$ pro $i < j$. Je tedy $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \preccurlyeq \mathbf{T}(\delta_0)$, což jsme měli dokázat.

Nyní již můžeme dokázat tvrzení našeho lemmatu: Protože vlastní čísla matice $\mathbf{T}(\delta_0)$ jsou vzájemně různá, existuje matice $\mathbf{S}$ a diagonální matice Λ tak, že $\mathbf{T}(\delta_0) = \mathbf{S}^{-1}\Lambda\mathbf{S}$. Zvolme nyní libovolně body $\mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$, $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$, $\mathbf{x}_2 \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$, $\ldots$, $\mathbf{x}_\nu \in \mathrm{K}[\mathbf{z}, \lambda]$. Protože $\Delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) \preccurlyeq \mathbf{T}(\delta_0)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, je

$$\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})\, \Delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \ldots \Delta(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y}) \preccurlyeq \mathbf{T}^\nu(\delta_0) ,$$

takže

$$\|\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})\, \Delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \ldots \Delta(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{y})\| \leqq \|\mathbf{T}^\nu(\delta_0)\| = \\ = \|\mathbf{S}^{-1}\Lambda^\nu\mathbf{S}\| \leqq n^2\|\mathbf{S}^{-1}\|\, \|\mathbf{S}\|\, \|\Lambda^\nu\| .$$

Platí tedy

$$\|\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\, \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2)\, \mathbf{U}(\mathbf{y}) \ldots \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\| = \\ = \|\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\| \leqq n^2\|\mathbf{S}^{-1}\|\, \|\mathbf{S}\|\, \|\Lambda^\nu\| < \\ < Kq^\nu , \quad K = n^2\|\mathbf{S}^{-1}\|\, \|\mathbf{S}\| ,$$

neboť $\Lambda = \{\Omega_1(\delta_0), \ldots, \Omega_n(\delta_0)\}$, ale $\omega_i - \varepsilon < \Omega_i(\delta_0) < \omega_i + \varepsilon < q$. Tím je lemma 5 dokázáno.

Nyní budeme definovat iterační metodu takto: Je-li $\det(\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu)) \neq 0$, je

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{Q}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + (\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) , \tag{22}$$

kde

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) . \tag{22'}$$

Matice $\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu)$ a vektory $\mathbf{x}_{\nu+1}$, $\mathbf{x}_\nu$ jsou opět jako v části I reálné.

Z rovnic (22) a (22′) dostaneme dosazením rovnost

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu - (\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) . \tag{22''}$$

Poznámka 3. Metoda takto definovaná je zřejmě zobecněním iterační metody definované pomocí vztahů (2) a (2′).

Zaveďme ještě označení $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}))^{-1}$. Platí následující lemma:

Lemma 6. *Je-li* $\mathbf{a}$ *řešení soustavy* (1), *pak z* (22) *a* (22′) *plyne*

(23) a) $$\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu1}, \ldots \mathbf{p}_{\nu n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \\ - \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu1}, \ldots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) ,$$

kde $\mathbf{p}_{\nu k} = \xi_{\nu k}\mathbf{x}_\nu - (1 - \xi_{\nu k})\, \mathbf{a}$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

(24) b) $$\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu-1}) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu-1}) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i))(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu-1}) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1}) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}),$$

kde $\mathbf{p}_{ik} = \xi_{ik}\mathbf{x}_i - (1 - \xi_{ik})\,\mathbf{a}$, $0 < \xi_{ik} < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Důkaz. Z (22″) plyne

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu - \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)\,. \tag{25}$$

Protože $\mathbf{a}$ je řešením soustavy (1), plyne z věty o přírůstku funkce

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) + \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a})\,, \tag{26}$$

kde $\mathbf{p}_{\nu k} = \xi_{\nu k}\mathbf{x}_\nu - (1 - \xi_{\nu k})\,\mathbf{a}$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Z (25) a (26) plyne

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{a} &= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} - \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \\ &- \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} - \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n}))\,. \\ &.\,(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \\ &- \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu))(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_\nu)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{\nu1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a})\,,\end{aligned}$$

což je (23).

b) Platí

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{y}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{x}_i - \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i - \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{x}_i - \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_i)\,. \tag{27}$$

Podle věty o přírůstku funkce dostaneme

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)[\mathbf{F}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) + \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a})]\,, \tag{28}$$

kde $\mathbf{p}_{ik} = \xi_{ik}\mathbf{x}_i - (1 - \xi_{ik})\,\mathbf{a}$, $0 < \xi_{ik} < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Podle (28) je tedy

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_i) &= \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i))(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) + \\ &+ \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) = (\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) + \\ &+ \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)(\mathbf{F}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i))(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) + \\ &+ \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{Z}(\mathbf{p}_{i1}, \dots, \mathbf{p}_{in})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a})\,.\end{aligned} \tag{29}$$

Z (22) plyne zřejmě

$$\mathbf{x}_\nu = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu-1}) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu-1}) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1})\,\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{y}(\mathbf{x}_i)\,. \tag{30}$$

Z (30), (27) a (29) postupně plyne

$$\begin{aligned}
x_\nu - a &= A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_0)\, x_0 + \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, y(x_i) - a = \\
&= A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_0)\, x_0 + \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_i - A(x_i)\, x_i - \\
&- B(x_i)\, z(x_i)) - a = A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_0)\, x_0 + \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, x_i - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_i)\, x_i - \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, z(x_i) - a = \\
&= \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, x_i - \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, x_{i+1} - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, z(x_i) - a = \\
&= x_{\nu-1} - a + \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_i - x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\,. \\
&.\, B(x_i)\, z(x_i) = x_{\nu-1} - a + \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_i - a) - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_{i+1} - a) - \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, z(x_i) = \\
&= x_{\nu-1} - a + \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_i - a) - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_{i+1} - a) - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})[x_i - a - A(x_i)(x_i - a) + B(x_i)(F(p_{i1}, \ldots, p_{in}) - \\
&- F(x_i))(x_i - a) + B(x_i)\, Z(p_{i1}, \ldots, p_{in})(x_i - a)] = \\
&= x_{\nu-1} - a + \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_i - a) - \sum_{i=0}^{\nu-2} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\,. \\
&.\, (x_{i+1} - a) - \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})(x_i - a) + \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_i)(x_i - a) - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)(F(p_{i1}, \ldots, p_{in}) - F(x_i))(x_i - a) - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, Z(p_{i1}, \ldots, p_{in})(x_i - a) = \\
&= A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_0)(x_0 - a) - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)(F(p_{i1}, \ldots, p_{in}) - F(x_i))(x_i - a) - \\
&- \sum_{i=0}^{\nu-1} A(x_{\nu-1}) \ldots A(x_{i+1})\, B(x_i)\, Z(p_{i1}, \ldots, p_{in})(x_i - a)\,.
\end{aligned}$$

Tím je lemma 6 dokázáno.

Lemma 7. *Buď $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$ unitární matice, $\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\nu)\| \leqq b$. Potom platí*

$$(31)\quad \text{a)}\ \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a}\| \leqq n^3\|\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu)\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\|\,\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\| + n^2 b\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\nu)\|\,\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\| + n^2 b\|\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n})\|\,\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|\,,$$

kde $\boldsymbol{p}_{\nu k} = \xi_{\nu k}\boldsymbol{x}_\nu - (1 - \xi_{\nu k})\,\boldsymbol{a}$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

$$(32)\quad \text{b)}\ \|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\| \leqq n^3\|\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{\nu-1})\ldots\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\|\,\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}\| + n^5 b\sum_{i=0}^{\nu-1}\|\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{\nu-1})\ldots\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{i+1})\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\|\,\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{in}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i)\|\,\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}\| + n^5 b\sum_{i=0}^{\nu-1}\|\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{\nu-1})\ldots\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{i+1})\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\|\,\|\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{in})\|\,\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}\|\,,$$

kde $\boldsymbol{p}_{ik} = \xi_{ik}\boldsymbol{x}_\nu - (1 - \xi_{ik})\,\boldsymbol{a}$, $0 < \xi_{ik} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz. a) Z lemmatu 6 (rovnice (23)) plyne

$$\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu)\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\nu)(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\nu))(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\nu)\,\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n})(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a})\,,$$

kde $\boldsymbol{p}_{\nu k} = \xi_{\nu k}\boldsymbol{x}_\nu - (1 - \xi_{\nu k})\boldsymbol{a}$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Protože matice $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$ je unitární, platí $\|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\| \leqq 1$, $\|\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\| \leqq 1$, a tedy

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a}\| \leqq n^3\|\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu)\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\|\,\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\| + n^2 b\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\nu)\|\,.\,\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\| + n^2 b\|\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{p}_{\nu1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu n})\|\,\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|\,,$$

což je (31).

b) Nerovnost (32) dokážeme obdobným způsobem z (24).

Věta 2. *Buď $\boldsymbol{a}$ řešení soustavy (1) a μ kladné číslo. Pro každé $\boldsymbol{x} \in K[\boldsymbol{a}, \mu]$, $\boldsymbol{u} \in K[\boldsymbol{a}, \mu]$ nechť je $\det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, matice $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ positivně definitní symetrická, $\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\| \leqq b$ a nechť $|F_{kj}(\boldsymbol{x}) - F_{kj}(\boldsymbol{u})| \leqq M_1$,[8] $|\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\boldsymbol{x})\,f_i(\boldsymbol{x})| \leqq M_2$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom existují čísla λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ a unitární matice $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$, že pro libovolné body $\boldsymbol{y} \in K[\boldsymbol{a}, \lambda]$, $\boldsymbol{x}_i \in K[\boldsymbol{a}, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, platí nerovnost $\|\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1)\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_2)\ldots\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_\nu)\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})\| \leqq Kq^\nu$. Je-li $bn^5\left(1 + \dfrac{Kq}{1-q}\right).\,(M_1 + M_2) < 1$, buď ν_0 přirozené číslo takové, že platí*

$$(33)\qquad n^3Kq^{\nu_0} + bn^5\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2) < 1$$

a $\boldsymbol{x}_0 \in K[\boldsymbol{a}, \lambda]$, pro něž

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}\| \leqq \frac{\lambda}{2(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}}\,.$$

---

[8]) Protože $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ je symetrická, stačí předpokládat $|F_{kj}(\boldsymbol{x}) - F_{kj}(\boldsymbol{u})| \leqq M_1$ pro $k \leqq j$.

Posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definovaná vztahy* (22), (22′) *pak konverguje a je* $\lim_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. *Pro chybu platí tyto odhady*:

$$(33') \quad a) \qquad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2) \right] \delta_l ,$$

kde $\delta_l = \max_{i=(k-1)\nu_0,\ldots,k\nu_0-1} \delta_i$, $k = 1, 2, \ldots$;

$$(33'') \quad b) \qquad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2) \right]^k \delta_m ,$$

kde $\delta_m = \max_{i=0,\ldots,\nu_0-1} \delta_i$, $k = 1, 2, \ldots$.

Důkaz. Položíme-li $\mathbf{z} = \mathbf{a}$, existuje podle lemmatu 5 číslo λ, $0 < \lambda \leqq \mu$ a čísla K, q, $0 < K$, $0 < q < 1$, že pro libovolné body $\mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ platí nerovnost

$$\| \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y}) \| \leqq K q^\nu ,$$

kde $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ je jistá unitární matice.

I. Buď ν_0 přirozené číslo, pro něž platí

$$P = n^3 K q^{\nu_0} + b n^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2) < 1 .$$

(Takové číslo ν_0 vždy existuje, pokud μ zvolíme dostatečně malé.)

Zvolme nyní $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$ takové, že

$$\| \mathbf{x}_0 - \mathbf{a} \| \leqq \frac{\lambda}{2(n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}} .$$

Dokážeme, že $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1$. Protože $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$ a tedy i $\mathbf{p}_{0k} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $k = 1, \ldots, n$, $\| \mathbf{F}(\mathbf{p}_{01}, \ldots, \mathbf{p}_{0n}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \| \leqq M_1$, $\| \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{01}, \ldots, \mathbf{p}_{0n}) \| \leqq M_2$, platí podle (31) (lemma 7)

$$(34) \qquad \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{a} \| \leqq (n^3 K q + b n^2 M_1 + b n^2 M_2) \| \mathbf{x}_0 - \mathbf{a} \| ,$$

takže

$$\delta_1 \leqq (n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2))\, \delta_0 \leqq$$

$$\leqq (n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2)) \frac{\lambda}{2(n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2(n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2))^{\nu_0 - 2}} .$$

Je-li

$$n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2) \geqq 1 , \quad \text{je} \quad \frac{\lambda}{2(n^3 K q + b n^2 (M_1 + M_2))^{\nu_0 - 2}} \leqq \frac{\lambda}{2} ,$$

takže $\delta_1 \leqq \frac{1}{2}\lambda$. Je tedy $\mathbf{x}_1 \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$. Je-li $n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2) < 1$, je podle (34) $\delta_1 \leqq \delta_0$ a tedy $\mathbf{x}_1 \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$. Přitom je

$$\delta_1 \leqq \frac{\lambda}{2(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2))^{\nu_0 - 2}}.$$

Stejným způsobem postupujeme dále. Předpokládejme, že jsme již dokázali, že

$$\mathbf{x}_i \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0 - 2, \quad \delta_i \leqq \frac{\lambda}{2(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2))^{\nu_0 - i - 1}}.$$

Podle lemmatu 7 platí

$$\|\mathbf{x}_{\nu_0 - 1} - \mathbf{a}\| \leqq (n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2))\|\mathbf{x}_{\nu_0 - 2} - \mathbf{a}\|,$$

čili

$$\delta_{\nu_0 - 1} \leqq (n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2))\, \delta_{\nu_0 - 2} \leqq$$
$$\leqq (n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2)) \frac{\lambda}{2(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2))} = \frac{\lambda}{2}.$$

Je tedy $\mathbf{x}_{\nu_0 - 1} \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$. Tím jsme dokázali, že $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1$.

II. Nyní dokážeme úplnou indukcí, že $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $\nu \geqq \nu_0$. Protože $\mathbf{x}_i \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $i = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1$, platí podle předpokladu a (32) (lemma 7)

$$\delta_{\nu_0} \leqq [n^3Kq^{\nu_0} + bn^5(1 + \sum_{i=0}^{\nu_0 - 2} Kq^{\nu_0 - i - 1})(M_1 + M_2)] \frac{\lambda}{2} <$$
$$< \left[n^3Kq^{\nu_0} + bn^5 \left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2)\right] \frac{\lambda}{2} < \frac{\lambda}{2}.$$

Je tedy $\mathbf{x}_{\nu_0} \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$ pro $\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots, \nu_0 + i - 1$. Podle lemmatu 7 pak platí

$$\delta_{\nu_0 + i} \leqq \left[n^3Kq^{\nu_0 + i} + bn^5 \left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2)\right] \frac{\lambda}{2} < \frac{\lambda}{2},$$

neboť $q^{\nu_0 + i} < q^{\nu_0}$ pro $i > 1$. Tím jsme dokázali, že $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

III. Nyní dokážeme, že $\lim_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. Pro $\nu > \mu$ zřejmě platí (viz lemma 6)

(35)
$$\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu - 1}) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\mu)(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{a}) -$$
$$- \sum_{i=\mu}^{\nu - 1} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu - 1}) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1})\, \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{i1}, \ldots, \mathbf{p}_{in})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}) -$$
$$- \sum_{i=\mu}^{\nu - 1} \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\nu - 1}) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1})\, \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)\, \mathbf{Z}(\mathbf{p}_{i1}, \ldots, \mathbf{p}_{in})(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}),$$

kde $\mathbf{p}_{ik} = \xi_{ik}\mathbf{x}_i - (1 - \xi_{ik})\, \mathbf{a}$, $0 < \xi_{ik} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Protože $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\boldsymbol{a}, \lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, platí podle (35), položíme-li $\nu = k\nu_0$, $\mu = (k-1)\nu_0$

$$\delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3 K q^{\nu_0} + bn^5 \left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)(M_1 + M_2)\right] \delta_{l_1} = P\delta_{l_1}\,, \quad 0 < P < 1\,,$$

kde $\delta_{l_1} = \max\limits_{i=(k-1)\nu_0,\ldots,k\nu_0-1} \delta_i$ (odhad a)). Stejně dokážeme podle (35)

$$\delta_{l_1} \leqq P\delta_{l_2}\,, \quad \text{kde} \quad \delta_{l_2} = \max_{i=l_1-\nu_0,\ldots,l_1-1} \delta_i\,,$$

$$\delta_{l_2} \leqq P\delta_{l_3}\,, \quad \text{kde} \quad \delta_{l_3} = \max_{i=l_2-\nu_0,\ldots,l_2-1} \delta_i\,, \quad \text{atd.}$$

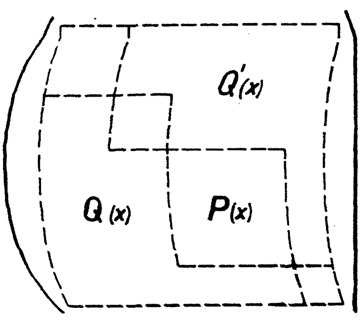
Nejvýše po $k\nu_0$ krocích dospějeme k nerovnosti $\delta_{l_{i-1}} \leqq P\delta_{l_i}$, kde l_i je jedno z čísel $0, 1, \ldots, \nu_0 - 1$ a tedy $\delta_{l_i} \leqq \delta_m$, kde $\delta_m = \max\limits_{i=0,\ldots,\nu_0-1} \delta_i$. Platí tedy

$$\delta_{k\nu_0} \leqq P\delta_{l_1} \leqq P^2\delta_{l_2} \leqq \ldots \leqq P^{i-1}\delta_{l_{i-1}} \leqq P^i\delta_{l_i} \leqq P^i\delta_m\,.$$

Protože je však zřejmě $i \geqq k$, takže $P^i \leqq P^k$, dostáváme $\delta_{k\nu_0} \leqq P^k\delta_m$, $k = 1, 2, \ldots$ (odhad b)), a tedy $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{k\nu_0} = 0$, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_{k\nu_0} = \boldsymbol{a}$. Vybraná posloupnost $\{\mathbf{x}_{k\nu_0}\}_{k=0}^{\infty}$ tedy konverguje k $\boldsymbol{a}$. Nyní dokážeme, že posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ nemá kromě bodu $\boldsymbol{a}$ žádný jiný hromadný bod. Buď $\boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{a}$ hromadným bodem posloupnosti $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$. Zvolme nyní číslo λ' tak, aby $0 < \lambda' \leqq \lambda$ a aby $\boldsymbol{a}' \notin \mathsf{K}[\boldsymbol{a}, \lambda']$. Protože $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_{k\nu_0} = \boldsymbol{a}$, existuje číslo k_0, že

$$\delta_{k_0\nu_0} \leqq \frac{\lambda'}{2(n^3Kq + bn^2(M_1 + M_2))} \quad \text{a} \quad \mathbf{x}_{k_0\nu_0} \in \mathsf{K}[\boldsymbol{a}, \lambda']\,.$$

Stejným způsobem jako v části I a II tohoto důkazu lze nyní dokázat, že $\mathbf{x}_\nu \in \mathsf{K}[\boldsymbol{a}, \lambda']$, $\nu = k_0\nu_0, k_0\nu_0 + 1, k_0\nu_0 + 2, \ldots$. Protože $\boldsymbol{a}' \notin \mathsf{K}[\boldsymbol{a}, \lambda]$, nemůže být $\boldsymbol{a}'$ hromadným bodem posloupnosti $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, což je spor. Je tedy $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \boldsymbol{a}$.



Obr. 1.

Poznámka 4. Z věty 2 zvláště vyplývá, že je-li *v jistém okolí řešení* $\boldsymbol{a}$ soustavy (1) det $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ a $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ positivně definitní, pak posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ definovaná vztahy (22) a (22′) vždy konverguje, je-li $\|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{a}\| \leqq \mu$, kde μ je dostatečně malé kladné číslo.

Poznámka 5. Položíme-li v (22) a (22′) $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$, obdržíme iterační metodu zkoumanou v části I. Požadavek, aby $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ byla positivně definitní je v důsledku positivní definitnosti matice $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ splněn automaticky. Podobná situace nastane, jestliže matici $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ rozložíme na bloky. Přitom matice $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ je příslušná blokově diagonální matice a matice $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ je příslušná „blokově trojúhelníková“ matice tvořená bloky, ležícími pod diagonálou (viz obr. 1). Z positivní definitnosti matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ i v tomto případě již plyne, že matice $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ je positivně definitní (neboť je složena pouze z hlavních minorů matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

III

Nyní se ještě zmíníme o jisté modifikaci iterační metody definované pomocí (22) a (22'), která v některých případech usnadňuje výpočet.

Matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ vznikla jako součin transponované matice k funkční matici soustavy (1) a této funkční matice, takže je symetrická a positivně semidefinitní. Symetrie a positivní definitnost matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ měly podstatný význam při důkazu konvergence iterační metody definované pomocí (22) a (22'). Někdy se však může stát, že sama funkční matice soustavy (1) se již symetrická a positivně definitní. To nastane např. při výpočtu extrémů funkcí n reálných proměnných. V tomto případě můžeme postupovat jednodušeji. Mějme totiž dánu funkci $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Při výpočtu extrémů hledáme ty body $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, ve kterých je $\frac{\partial v}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Označíme-li nyní

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x})\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}) = v_{ij}(\mathbf{x})\,,$$

vidíme, že se jedná o výpočet reálných řešení soustavy nelineárních rovnic n neznámých

$$v_1(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ v_2(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ \ldots,\ v_n(x_1, \ldots, x_n) = 0\,. \tag{36}$$

Funkční maticí této soustavy je matice

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_{11}(\mathbf{x}), & v_{12}(\mathbf{x}), & \ldots, & v_{1n}(\mathbf{x}) \\ v_{21}(\mathbf{x}), & v_{22}(\mathbf{x}), & \ldots, & v_{2n}(\mathbf{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}(\mathbf{x}), & v_{n2}(\mathbf{x}), & \ldots, & v_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Jsou-li funkce v_{ij} v okolí řešení $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ spojité, jsou parciální derivace záměnné a matice $\mathbf{V}(\mathbf{a})$ je symetrická. Platí přitom, že je-li matice $\mathbf{V}(\mathbf{a})$ positivně definitní, má funkce v v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum. Dá se tedy očekávat, že matice $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ bude mít vlastnosti jako měla matice $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Položíme-li $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}'(\mathbf{x})$, můžeme definovat iteraci rovnostmi obdobnými vztahům (22) a (22'): Je-li $\det(\mathbf{S}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_\nu)) \neq 0$, je

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{S}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{T}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + (\mathbf{S}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)\,, \tag{37}$$

kde

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)\,. \tag{37'}$$

Přitom značí

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}_\nu) \\ v_2(\mathbf{x}_\nu) \\ \dots\dots \\ v_n(\mathbf{x}_\nu) \end{pmatrix}.$$

Snadno se dokáže, že takto definovaná iterace konverguje, jsou-li matice $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ positivně definitní symetrické v okolí řešení $\mathbf{a}$. Důkaz se provádí formálně stejně jako důkaz věty 2 pomocí lemmat 3, 4, 5, 6 a 7, klademe-li všude $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})$. Protože však podle věty o přírůstku funkce nyní platí $\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{V}(\mathbf{p}_{\nu 1}, \dots, \mathbf{p}_{\nu n})(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a})$ (viz 26), $\mathbf{p}_{\nu k} = \xi_{\nu k}\mathbf{x}_\nu - (1 - \xi_{\nu k})\,\mathbf{a}$, $0 < \xi_{\nu k} < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$ (neboť $v_k(\mathbf{x}_\nu) = \sum_{i=1}^{n} v_{ki}(\mathbf{p}_{\nu k})(x_{\nu,i} - a_i)$), musíme všude v lemmatu 6 a 7 klást $\mathbf{Z}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = 0$. Věta 2 pak zní takto:

Věta 2'. *Buď $\mathbf{a}$ řešení soustavy (36) a μ kladné číslo. Pro každé $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \mu]$, $\mathbf{u} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \mu]$ nechť je matice $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ positivně definitní, matice $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ positivně definitní symetrická, $\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \leqq b$[9]) a nechť $|v_{kj}(\mathbf{x}) - v_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1$ pro každé $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $k \leqq j$. Potom existují čísla λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ a unitární matice $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, že pro libovolné body $\mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, platí nerovnost $\|\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \dots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\| \leqq Kq^\nu$. Je-li $bn^5M_1\left(1 + \dfrac{Kq}{1-q}\right) < 1$, buď ν_0 přirozené číslo takové, že platí*

$$n^3Kq^{\nu_0} + bn^5M_1\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right) < 1 \tag{38}$$

a $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, pro něž

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| \leqq \frac{\lambda}{2(n^3Kq + bn^2M_1)^{\nu_0 - 1}}.$$

Posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ definovaná vztahy (37) a (37') pak konverguje a je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. Pro chybu platí odhady:

$$\text{(38') a)} \qquad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3Kq^{\nu_0} + bn^5M_1\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)\right]\delta_l\,,$$

kde $\delta_l = \max\limits_{i=(k-1)\nu_0, \dots, k\nu_0 - 1} \delta_i$, $k = 1, 2, \dots$;

$$\text{(38'') b)} \qquad \delta_{k\nu_0} \leqq \left[n^3Kq^{\nu_0} + bn^5M_1\left(1 + \frac{Kq}{1-q}\right)\right]^k \delta_m\,,$$

kde $\delta_m = \max\limits_{i=0, \dots, \nu_0 - 1} \delta_i$, $k = 1, 2, \dots$.

---

[9]) $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}))^{-1}$.

Literatura

[1] *В. Н. Фаддеева:* Вычислительные методы линейной алгебры. Москва, Ленинград, 1950.

[2] *L. Mirsky*: An Introduction to Linear Algebra. Oxford 1955.

[3] *E. Reich*: On the Convergence of the Classical Iterative Method of Solving Linear Simultaneous Equations. Ann. Math. Stat. *XX*, No 3, 1949, 448—451.

[4] *A. S. Householder*: Principles of Numerical Analysis. New York, Toronto, London, 1953.

[5] *M. Šisler*: O konvergenci iteračních metod řešení soustavy nelineárních rovnic. Apl. Mat. *5*, 1960, 141—150.

Резюме

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, I

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР, (Miroslav Šisler), Прага

В этой первой части работы доказываются некоторые достаточные условия для сходимости одного итерационного метода для вычисления действительного решения систем n нелинейных уравнений с n неизвестными. Пусть задана система (1), где функции f_i действительных переменных, имеющие непрерывные первые и вторые частные производные $(f_{i,j}(\mathbf{x}), f_{i,jk}(\mathbf{x}))$ в окресности какого-нибудь действительного решения. $(\nu + 1)$-ая апроксимация при исследованном итерационном методе определяется формулой $\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{Q}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + (\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)$, где $\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)$. При этом имеет место равенство $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$, $[\mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ есть транспонированная матрица к матрице $\mathbf{Q}(\mathbf{x})]$, где симметрическая матрица $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_{ij}(\mathbf{x}))$ определяется таким образом: $F_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_{k,i}(\mathbf{x})\, f_{k,j}(\mathbf{x})$. Далее, значит,

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad F_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_{k,i}(\mathbf{x})\, f_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Если в частности $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (p_{ij}(\mathbf{x}))$, где $p_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ $(i \neq j)$, $p_{ii}(\mathbf{x}) = F_{ii}(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, далее $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (q_{ij}(\mathbf{x}))$, где $q_{ij}(\mathbf{x}) = -F_{ij}(\mathbf{x})$ $(i > j)$, $q_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ $(i \leqq j)$ и если мы обозначим через $\mathsf{K}[\mathbf{z}, \mu]$ множество тех точек $\mathbf{x} = (x_i)$, для которых

$$\max_{i=1,\ldots,n} |z_i - x_i| \leqq \frac{\mu}{2} \left(\mathbf{z} = (z_i),\ \mu > 0\right),$$

то определеный таким образом метод соответствует известному итерационному методу Зейделя для решения систем линейных уравнений и имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\lambda > 0$. *Для всех* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *пусть имеет место неравенство* $0 < m \leqq F_{ii}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *далее условия* (13), *и пусть* $q_{i,1} + q_{i,2} < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Для любых* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *и* k, $j = 1, 2, \ldots, n$ *пусть далее имеют место оценки*

$$|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{y})| \leqq M_1\ (k \leqq j)\,, \quad |\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})| \leqq M_2\,.$$

Пусть затем

$$R = \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{q_{i,2} + \dfrac{n(M_1 + M_2)}{m}}{1 - q_{i,1}} < 1\,, \quad \frac{d_0}{1 - R} \leqq \lambda\,.$$

Тогда существует точка $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *такая, что последовательность аппроксимаций* $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, *определенная сверху, сходится и* $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. *Точка* $\mathbf{a}$ *является тогда единственным решением системы* (1) *в* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Для погрешности имеет место оценка* $\delta_{\nu+1} \leqq R\delta_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. (*При этом* $\delta_\nu = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu,i} - a_i|$.)

В случае общего разложения матрицы $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ввиду $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{a}$ — *решение системы* (1) *и* μ — *положительное число. Для каждого* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \mu]$, $\mathbf{u} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \mu]$ *пусть* $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, *матрица* $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ *положительно определена,* $\|(\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}))^{-1}\| \leqq b$ *и пусть*

$$|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1\ (k \leqq j)\,, \quad |\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})| \leqq M_2$$

для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда существуют числа* λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ *и унитарная матрица* $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, *что для любых точек*

$$\mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]\,, \quad \mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]\,, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

имеет место неравенство

$$\|\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\| \leqq Kq^\nu\,.$$

Если

$$bn^5 \left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2) < 1\,,$$

пусть ν_0 — *натуральное число такое, что имеет место неравенство*

$$n^3 K q^{\nu_0} + bn^5 \left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2) < 1$$

и точка $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, *для которой*

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| < \frac{\lambda}{2(n^3 Kq + bn^2(M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}}\,.$$

Последовательность $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *тогда сходится и* $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. *Для погрешности имеют место оценки* (33′) *и* (33″).

В абзаце III показана одна модификация сверху определеного итерационного метода для вычисления экстремов функций n действительных переменных $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ищутся при этом действительные решения системы уравнений вида $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если мы обозначим $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ и положим $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}'(\mathbf{x})$, определяется итерационный метод формулой

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{S}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{T}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + (\mathbf{S}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu),$$

где $\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)$. При этом значит

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\nu) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\nu) \end{bmatrix}.$$

Для определеной таким способом итерации доказана теорема аналогическая теореме 2 (теорема 2′).

Дальнейшие свойства рассматриваемого итерационного метода и его вычислительная эффективность будут исследованы во второй части этой статьи.

Zusammenfassung

ÜBER EIN ITERATIONSVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG DER SYSTEME NICHTLINEARER GLEICHUNGEN, I

Miroslav Šisler, Praha

In diesem ersten Teil der Arbeit sind ausreichende Bedingungen für die Konvergenz eines Iterationsverfahrens für die Berechnung der reellen Lösung der Systeme nichtlinearer Gleichungen mit n Unbekannten bewiesen.

Sei das System (1) gegeben. Hier f_i sind die reellen Funktionen der n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche in der Umgebung einer gewissen reellen Lösung stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung $f_{i,j}(\mathbf{x}), f_{i,kj}(\mathbf{x})$ haben.

Die $(\nu + 1)$-te Approximation bei unserem Iterationsverfahren wird mit Hilfe der Formel

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{Q}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + (\mathbf{P}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)$$

definiert, wo $\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_\nu)\mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)$ gilt. Dabei gilt die Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$, [$\mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ bezeichnet die transponierte Matrix zur Matrix $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$], wobei die symmetrische Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_{ij}(\mathbf{x}))$ so definiert wird: $F_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_{k,i}(\mathbf{x}) f_{k,j}(\mathbf{x})$. Ferner ist

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{wo} \quad F_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_{k,i}(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Falls speziell $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (p_{ij}(\mathbf{x}))$, wo $p_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ $(i \neq j)$, $p_{ii}(\mathbf{x}) = F_{ii}(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt, ferner $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (q_{ij}(\mathbf{x}))$, wo $q_{ij}(\mathbf{x}) = -F_{ij}(\mathbf{x})$ $(i > j)$, $q_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ $(i \leqq j)$ gilt, und falls wir mit $\mathsf{K}[\mathbf{z}, \mu]$ die Menge der Punkte $\mathbf{x} = (x_i)$, für die

$$\max_{i=1,\ldots,n} |z_i - x_i| \leqq \frac{\mu}{2} \quad (\mathbf{z} = (z_i),\ \mu > 0)$$

gilt, bezeichnen, dann entspricht das so definierte Verfahren dem bekannten Seidel-Iterationsverfahren für die Lösung der Systeme linearer Gleichungen und es gilt folgender Satz:

Satz 1. *Sei $\lambda > 0$. Für alle $\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ sollen die Ungleichung $0 < m \leqq F_{ii}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ferner die Bedingungen (13) und die Ungleichungen $q_{i,1} + q_{i,2} < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ gelten. Für beliebige $\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, $\mathbf{y} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ und $k, j = 1, 2, \ldots, n$ sollen ferner die Abschätzungen*

$$|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{y})| \leqq M_1 \ (k \leqq j), \quad |\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})| \leqq M_2$$

gelten. Sei ferner

$$R = \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{q_{i,2} + \dfrac{n(M_1 + M_2)}{m}}{1 - q_{i,1}} < 1, \quad \frac{d_0}{1 - R} \leqq \lambda.$$

Dann existiert der Punkt $\mathbf{a} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, dass die oben definierte Folge der Approximationen $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ konvergiert und $\lim_{\nu\to\infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$ ist. Der Punkt $\mathbf{a}$ ist dann die einzige Lösung des Systems (1) in $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Es gilt dann die Fehlerabschätzung $\delta_{\nu+1} \leqq R\delta_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ (Dabei ist $\delta_\nu = \max_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu,i} - a_i|$.)

Im Falle der allgemeinen Zerlegung der Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}'(\mathbf{x})$ gilt dieser Satz:

Satz 2. *Sei $\mathbf{a}$ die Lösung des Systems (1) und μ eine positive Zahl. Für jeden $\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \mu]$ und jeden $\mathbf{u} \in \mathsf{K}[\mathbf{a}, \mu]$ seien:* det $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq 0$, *die Matrix $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ positiv definit, $\|(\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})^{-1}\| \leqq b$ und*

$$|F_{kj}(\mathbf{x}) - F_{kj}(\mathbf{u})| \leqq M_1 \ (k \leqq j), \quad |\sum_{i=1}^{n} f_{i,kj}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})| \leqq M_2$$

für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Dann existieren die Zahlen* λ, K, q, $0 < \lambda \leqq \mu$, $0 < K$, $0 < q < 1$ *und die unitare Matrix* $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, *dass für beliebige Punkte* $\mathbf{y} \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ *die Ungleichung*

$$\|\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{y})\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) \ldots \mathbf{A}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{U}(\mathbf{y})\| \leqq Kq^\nu$$

gilt. Falls

$$bn^5 \left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2) < 1\,,$$

sei ν_0 *eine solche natürliche Zahl, so dass die Ungleichung*

$$n^3 K q^{\nu_0} + bn^5 \left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right)(M_1 + M_2) < 1$$

gilt, und sei $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{K}[\mathbf{a}, \lambda]$ *der Punkt, für den*

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| < \frac{\lambda}{2(n^3 Kq + bn^2(M_1 + M_2))^{\nu_0 - 1}}$$

gilt. Dann konvergiert die Folge $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *und ist* $\lim_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. *Es gelten die Fehlerabschätzungen* (33') *und* (33'').

Im Absatz III wird eine Modifikation des oben definierten Iterationsverfahrens für die Berechnung der Extremen der Funktionen der n reellen Veränderlichen $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gezeigt. Dabei sucht man die reellen Lösungen des Systems der Gleichungen $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Falls wir $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ bezeichnen und $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}'(\mathbf{x})$ setzen, so definieren wir das Iterationsverfahren mit Hilfe der Formel

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{S}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{T}'(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu + (\mathbf{S}(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_\nu))^{-1}\, \mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu)\,,$$

wo $\mathbf{y}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_\nu)\, \mathbf{x}_\nu - \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu)$ ist. Dabei ist

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x_1}(\mathbf{x}_\nu) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_n}(\mathbf{x}_\nu) \end{bmatrix}.$$

Für die so definierte Iteration ist der mit dem Satz 2 analoge Satz bewiesen (Satz 2').

Weitere Eigenschaften unseres Iterationsverfahrens und seine numerische Wirksamkeit werden im zweiten Teil dieser Arbeit untersucht werden.