Anton Kotzig

Об основах графов порядка высшего, чем первого

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 288--307

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117378`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

ОБ ОСНОВАХ ГРАФОВ ПОРЯДКА ВЫСШЕГО, ЧЕМ ПЕРВОГО

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 2/II 1960 г.)

Работа посвящена основам k-го порядка, причем основой k-ого порядка графа G разумеется минимальный связный подграф графа G, содержащий все вершины из G, который останется связным и после устранения менее чем k его произвольных ребер. Выводится необходимое и достаточное условие для существования основы k-го порядка в данном конечном графе и указывается также метод для нахождения ее. Указываются возможности использования полученных результатов при решении некоторых проблем, встречающихся при отыскивании наилучших систем связи.

1

В настоящей работе под графом всегда подразумевается конечный граф.[1]) Прежде чем приступить к собственной проблематике работы, напомним некоторые для дальнейших исследований необходимые и, может быть, менее известные понятия и сведения. *Степень связности между вершинами графа* определим следующим образом:[2])

Пусть G — произвольный граф, содержащий по крайней мере две вершины. Пусть u, v — две произвольные вершины из G и пусть k — некоторое натуральное число.

I. Мы говорим, что связность между вершинами u, v графа G имеет степень k тогда и только тогда, если: в графе G имеется такое множество ребер $\overline{H}$, содержащее k ребер, что вследствие удаления всех его ребер из графа G возникнет граф G', в котором вершины u, v не связаны;[3]) если же из графа G удалим про-

[1]) С основными понятиями теории графов может читатель познакомиться по книге Д. Кенига [1]; определения и основные свойства употребляемых здесь понятий читатель найдет и в некоторых работах автора, например [2], [3], [4].

[2]) См. работы [2] и [3].

[3]) Мы говорим, что вершины $u \neq v$ в графе G связаны (соотв. не связаны), если существует (соотв. не существует) в графе G путь, концами которого служат вершины u, v. Вершина u всегда связана сама с собой.

извольных $k - 1$ ребер, то всегда возникнет граф, в котором вершины u, v связаны. То обстоятельство, что связность между вершинами u, v в графе G является степени k, будем записывать следующим образом: $\sigma_G(u, v) = k$.

II. Потому что вершина u всегда связана сама с собой, даже после того, когда мы устраним из графа G сколько угодно ребер, мы полагаем всегда $\sigma(u, u) = \infty$.

III. Если вершины u, v в графе G не связаны, полагаем $\sigma_G(u, v) = 0$. Таким образом для каждой пары вершин графа G определено значение функции $\sigma_G(u, v)$ которую назовем степенью связности между вершинами u, v.

Понятие степени связности позволяет для произвольного натурального числа k определить бинарное отношение $(\mathbf{k})$ на множестве вершин графа G следующим образом: вершины $u, v \in G$ находятся в графе G в отношении $(\mathbf{k})$ (будем писать: $u(\mathbf{k})\, v$) именно тогда, если $\sigma_G(u, v) \geqq k$. В работе [2] доказано, что отношение $(\mathbf{k})$ является при любом натуральном k отношением эквивалентности. Поэтому для произвольного натурального k существует точно одно разбиение $U_G^{(k)}$ множества всех вершин графа G на классы вершин такое, что две вершины из G принадлежат одному и тому же классу разбиения $U_G^{(k)}$ именно тогда, когда они находятся в отношении $(\mathbf{k})$.

На множестве H_G всех ребер графа G определим функцию $\sigma_G(h)$ следующим образом: если h – произвольное ребро из H_G, соединяющее[4]) вершины u, v, то $\sigma_G(h) = \sigma_G(u, v)$. Определим, далее, для произвольного натурального числа k множество $H_G(k)$ так: ребро h из H_G принадлежит множеству $H_G(k)$ точно тогда, когда $\sigma_G(h) = k$.

В настоящей работе будем большей частью заниматься связными графами.

Подграф R графа G, несодержащий изолированных вершин, называется *сечением в графе* G (или *сечением графа* G), отделяющим вершины u, v если: 1. вследствие удаления всех ребер подграфа R из графа G возникнет граф G', в котором вершины u, v не связаны; 2. если удалим из графа G все ребра подграфа R за исключением одного, совершенно произвольного, то из графа G возникнет всегда граф, в котором вершины u, v связаны. Если некоторое сечение R графа G имеет k ребер, то мы говорим, что R есть *сечение мощности* k.

Известно,[5]) что после удаления всех ребер некоторого сечения R из графа G точно одна из компонент графа G распадается на две компоненты, остальные компоненты не изменятся. Две компоненты, на которые распадается компонента графа G после удаления всех ребер сечения R, называем „*берегами сечения*“. Имеет место следующее: произвольное ребро сечения R соединяет в графе

[4]) Мы говорим, что ребро h соединяет вершины $u \neq v$, если оно инцидентно вершинам u, v.

[5]) См. [3], стр. 10, лемма 1.

G вершины из различных берегов сечения R; все ребра произвольного сечения принадлежат одному и тому же члену графа G.[6])

Из определения степени связности между вершинами u, v вытекает следующее: если $\sigma_G(u, v) = k(u \neq v)$, то существует в G сечение мощности k, отделяющее вершины u, v, и не существует в G сечение мощности меньше k, которое отделяло бы вершины u, v.[7])

В литературе, посвященной теории графов, часто встречаемся с понятием *основы графа*. Основой связного графа G называется такой подграф S графа G, который (a) содержит все вершины из G; (b) является связным; (c) не содержит никакой окружности. Известно (см., например, [1]), что основа связного графа является минимальным связным подграфом, содержащим все его вершины, т. е. не существует собственный подграф основы, который содержал бы все вершины основы и был бы связным. В нашей работе будем заниматься таким подграфом G^* графа G, обладающим по крайней мере двумя вершинами, который имеет следующие свойства: (1) G^* содержит все вершины из G; (2) G^* является связным графом и после устранения меньше чем k произвольных ребер (k — данное натуральное число) останется всегда связным; (3) не существует собственный подграф графа G^*, который имел бы при данном свойства (1), (2). Подграф G^* графа G, обладающий свойствами (1), (2), (3) назовем *основой k-го порядка графа G*. Согласно этому, до сих пор изучаемую основу графа G следует называть: основа первого порядка графа G. Изолированную вершину не считаем основой.

2

Лемма 1. *Пусть k — какое-то натуральное число и пусть G_0 — связный граф, в котором $\sigma_{G_0}(h) \geqq k$ для всех ребер h из G_0. Пусть в G_0 существует по крайней мере одно ребро h_0, для которого $\sigma_{G_0}(h_0) > k$, и пусть G_1 представляет собой граф, возникший из G_0 в результате удаления ребра h_0. Тогда*: (α) *G_1 является связным графом*; (β) *$\sigma_{G_1}(h) \geqq k$ для любого ребра h из G.*

---

[6]) Определение члена графа обычно связано с бинарным отношением **O** на множестве ребер графа G, определенним следующим образом: ребра h_1, h_2 из G находятся в отношении **O**, если $R_1 = R_2$, или если существует в G окружность, содержащая оба ребра h_1, h_2. Известно (см. [1], стр. 225), что отношение **O** является отношением эквивалентности. Поэтому множество всех ребер графа G можно разбить на классы ребер так, что два ребра принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, если они находятся в отношении **O**. Членом графа является тогда такой подграф графа G, который содержит все ребра одного из классов упомянутого разбиения и только эти ребра, а помимо этого уже только вершины из G, инцидентные с этими ребрами. Вершина графа G, принадлежащая больше чем одному члену графа, называется артикуляцией графа G.

[7]) Некоторые свойства сечений исследовались уже в работе [4]. Однако там определено лишь сечение связного графа. Отношение между сечением в любом графе и степенью связности изучается подробнее в работе [3].

Доказательство. Связность графа G_1 очевидна. Предположим, что существует такое ребро h_1 в G_1, что $\sigma_{G_1}(h_1) < k$. По предположению $\sigma_{G_0}(h_1) \geqq k$, а так как G_1 возникает вследствие удаления одного ребра из G_0, необходимо будет $\sigma_{G_1}(h_1) \geqq \sigma_{G_0}(h_1) - 1$. Из этого вытекает $\sigma_{G_1}(h_1) = k - 1$; $\sigma_{G_0}(h_1) = k$. Поэтому существует сечение R графа G_0, содержащее k ребер и отделяющее вершины u_1, v_1, связанные в G_0 ребром h_1. Потому что $\sigma_{G_1}(h_1) = k - 1$, R должно содержать и ребро h_0. Вершины, которые соединены произвольным ребром сечения, принадлежат различным берегам сечения. Поэтому и вершины u_0, v_0, соединенные ребром h_0, принадлежат различным берегам сечения R, следовательно, сечение R отделяет и вершины u_0, v_0. Значит, $\sigma_{G_0}(h_0) \leqq k$, что противоречит предположению $\sigma_{G_0}(h_0) > k$. Итак, для всех h из G_1 будет $\sigma_{G_1}(h) \geqq k$, что требовалось доказать.

Теорема 1. *Подграф G^* графа G является основой k-го порядка графа G именно тогда, если* (a) *G^* содержит все вершины из G*; (b) *G^* является связным графом*; (c) $\sigma_{G^*}(h) = k$ *для всех h из G^*.*

Доказательство. I. Пусть G^* выполняет условия (a), (b), (c); тогда, очевидно, выполняет и условия (1), (2); предположим, что не выполняет условия (3). Следовательно, существует собственный подграф G^{**} графа G^*, выполняющий условия (1), (2), и существует ребро g из G^*, не принадлежащее G^{**}. Согласно (c), $\sigma_{G^*}(g) = k$ и существует сечение R^* графа G^* мощности k, содержащее ребро g. После удаления тех ребер из R^*, которые принадлежат G^{**}, из графа G^{**} возникнет несвязный граф. Таких ребер меньше k. Это противоречит предположению, что G^{**} удовлетворяет условию (2). Поэтому G^* выполняет также и (3).

II. Пусть G^* выполняет (1), (2), (3). Тогда, очевидно, выполняет (a), (b). Если бы для некоторого ребра h на G^* было $\sigma_{G^*}(h) < k$, получим сразу же противоречие с (2); если же было бы $\sigma_{G^*}(h) > k$, то по лемме 1 существовал бы собственный подграф G^{**} графа G^*, который выполнял бы условия (1), (2), что противоречит (3). Следовательно, должно выполняться и условие (c).

Теорема 2. *В графе G существует основа k-го порядка именно тогда, если* (I) *G является связным*; (II) *G содержит по крайней мере две вершины*; (III) *$\sigma_G(h) \geqq k$ для каждого ребра h из G.*

Доказательство. Необходимость приведенных условий очевидна. Если, наоборот, приведенные условия выполнены, то либо $\sigma_G(h) = k$ для каждого ребра h из G и, следовательно, G является искомой основой, либо существует такое ребро h_1 в G, что $\sigma_G(h_1) > k$. По лемме 1 граф G_1, полученный из G путем удаления ребра h_1, выполняет опять-таки (I), (II), (III). Из конечности графа G вытекает, следовательно, существование искомой основы.

Теорема 3. *Если G^* является основой k-го порядка графа G, то G^* содержит все ребра из $H_G(k)$.*

Доказательство. Предположим, что существует ребро h из $H_G(k)$, соединяющее вершины u, v и не принадлежащее G^*. Так как $\sigma_G(u, v) = k$, существует сечение R графа G мощности k, отделяющее вершины u, v и содержащее, очевидно, ребро h. Но в таком случае достаточно из графа G^* удалить ребра сечения R, принадлежащие и G^* (которых меньше k), чтобы возник несвязный граф. Это противоречит предположению, что G^* является основой k-го порядка (ввиду условия (2)).

Теорема 4. *Пусть G — произвольный граф, в котором имеется основа $(k + 1)$ го порядка G^*, и пусть h — произвольное ребро из G^*. Существует по крайней мере одна основа k-го порядка, которая содержит ребро h.*

Доказательство. По предположению $\sigma_{G^*}(h) = k + 1$, и, следовательно, существует сечение R^* графа G^*, которое содержит ребро h и имеет мощность $k + 1$. Пусть g — произвольное ребро из R^*, не совпадающее с h. Обозначим через G_0^* (соответственно G_0) граф, который возникнет из G^* (соотв. из G) вследствие удаления ребра g. Очевидно, $\sigma_{G^*}(f) \geqq k$ для каждого ребра f из G_0^*, и $\sigma_{G_0^*}(h) = k$. Граф G_0^* является связным и содержит по крайней мере две вершины. Поэтому существует основа k-го порядка G^{**} графа G_0^*, и по теореме 3 G^{**} содержит ребро h. Но основа G^{**} является, очевидно, и основой k-го порядка графа G_0 или же G.

Справедливо следующее утверждение: Пусть G^* является произвольной основой k-го порядка графа G, пусть G^* — подграф некоторого графа G', причем G' — подграф графа G. Тогда G^* есть основа k-го порядка графа G'. Если G является подграфом некоторого графа G'' и G'' содержит те же вершины, как G, то G^* служит основой k-го порядка графа G''. Справедливость приведенных утверждений очевидна. Я не формулирую их в теоремы и думаю, что их доказательство не надо приводить.

Некоторые теоремы, известные об основах первого порядка, не имеют места в случае основы k-го порядка, как только $k > 1$. Так, например, известно, что в любом связном графе G, который содержит по крайней мере две вершины, существуют по меньшей мере две различных основы первого порядка именно тогда, когда граф G содержит хоть одно ребро, не принадлежащее $H_G(1)$. Для основы k-го порядка при $k > 1$ это, однако, не справедливо. Так, например, в связном графе G, изображенном на рис. 1 ребра h_1, h_2, h_3, h_4 принадлежат $H_G(2)$, и существует ребро, не принадлежащее $H_G(2)$ ($h_5 \in H_G(3)$), но наперекор этому существует одна единственная основа второго порядка графа G.

Из работы [3] (стр. 112, лемма 27) известно следующее: Пусть G содержит по крайней мере одну основу первого порядка и пусть G' — произвольный подграф графа G, не содержащий никакой окружности. Тогда существует основа первого порядка графа G, подграфом которой служит граф G'. В графе G, изображенном на рис. 1, существует основа второго порядка (этой основой служит окружность, содержащая ребра h_1, h_2, h_3, h_4). В качестве G' выберем ребро h_5 и инцидентные ему вершины. Тогда G' не будет содержать окружности. Наперекор этому не существует основы второго порядка графа G, подграфом которой был бы граф G.

Теорема 5. *Пусть G^* — основа k-го порядка графа G и пусть G_i — произвольный член графа G. Тогда: подграф G_i^* графа G, содержащий все те элементы из G^*, которые принадлежат G_i, и только эти элементы, является основой k-го порядка графа G_i.*

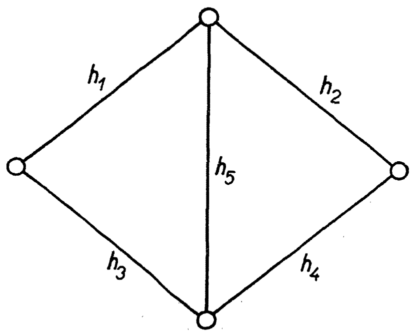

Рис 1.

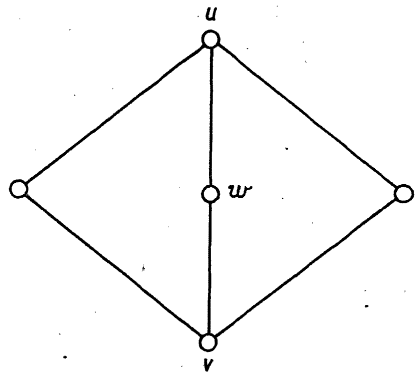

Рис 2.

Доказательство. Из определения члена графа сразу же вытекает, что каждый путь, соединяющий вершины u, v, как только это произвольные вершины из G_i, в графе G^*, принадлежит G_i^*. Поэтому из связности графа G^* вытекает связность графа G_i^*. Так как, далее, все ребра произвольного сечения графа G принадлежат одному и тому же члену графа, то произвольное сечение графа G, отделяющее вершины u, v, соединенные произвольным ребром h из G_i, является также сечением графа G_i. Это значит, что $\sigma_{G_i^*}(h) = k$. Следовательно, G_i^* является основой k-го порядка члена G_i.

Непосредственным следствием теоремы 5 являются следующие утверждения:

Любой член основы k-го порядка служит для самого себя основой k-го порядка. Если связный подграф G^* графа G выполняет условие: G^* содержит все вершины из G, и каждый член графа G^* служит для самого себя основой k-го порядка, то G^* является основой k-го порядка графа G.

3

Обратим теперь внимание на графы с правильной связностью и на их отношение к основам k-го порядка.

Мы говорим, что граф G имеет правильную связность k-ой степени, если две любых его вершины $u \neq v$ удовлетворяют условию $\sigma_G(u, v) = k$.

Если граф G имеет правильную связность степени k, то он, очевидно, является основой k-го порядка, но не наоборот. Так, например, на рисунке 2 изображена основа второго порядка, которая не имеет правильной связности второй степени (ибо $\sigma_G(u, v) = 3$). Очевидно, из соотношения $\sigma_G(u, v) = k$ для любых $u \neq v$ вытекает $\sigma_G(h) = k$ для каждого ребра h из G, но не наоборот.

В дальнейшем отметим важное свойство основ высшего порядка, которое позволяет, в определенном смысле, ограничиться изучением графов с правильной связностью, которые получим, произведя определенное преобразование, и наоборот: позволяет построить основы k-го порядка при помощи графов с правильностью k-ой степени.

Прежде чем это сделать, надо ввести некоторые новые понятия.

Пусть G — произвольный граф и пусть $\overline{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ — произвольное разбиение множества всех вершин графа G на классы вершин. Из графа G образуем граф $\overline{G}$ следующим образом: (1) граф содержит вершины $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_2, \bar{u}_n$; u_i возникает идентификацией всех вершин класса $U_i \in \overline{U}$. (2) граф $\overline{G}$ содержит все те ребра из G, которые соединяют в графе G вершины, принадлежащие различным классам разбиения $\overline{U}$, и только эти ребра. Мы будем говорить, что граф $\overline{G}$ *возникнет* из графа G *совпадением вершин по разбиению* $\overline{U}$, если граф $\overline{G}$ можно образовать из графа G при данном разбиении $\overline{U}$ описанным выше способом.

Теорема 6. *Пусть G — произвольный связный граф, в котором для каждого ребра h $\sigma_G(h) \geqq k$ и $H_G(k) \neq 0$. Совпадением вершин по разбиению $U_G^{(k+1)}$ возникнет из графа G граф $\overline{G}$, который облаодет правильной связностью k-ой степени. Граф G содержит все ребра из $H_G(k)$ и только эти ребра.*

Доказательство. Потому что множество $H_G(k)$ по предположению не пусто, существует в G ребро, концевые вершины которого принадлежат различным классам разбиения $U_G^{(k+1)}$ (таким ребром может, значит, служить любое из ребер множества $H_G(k)$). Отсюда вытекает: граф $\overline{G}$ имеет по меньшей мере две вершины, и произвольное ребро из $H_G(k)$ принадлежит G.

Пусть теперь g — произвольное ребро из G, не принадлежащее $H_G(k)$. Концевые вершины u_1, u_2 этого ребра удовлетворяют, очевидно, условию $\sigma_G(u_1, u_2) >$ $> k$ или же $u_1(\mathbf{k} + \mathbf{1})\, u_2$. Вершины u_1, u_2 принадлежат одному и тому же классу разбиения $U_G^{(k+1)}$, и g не принадлежит $\overline{G}$.

Надо уже доказать только то, что $\overline{G}$ имеет правильную связность k-ой степени. Приступим к доказательству. Прежде всего: потому что G — связный граф, является связным и $\overline{G}$. Пусть $\bar{u}_i \neq \bar{u}_j$ — две произвольные вершины из $\overline{G}$ и пусть $\overline{R}$ — произвольное сечение в графе $\overline{G}$, отделяющее вершины $\bar{u}_i, \bar{u}_j$; пусть его мощность равна m. Имеет место неравенство: $m \geqq k$. Если бы, значит, было $m < k$, то после удаления всех m ребер сечения $\overline{R}$ из графа G этот граф распался бы не менее чем на две компоненты. Это однако невозможно, потому что в графе G существует основа k-го порядка и, следовательно, не существует в нем сечение мощности меньшей k. Из приведенного вытекает: $\sigma_{\overline{G}}(\overline{u}_i, \overline{u}_j) \geqq k$. Пусть теперь U_i (соотв. U_j) b тот класс из $U_G^{(k+1)}$, совпадением вершин которого возникнет вершина $\overline{u}_i$ (соотв. $\overline{u}_j$); пусть v_i (соотв. v_j) — произвольная вершина из U_i (соотв. U_j). Потому что $U_i \neq U_j$, будет $\sigma_G(v_i, v_j) = k$, и в G существует сечение R мощности k, отделяющее вершины v_i, v_j. Все ребра сечения R принадлежат $H_G(k)$ и вследствие предыдущего и $\overline{G}$. Очевидно, что произвольный класс из $U_G^{(k+1)}$ принадлежит весь одному берегу сечения R. Пусть G_0 — граф, который возникнет из графа G совпадением вершин по разбиению $U_G^{(k+1)}$. G_0 имеет в точности две компоненты и, ввиду предыдущего, и граф $\overline{G}_0$ имеет две компоненты; при этом вершины $\overline{u}_i, \overline{u}_j$ принадлежат различным компонентам. Итак, множество ребер из R представляет собой множество ребер какого-то сечения графа $\overline{G}$ мощности k, отделяющего вершины u_i, u_j. Из этого вытекает, что для произвольных двух различных вершин u_i, u_j из $\overline{G}$ $\sigma_{\overline{G}}(\overline{u}_i, \overline{u}_j) = k$ и что $\overline{G}$ имеет правильную связность k-ой степени. Доказательство закончено.

Следствием теоремы 6 (которая имеет более широкое значение) является следующая теорема об основах k-го порядка:

Теорема 7. *Пусть граф G^* является основой k-го порядка ($k \geqq 1$) некоторого графа G и пусть граф $\overline{G}^*$ возникнет из графа G^* совпадением вершин по разбиению $U_{G^*}^{(k+1)}$; тогда граф $\overline{G}^*$ имеет правильную связность k-ой степени и содержит все ребра из G^*.*

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы 6.

Лемма 2. *Пусть G — произвольный граф, который имеет правильную связность k-ой степени и не содержит никакой артикуляции. Тогда: никакой собственный подграф графа G не имеет правильной связности k-ой степени.*

Доказательство. Пусть G' — произвольный собственный подграф графа G. Пусть $u' \neq v'$ — две произвольные вершины из G'. Очевидно, $\sigma_{G'}(u', v') \leqq \sigma_G(u', v') = k$. В противоречие утверждению леммы предположим, что граф G' имеет правильную связность k-ой степени, т. е. что для двух произвольных вершин $u' \neq v'$ $\sigma_{G'}(u', v') = k$. Очевидно, имеет место следующее: если h — ребро из G, соединяющее в G две вершины u_1, u_2, принадлежащие G', то h принадлежит G' (если бы h не принадлежало G', то было бы $\sigma_{G'}(u_1, u_2) < k$, что невозможно). Потому что G' есть собственный подграф графа G, вытекает из этого, что G' не может содержать все вершины из G (в обратном случае было бы $G' = G$). Обозначим символами U', соответственно, U множества вершин графов G' и G и положим $U'' = U - U'$. Потому что G — связный граф, существует ребро g графа G, одна из концевых вершин которого (обозначим ее через u') принадлежит U', а вторая (обозначим через u'') принадлежит U''. Пусть f — произвольное ребро из G', инцидентное с вершиной u'. Очевидно, что $f \neq g$, и так как по предположению G не содержит артикуляции, существует в G окружность K, содержащая ребро f и ребро g. Определенная часть окружности K является путем (обозначим его C), обладающим следующим свойством: соединяет две вершины из G' (обозначим их через v', w'), и ни одно из ребер пути C не принадлежит G'. Произвольное сечение в графе G, определяющее вершины v', w', содержит по меньшей мере одно ребро из C и, кроме того, не меньше чем k ребер из G' (ибо $\sigma_{G'}(v', w') = k$). Или же $\sigma_G(v', w') \geqq k + 1$, и это противоречит предположению, что G имеет правильную связность k-ой степени. Предположение, что существует собственный подграф с правильной связностью k-ой степени ведет к противоречию. Этим лемма доказана.

Замечание 1. Лемма 2 может навести на мысль, что справедливо и следующее утверждение: ни в каком собственном подграфе связного графа G без артикуляции, все ребра которого принадлежат $H_G(k)$, не существует основы k-го порядка. Это предположение не верно. Приведем пример для $k = 2$; в графе G, изображенном на рисунке 2, все ребра принадлежат $H_G(2)$. Если из графа G удалим вершину w и оба инцидентных с ней ребра, возникнет граф G_0, в котором существует основа 2-го порядка (этой основой служит граф G_0 сам). Притом G_0 является, очевидно, собственным подграфом графа G, и G не содержит никакой артикуляции.

Пусть G — произвольный граф, в котором имеется хотя бы одна основа k-го порядка и в котором множество $H_G(k)$ не пусто. На множестве $H_G(k)$ определим бинарное отношение Q_G^k следующим образом: ребра h_1, h_2 из $H_G(k)$ находятся в отношении Q_G^k (будем писать $h_1 Q_G^k h_2$) именно тогда, когда либо $h_1 = h_2$, либо когда существует сечение графа G мощности k, содержащее как ребро h_1, так и ребро h_2. Отношение Q_G^k, очевидно, рефлексивно и симметрично. Далее определим на множестве $H_G(k)$, бинарное отношение S_G^k следующим образом: ребра g_1, g_2,из $H_G(k)$ находятся в отношении S_G^k (будем писать $g_1 S_G^k g_2$) именно тогда, когда существует последовательность ребер $h_1, h_2, \ldots, h_n$, принадлежащих $H_G(k)$, такая, что $g_1 = h_1, g_2 = h_n$ и для всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ будет $h_i Q_G^k h_{i+1}$. Отношение S_G^k является не только рефлексивным и симметричным, но и транзитивным, иначе говоря: отношение S_G^k есть отношение эквивалентности. Поэтому существует одно разбиение $\overline{R}_G^{(k)}$ множества $H_G(k)$ на классы ребер такое, что два произвольных ребра из $H_G(k)$ принадлежат одному и тому же классу этого разбиения именно тогда, когда они находятся в отношении S_G^k. Очевидно, что произвольный класс из $R_G^{(k)}$ содержит не меньше чем k ребер. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть G — произвольный граф с правильной связностью k-ой степени. Разбиение $\overline{R}_G^{(k)}$ является разбиением множества всех ребер графа G на классы ребер, принадлежащих тому же члену графа G.*

Доказательство очевидно.

Лемма 4. *Пусть G — произвольный граф, в котором существует хотя бы одна основа k-го порядка и в котором множество $H_G(k)$ не пусто. Пусть $\overline{G}$*

граф, возникший из графа G путем совпадения вершин по разбиению $U_G^{(k+1)}$. Тогда: разбиение $\overline{R}_G^{(k)}$ тождественно с разбиением множества ребер графа G на классы ребер, принадлежащих одному и тому же члену графа G.

Доказательство. По теореме 6 граф $\overline{G}$ содержит все ребра множества $H_G(k)$ и только эти ребра. Пусть $g_1 \neq g_2$ — два произвольных ребра, принадлежащие одному члену графа G. Существует, очевидно, последовательность, ребер $h_1, h_2, \ldots, h_n$ этого члена такая, что $h_1 = g_1$; $h_n = g_2$ и что в графе G

$$h_1 Q_{\overline{G}}^{k} h_2\,, \quad h_2 Q_{\overline{G}}^{k} h_3, \ldots, h_{n-1} Q_{\overline{G}}^{k} h_n.$$

Иначе говоря: существуют сечения $\overline{R}_{1,2}, \overline{R}_{2,3}, \ldots, \overline{R}_{n-1,n}$ графа $\overline{G}$ мощности k так, что сечение $\overline{R}_{i,i+1}$ содержит ребра h_i, h_{i+1}. Множество ребер любого из этих сечений образует, очевидно, множество ребер некоторого сечения графа G, мощность которого также равна k и которое содержит соответствующую пару ребер. Поэтому и в графе G справедливо следующее:

$$h_1 Q_G^k h_2\,, \quad h_2 Q_G^{k} h_3, \ldots, h_{n-1} Q_G^{k} h_n$$

или же $g_1 S_G^k g_2$, и ребра g_1, g_2 принадлежат одному и тому же классу из $\overline{R}_G^{(k)}$. Пусть теперь f_1, f_2 — два ребра, принадлежащие одному классу разбиения $\overline{R}_G^{(k)}$. Тогда существует последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ребер из $H_G(k)$ такая, что $e_1 = f_1$; $e_m = f_2$ и что $e_1 Q_G^k e_2, e_2 Q_G^k e_3, \ldots, e_{m-1} Q_G^k e_m$, т. е. существуют сечения $R_{1,2}, R_{2,3}, \ldots, R_{m-1,m}$ в графе G мощности k, причем сечение R_i, $i+1$ содержит ребра e_i, e_{i+1}. Произвольное ребро такого сечения должно принадлежать $H_G(k)$ и по теореме 6 также графу $\overline{G}$. Множество ребер сечения R_i, $i+1$ представляет собой множество ребер какого-то сечения R_i', $i+1$ графа G, а именно сечения, мощность которого равна также k. Следовательно, $f_1 S_G^k f_2$. Известно, что все ребра произвольного сечения графа принадлежат одному и тому же члену графа (см. [3], стр. 20); поэтому все ребра сечений $R'_{i,i+1}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ принадлежат одному и тому же члену графа $\overline{G}$. Потому что два ребра f_1, f_2, принадлежащие различным членам графа G, не могут находиться в отношении $S_{\overline{G}}^k$, вытекает из выше сказанного справедливость леммы.

Лемма 5. *Пусть в графе G существует по крайней мере одна основа k-го порядка и пусть множество $H_G(k)$, не пусто. Пусть H — произвольный класс разбиения $\overline{R}_G^{(k)}$ и пусть G_0 — такой подграф графа G, в котором существует хотя бы одна основа k-го порядка. Тогда имеет место утверждение: если G содержит какое-нибудь ребро h из H, то G_0 содержит все ребра из H.*

Доказательство. Пусть граф G_0 содержит ребро h из H и пусть g — произвольное ребро из H, не совпадающее с h. По предположению $hS_G^k g$, т. е. существует последовательность ребер $f_1, f_2, \ldots, f_n$, принадлежащих H (причем $f_1 = h$, $f_n = g$), и последовательность $R_{1,2}, R_{2,3}, \ldots, R_{n-1,n}$ сечений мощности k графа G так, что сечение $R_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ содержит ребра f_i, f_{i+1}. Если бы граф G_0 не содержал ребра f_2, существовало бы в графе G_0 сечение мощности меньшей k, содержащее ребро $f_1 = h$, и в графе G_0 не могла бы существовать основа k-го порядка. Поэтому ребро f_2 из H принадлежит G_0. По той же причине должны принадлежать G_0 и ребра $f_3, f_4, \ldots, f_n$. Или же: ребро g принадлежит G_0. Ребро g было произвольным ребром из H. Поэтому граф G_0. содержит все ребра из H. Этим лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть граф G является для самого себя основой k-го порядка. Если в некотором подграфе G_0 графа G существует основа k-го порядка (обозначим ее через G_0^*), то $G_0^* = G_0$ и G_0 содержит или все ребра, или не содержит ни одного ребра любого из классов разбиения $\overline{R}_G^{(k)}$.*

Доказательство очевидно.

Замечание 2. Из замечания 1 уже видно, что основа G_0^* из теоремы 8 не должна содержать ребра всех классов разбиения $R_G^{(k)}$.

Докажем следующую лемму, которая облегчает построение таких графов, которые служат самисебе основой k-го порядка.

Лемма 6. *Пусть G имеет точно две компоненты G_1, G_2, из которых каждая является сама себе основой k-го порядка. Пусть u_1 (соотв. u_2) — произвольная вершина из G_1 (соотв. G_2) и пусть $\overline{U}$ — разбиение множества всех вершин графа G на классы вершин, обладающее таким свойством: $\overline{U}$ содержит класс $\{u_1, u_2\}$, и остальные классы из $\overline{U}$ содержат по одной вершине из G. Тогда о графе $\overline{G}$, который возникает из графа G совпадением вершин по разбиению $\overline{U}$ можно утверждать: граф $\overline{G}$ служит сам для себя основой k-го порядка.*

Доказательство. Очевидно, что вершины u_1, u_2 из G при совпадении образуют такую вершину из G, которая является артикуляцией графа G. Любой член графа G является (до обозначения его вершин) также членом графа G и наоборот. Поэтому: любой член графа G служит сам для себя основой k-го порядка. Граф G является, очевидно, связным и по теореме 5 и сам для себя основой k-го порядка. Доказательство закончено.

Лемма 6 позволяет построить такие основы k-го порядка, которые имеют произвольное, наперед заданное число членов, если только будем уметь построить основы k-го порядка, не содержащие никакой артикуляции. Самой простой основой k-го порядка без артикуляции является граф, который имеет две вершины и k ребер, из которых каждое соединяет эти две вершины. Другим примером может служить граф с правильной связностью k-ой степени, не содержащий артикуляции. Вопросы о построении всех графов с правильной связностью подробно освещены в работе [3], так что мы уже имеем сведения, позволяющие строить очень много основ, обладающих требуемыми свойствами. Напомним еще раз, что не всякая основа k-го порядка имеет правильную связность. То, что мы до сих пор вывели, намечает путь, каким образом надо „редуцировать“ произвольную основу k-го порядка на граф с правильной связностью, и перечисляет некоторые их основные свойства.

4

Укажем теперь возможности некоторого упрощения изучения свойств и построения основ k-го порядка, упомянутые в заключении предыдущего отдела. Прежде всего дадим определение некоторых новых понятий. *Сечение* R графа G назовем *простым сечением* графа G именно тогда, если будет существовать определенная вершина из G так, что все ребра из R будут с ней инцидентны. Об основе k-го порядка G^* графа G будем говорить, что она *проста,* если: (1) не будет содержать никакой артикуляции; (2) каждое сечение мощности k графа G^* будет простым.

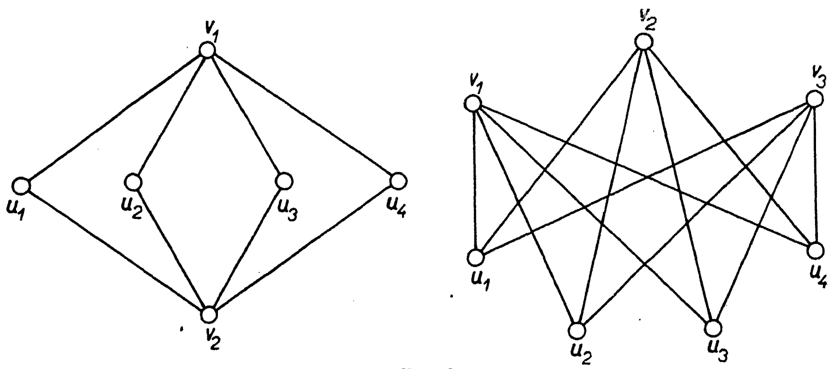

Рис 3.

Очевидно, что ни одна из основ первого порядка графа, содержащего больше двух вершин, не является простой. Самым простым примером простой основы k-го порядка является граф, содержащий в точности две вершины и k ребер. Другим очень простым примером простой основы k-го порядка является граф G^*, построенный следующим образом: (a) G^* содержит вершины u_1, $u_2, \ldots, u_n$; v_1; $v_2, \ldots, v_k$ (где $n \geqq k \geqq 1$); (b) любая вершина из $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ соединена только одним ребром с любой вершиной из $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, и никаких других ребер граф G^* не содержит. Случай $k = 2$, $n = 4$, а также случай $k = 3$, $n = 4$, изображен на рисунке 3.

Покажем, что произвольную основу k-го порядка, которая не является простой, можно определенным способом свести к основе, каждый член которой является простой основой k-го порядка.

Если G^* — произвольная основа k-го порядка, в которой любое сечение мощности k просто, то произвольный член основы G^* является, очевидно, простой основой k-го порядка.

Пусть G — произвольный граф, R — произвольное его сечение, m — мощность сечения R и $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ — множество его ребер. Пусть B', B'' — берега сечения R. Обозначим символом u'_i (соотв. u''_i) вершину из B' (соотв. B''), инцидентную с ребром h_i из R. Из графа G образуем граф G^* следующим образом: (1) удалим из G все ребра сечения R; (2) прибавим новую вершину v; (3) прибавим новые ребра h'_i, h''_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, что в графе G^* ребро h'_i (соотв. h''_i) соединяет вершину v с вершиной u'_i (соотв. u''_i); инцидентность остальных элементов из G сохраним и в G^*. О графе G^* будем говорить, что он возникает из графа G совмещением сечения R, если G^* возникнет из графа G только что описанным способом.

Очевидно следующее: вершина v является артикуляцией графа G^*; члену графа G, содержащему ребра из R, соответствуют в графе G^* точно два члена (их общей вершиной является афтикуляция v); любой из остальных членов графа G является также членом графа G^*. Произвольная вершина из G является артикуляцией в G^* именно тогда, когда она является артикуляцией в G.

Лемма 7. *Если граф G^* возникает совмещением непростого сечения мощности k основы k-го порядка графа G, то G^* является тоже основой k-го порядка и содержит меньше непростых сечений мощности k чем G.*

Доказательство. Пусть R — произвольное непростое сечение мощности k основы k-го порядка G и пусть G^* — граф, возникший совмещением сечения R. Пусть v — артикуляция из G^*, которая возникла совмещением сечения R. Любое сечение R^* графа G^*, не содержащее артикуляцию v, является также сечением в G. Если в произвольном сечении R^*, содержащем артикуляцию v, заменим ребра, инцидентные v, соответствующими ребрами из R, получим какое-то сечение R' графа G. Из этого вытекает $\sigma_{G^*}(h) = \sigma_G(h)$ для всех ребер h из G^*, которые принадлежат и G. Если g — ребро из G^*, инцидентное с вершиной v, то, очевидно, $\sigma_G(g) = k$. Следовательно, G^* есть основа k-го порядка.

Каждому непростому сечению мощности k графа G^* соответствует в выше описанном смысле некоторое непростое сечение графа G. Но в графе G имеется еще непростое сечение R (которому в графе G^* соответствуют два простых сечения мощности k, содержащие артикуляцию v). Потому что двум различным таким сечениям графа G^* соответствуют необходимо два различных сечения графа G, G^* содержит меньше непростых сечений мощности k, чем граф G.

Совмещение сечения мощности k, которое не является простым, в графе, который представляет собой основу k-го порядка, можно повторить и несколько раз за собой и таким образом можно строить дальнейшие и дальнейшие основы k-го порядка. Достаточно, правда, когда повторяем это столько раз, пока в последней найденной основе k-го порядка имеется сечение мощности k, которое не является простым. По лемме 7 число таких сечений при этом приеме все уменьшается, так что после конечного числа шагов получим всегда основу k-го порядка, каждый член которой является простой основой k-го порядка.

Теорема 9. *Пусть граф G^* представляет собой простую основу k-го порядка $(k > 1)$ и пусть граф $\overline{G}^*$ возникает из графа G^* совпадением вершин по разбиению $U_{G^*}^{(k+1)}$; тогда: граф $\overline{G}^*$ имеет правильную связность k-ой степени,* *содержит все ребра из G^* и произвольное его сечение мощности k просто*; *в $\overline{G}^*$ существует самое больше одна артикуляция.*

Доказательство. Теорема является следствием теоремы 7.

Аналогично тому, как мы определили простую основу k-го порядка, можем определить простой граф с правильной связностью k-ой степени, а именно: граф с правильной связностью k-ой степени является простым, если он не содержит артикуляции и если произвольное его сечение мощности k просто.

Очевидно, что простой граф с правильной связностью первой степени выглядит следующим образом: содержит точно две вершины и одно ребро, которое их соединяет. Если G — простой граф с правильной связностью второй степени, то G — или двухугольник, или треугольник. При $k \geqq 3$ и простые графы с правильной связностью k-ой степени довольно сложны и при их изучении (основанием которого служит для нас работа [3], к которой настоящая работа примыкает) выведенные сведения облегчают наше положение.

Из приведенного вытекает, что особенно значительного упрощения при изучении основ k-го порядка можно достичь в случае $k = 2$ (кроме случая $k = 1$, который уже очень хорошо изучен). Этому случаю посвящены следующие леммы.

Лемма 8. *Пусть G — произвольная простая основа второго порядка, не совпадающая ни с двухугольником, ни с треугольником. Совпадением вершин графа G по разбиению $U_G^{(3)}$ возникает из графа G граф $\overline{G}$, обладающий следующими свойствами*: (1) *любой его член является двухугольником*; (2) *каждое из его ребер инцидентно с определенной его вершиной, которая служит единственной артикуляцией графа G.*

Доказательство. По теореме 9 членом графа G может быть только двухугольник или треугольник, и $\overline{G}$ содержит небольше одной артикуляции. Докажем, что никакой из членов графа $\overline{G}$ не может быть треугольником.

Пусть h — произвольное ребро из G. По предположению h принадлежит $H_G(2)$. Пусть u, v — вершины, соединенные ребром h. Следовательно, $\sigma_G(u, v) = 2$, и существует сечение мощности 2, содержащее ребро h. Пусть g — второе ребро этого сечения. Потому что в G существует только простые сечения мощности 2, ребро g инцидентно по крайней мере одной из вершин u, v. Пусть оно инцидентно, например, вершине v. Произвольная окружность, содержащая ребро h, содержит и ребро g (см. [4], теорема 5), и потому что v не является артикуляцией (G, то есть — простая основа), не может быть вершина v инцидентна, кроме ребер g, h, ни с каким другим ребром из G. Пусть w — вторая концевая вершина ребра g. Утверждаем: вершина u а также w, является вершиной не меньше третьей степени. Если бы вершина u была вершиной второй степени, что значит, что кроме ребра h была бы инцидентной только с некоторым ребром f, то или множество $\{f, g\}$ было бы множеством ребер некоторого сечения мощности 2, которое не является простым (а это невозможно в простой основе второго порядка), или f соединяло бы вершины u, w. Но тогда либо вершина w была бы артикуляцией графа G (а это исключено), либо G был бы треугольник (опять противоречие с предположением). Итак, вершина u является вершиной высшей степени, чем второй, и также вершина w (по тем же причинам) является вершиной степени высшей чем второй.

Пусть теперь $w_1 \neq w_2$ — две произвольных вершины из G степени высшей, чем второй. Имеет место следующее: $\sigma_G(w_1, w_2) > 0$ или G является связным графом; $\sigma_G(w_1, w_2) > 1$ или множество $H_G(1)$ пусто. Предположим, что $\sigma_G(w_1, w_2) = 2$, т. е. существует сечение R мощности 2, отделяющее вершины w_1, w_2. Сечение R просто, и оба его ребра (обозначим их через h_1, h_2) инцидентны с некоторой вершиной из G (обозначим ее через w_3). Тогда или вершина w_3 является вершиной второй степени или w_3 инцидентна с дальнейшим ребром h_3. Первый случай не возможен (так как один берег сечения R содержал бы лишь одну вершину w_3, в то время как $w_1 \neq w_3 \neq w_2$, потому что вершины w_1, w_2 являются вершинами степени высшей, чем второй). Во втором случае каждая окружность, содержащая ребро h_1 содержит и ребро h_2, и не существует окружности, которая содержала бы ребра h_1, h_3. Но тогда w_3 является артикуляцией — противоречие с предположением, что G — простая основа второго порядка. Предположение $\sigma_G(w_1, w_2) = 2$ приводит нас к противоречию. Поэтому $\sigma_G(w_1, w_2) > 2$ для произвольных двух вершин $w_1 \neq w_2$, которые обе имеют степень выше второй. Отсюда вытекает: все вершины из G, которые имеют степень выше второй, принадлежат одному и тому же разбиению $U_G^{(3)}$. Очевидно, что в G нет ни изолированных вершин, ни вершин первой степени, и что произвольная вершина второй степени является единственной вершиной некоторого класса из $U_G^{(3)}$. Из приведенного уже очевидна справедливость теоремы.

Лемма 9. *Пусть G — произвольная простая основа второго порядка, иная, чем треугольник. Тогда G содержит четное число ребер, и любое ребро из G является ребром точно одного, и притом простого, сечения мощности* 2.

Доказательство. Лемма является следствием леммы 8.

Под „*разделением по-полам*“ некоторого ребра h графа G, соединяющего вершины u, v разумеется следующее изменение графа G: путь u, h, v (с одним ребром h) заменим путем u, h', w, h'', v (где w — новая „делящая по-полам“ вершина), содержащим два новых ребра h', h'', причем инцидентность остальных элементов из G остается без изменения.

Теорема 10. *Пусть G' — произвольный связный граф без артикуляции, в котором множества $H_G(1)$, $H_{G'}(2)$ пусты и который содержит по меньшей мере две вершины. Пусть G — тот граф, который возникает из G' вследствие разделения по-полам всех его ребер. Тогда G есть простая основа второго порядка, и любую простую основу второго порядка, не совпадающую ни с двухугольником, ни с треугольником, можно построить описанным способом.*

Доказательство. Что G является простой основой второго порядка, вытекает из леммы 8. Пусть теперь G^* – произвольная простая основа второго порядка, отличная от двухугольника и треугольника. Любое ребро из G^* является ребром некоторого простого сечения мощности 2. Из этого вытекает, что любое ребро из G^* инцидентно вершине второй степени. Но каждое ребро из G^* инцидентно точно одной вершине второй степени (ибо в противном случае существовало бы в G^* непростое сечение мощности 2 или G^* был бы треугольником, что противоречит предположению), и вторая вершина, которой ребро инцидентно, является вершиной высшей степени, чем второй.

Каждое сечение мощности 2 выглядит следующим образом: содержит две вершины из G^* степени высшей, чем второй (напр. u, v) и вершину второй степени w, соединенную ребром с вершинами u, v. Значит, если каждое такое сечение заменим ребром, соединяющим вершины u, v, получим граф G', который (1) не содержит никакой вершины второй степени; (2) имеет по крайней мере две вершины; и в котором (3) $\sigma_{G'}(h) > 2$ для всех $h \in G'$. Граф G^* возникнет, очевидно, разделением по-полам всех ребер графа G'. Этим теорема доказана.

5

Ради иллюстрации возможностей применения полученных сведений об основах k-го порядка, посвятим несколько замечаний оцененным графам и их основам.

Пусть G – произвольный связный граф, H – множество его ребер, и пусть δ является отображением множества H в множество положительных действительных чисел. Число $\delta(h)$, где $h \in H$, назовем значением ребра h при оценке δ. Под значением подграфа G' графа G при оценке δ будем разуметь сумму

$$\mathrm{d}(G') = \sum_{h \in G'} \delta(h)\,.$$

Каснемся кратко задачи найти подграф G^* оцененного графа G, который имеет следующие свойства: (1) G^* содержит все вершины из G; (2) G^* является связным графом и останется связным, если из него удалим меньше чем k (k – произвольно выбранное, фиксированное натуральное число) его произвольных ребер; (3) среди подграфов графа, которые имеют приведенные свойства, не существует такой подграф, который имел бы значение меньше $\mathrm{d}(G^*)$.

Подграф, обладающий свойствами (1), (2), (3), должен быть, очевидно, основой k-го порядка, и поэтому он существует только тогда, когда существует основа k-го порядка графа G.

Задача найти в данном связном оцененом графе G подграф G^* со свойствами (1), (2), (3) для случая $k = 1$ решена в работе [5]. В работе [6] выведены и условия для существования одного единственного решения задачи. Но совсем ничего неизвестно о решении задачи при $k > 1$. Выведенные здесь результаты позволяют найти в данном графе любую основу k-го порядка графа G, и познакомиться и с условиями существования основы k-го порядка графа G. Отметим, что метода ведущий к цели в случае $k = 1$ и выведенный в работе [5], [6], не должен привести нас к цели в случае $k > 1$. Мы имеем в виду следующий метод: Пусть G — связный граф, в котором о каждом его ребре h справедливо неравенство $\sigma_G(h) \geqq k$. Из графа $G_1 = G$ удалим то из ребер, не принадлежащих $H_G(k)$, которое имеет наибольшее значение — возникнет так граф G_2. В общем случае: из графа G_i удалим то из ребер, не принадлежащих $H_{G_i}(k)$, которое имеет наибольшее значение, чтобы возник таким образом граф G_{i+1}.

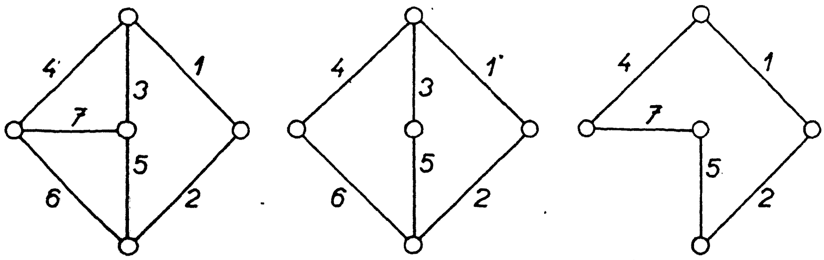

Рис. 4.

После конечного числа таких шагов получим (см. лемму 1) определенную основу k-го порядка графа G. Эта основа не должна, однако, уже при $k = 2$ иметь свойство (3). Приведем конкретный пример:

На рисунке 4а изображен связный граф G_0 (число у отдельных ребер означает значение ребра), в котором $\sigma_{G_0}(h) \geqq 2$ для любого ребра h из G_0. Описанным методом мы получили бы основу второго порядка G_1 (рисунок 4b), значение которой равно $d(G_1) = 21$, в то время как основа G_2 (рисунок 4c) имеет значение 19, т. е. меньшее чем G_1.

Затруднения, связанные с отыскиванием основы k-го порядка, которая имела бы свойство (3), в данном оцененом графе G вытекают из все еще недостаточного знания свойств основ k-го порядка. Полученные нами сведения являются только скромным вкладом, служащим к устранению этого недостатка.

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующее: если в данном связном графе G для каждого ребра h, $\sigma_G(h) \geqq k$ и для определенного его ребра $g \sigma_G(g) > > k$, то существует основа k-го порядка графа не содержащая g, в то время как каждое ребро из $H_G(k)$ принадлежит каждой основе k-го порядка графа G. Но при $k > 1$ может в G существовать и такое ребро f, не принадлежаюее никакой основе k-го порядка графа (для случая $k = 2$ может примером такого ребра служить ребро h_5 графа, изображенного на рисунке 1).

Интересной и пока открытой является следующая проблема:

Пусть $k > 1$ и пусть G — связный граф, в котором для каждого ребра

h $\sigma_G(h) \geqq k$. Требуется найти множество всех тех ребер графа G которые не принадлежат никакой основе k-го порядка графа G.

Решение этой задачи могло бы облегчить путь к нахождению основы k-го порядка графа G, которая имеет свойство (3), а именно так, что достаточно было бы ограничиться графом, который получим из графа G, устранив из него все вершины этого множества.

Задачу о нахождении основы k-го порядка $(k > 1)$ со свойством (3) в данном оцененом графе G можно с учетом практических приложений сформулировать следующим образом: пусть оцененый граф G изображает допустимые возможности построения системы связи в следующем смысле: произвольная вершина из G представляет некоторый центр, ребро – прямую линию, соединяющую два центра; значение ребра пусть означает, например, расходы на построение этой линии. Если две вершины из G не соединены в G ребром, то пусть это значит, что построение прямой соединяющей линии по каким-то причинам нельзя осуществить (высокие расходы, территориальные препятствия и т. под.). Задача состоит в следующем: надо в рамке данных возможностей, изображенных графом G, найти такой вариант системы связи, чтобы на его построение пошли минимальные расходы и чтобы при этом система связи обладала следующими свойствами: любой центр с другым центром системы имеет или прямое соединение, или по крайней мере соединение посредством навязывающих на себя прямых линий (это во-первых) и во вторых: описанное свойство система связи не потеряет даже тогда, когда произвольные ее прямые линии в числе меньшем k из-за аварии или по каким-либо другим причинам выключены. Очевидно, что решить эту задачу равняется тому, найти основу k-го порядка графа G, обладающую свойством (3).

Литература

[1] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.

[2] *A. Kotzig*: O istých rozkladoch grafu. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *V* (1955), 144 až 151.

[3] *A. Kotzig*: Súvislosť a pravideľná súvislosť konečných grafov. Bratislava, 1956.

[4] *A. Kotzig*: Význam kostry grafu pre konštrukciu kompozičných báz istých čiastočných grafov. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *VI* (1956), 68—76.

[5] *O. Borůvka*: O jistém problému minimálním. Práce moravské přír. spol. *III* (1926), 1—22, 37—58.

[6] *A. Kotzig*: Súvislé podgrafy s minimálnou hodnotou v konečnom súvislom grafe. Časopis pro pěstování matematiky, *86* (1961), 1—6.

Resumé

O KOSTRÁCH VYŠŠIEHO NEŽ PRVÉHO RÁDU

ANTON KOTZIG, Bratislava

Článok je rozvrhnutý do piatich kapitol. Úvodná prvá kapitola obsahuje definície pojmov autorom už predtým zavedených, ktoré sú potrebné pre ďalší výklad. Sú to: pojem rezu, oddeľujúceho dvojicu uzlov, stupeň súvislosti medzi uzlami a isté rozklady na množine uzlov a na množine hrán. Novozavedeným je pojem kostry k-teho rádu (veta 1) a je dokázaná existenčná veta (2). Vzťah kostry k-teho rádu k spomenutému rozkladu na množine hrán, ďalej vzťah ku kostrám vyššieho než k-teho rádu vyjadrujú vety 3 a 4. Odvodzuje sa základná veta o zobecnených kostrách v grafoch s artikuláciami (5). V tretej kapitole sa využívajú prv autorom odvodené výsledky a študujú sa špeciálne typy kostier. Odvodzuje sa predovšetkým základná veta o „redukcii" daného grafu na graf pravidelne súvislý (veta 6) a jej dôsledky pre zobecnené kostry (7). Záverom popisuje sa konštrukcia pravidelne súvislých zobecnených kostier. V štvrtej kapitole definuje sa špeciálny typ rezu tzv. jednoduchý rez (t. j. rez, v ktorom všetky hrany sú incidentné s tým istým uzlom) a pojem jednoduchej kostry. Uvádza sa konštrukcia, ako odstrániť všetky nejednoduché rezy. Podrobnejšie sa skúmajú najmä kostry druhého rádu a je popísaná konštrukcia jednoduchých kostier druhého rádu. V poslednej (piatej) kapitole venuje sa niekoľko poznámok zobecnenému Borůvkovmu problému, ktorý spočíva v úlohe nájsť v ohodnotenom grafe minimálnu kostru daného rádu. Okrem toho je postavený ďalší problém súvisiaci s hľadaním minimálnych zobecnených kostier.

Zusammenfassung

ÜBER GERÜSTE HÖHERER ORDNUNG

ANTON KOTZIG, Bratislava

Die Arbeit besteht aus fünf Kapiteln. Das einleitende Kapitel enthält die Definitionen einiger, schon früher vom Verfasser eingeführten Begriffe, die für die weitere Ausführung notwendig sind. Es sind die folgenden: der Begriff des Schnittes, der zwei Knotenpunkte voneinander trennt; Grad des Zusammenhanges zwischen den Knotenpunkten, gewisse Zerlegungen der Knotenpunktmenge und der Kantenmenge eines Graphen. Neu wird der Begriff des Gerüstes k-ter Ordnung eingeführt (Satz 1) und anschliessend der entsprechende Existenzsatz bewiesen (Satz 2). Die Beziehung des Gerüstes k-ter Ordnung zur erwähnten Zerlegung der Kantenmenge, sowie zu Gerüsten höherer als k-ter Ordnung wird in den Sätzen 3 und 4 dargelegt. Es wird ein

grundlegender Satz über verallgemeinerte Gerüste in Graphen mit Artikulation abgeleitet (Satz 5). Im dritten Kapitel werden zunächst die vom Verfasser abgeleiteten Ergebnisse ausgenutzt und spezielle Typen von Gerüsten studiert. Vorerst wird der grundlegende Satz über die „Reduktion" eines Graphen auf einen regelmässig zusammenhängenden Graph (Satz 6), sowie die Konsequenzen dessen für die allgemeinen Gerüste (Satz 7) abgeleitet. Abschliessend wird die Konstruktion regelmässig zusammenhängender Gerüste beschrieben. Im vierten Kapitel wird ein spezieller Typ eines Schnittes, der sogenannte einfache Schnitt (d. h. ein Schnitt, bei welchem alle Kanten mit demselben Knotenpukt inzident sind), sowie der Begriff des einfachen Gerüstes definiert. Es wird die Konstruktion angegeben, welche alle nicht einfache Schnitte entfernt. Einer eingehenden Untersuchung werden insbesonders die Gerüste zweiter Ordnung unterworfen und dann die Konstruktion einfacher Gerüste zweiter Ordnung angegeben. Das letzte (fünfte) Kapitel wird einigen Anmerkungen zu dem verallgemeinerten Borůvkaschen Problem gewidmet. Dieses Problem besteht in der Aufgabe, ein minimales Gerüst gegebener Ordnung in einem bewerteten Graphen zu finden. Ausserdem wird ein weiteres Problem aufgestellt, das mit dem Aufsuchen minimaler verallgemeinerter Gerüste zusammenhängt.