Josef Král

K jednomu problému o povrchu konvexní plochy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 277--287

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117377

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

K JEDNOMU PROBLÉMU O POVRCHU KONVEXNÍ PLOCHY

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 20. ledna 1960)

V této poznámce je dokázáno, že povrch konvexní plochy S (ve smyslu definice uvedené v [2]) je roven supremu plošných integrálů druhého druhu z jednotkových spojitých vektorových funkcí na S. Tím je řešen problém č. 191 z „Nové skotské knihy", vepsaný akad. E. ČECHEM.

Konvexním tělesem rozumíme uzavřenou konvexní množinu v trojrozměrném euklidovském prostoru E_3, která má neprázdný vnitřek. V dalším bude K stále pevné konvexní těleso. Symbolem K^3 označíme množinu všech bodů $[x_1, x_2] \in E_2$, pro něž je množina

$$A_3(x_1, x_2) = \{x; x \in E_1, [x_1, x_2, x] \in K^0\}\ ^1)$$

neprázdná a shora omezená. Množina K^3 je zřejmě otevřená. (Může být ovšem prázdná nebo splynout s E_2.) Na K^3 definujeme funkci f^3 předpisem

$$f^3(x_1, x_2) = \sup A_3(x_1, x_2)\,.$$

Symbolem K_3 označíme množinu všech $[x_1, x_2] \in E_2$, pro něž je $A_3(x_1, x_2)$ neprázdná a zdola omezená. Dále položíme pro $[x_1, x_2] \in K_3$

$$f_3(x_1, x_2) = \inf A_3(x_1, x_2)\,.$$

Je-li nyní g funkce, jejíž definiční obor obsahuje hranici H množiny K, pak definujeme

$$P_3(K, g) = \int_{K^3} g(x_1, x_2, f^3(x_1, x_2))\, dx_1\, dx_2 - \int_{K_3} g(x_1, x_2, f_3(x_1, x_2))\, dx_1\, dx_2\,,$$

pokud existují Lebesgueovy integrály na pravé straně a pokud má smysl jejich rozdíl; pro jiná g nebude symbol $P_3(K, g)$ definován.

Podobným způsobem definujeme symboly $K^i, K_i, f^i, f_i, P_i(K, g)$ také pro $i = 1, 2$. Je-li $v = [v_1, v_2, v_3]$ vektorová funkce[2]) definovaná na nějaké množině obsahující H, pak položíme

$$P(K, v) = \sum_{i=1}^{3} P_i(K, v_i)$$

[1]) K^0 značí vnitřek množiny K v E_3.

[2]) V dalším půjde stále jen o trojrozměrné vektorové funkce.

za předpokladu, že jsou definovány symboly $P_i(K, v_i)$ a že má smysl jejich součet. $P(K, v)$ je plošný integrál druhého druhu z vektorové funkce v přes hranici H tělesa K.

Poznámka 1. Funkce f^3 je spojitá na K^3 a zobrazení

$$[x_1, x_2] \to [x_1, x_2, f^3(x_1, x_2)] = F^3(x_1, x_2)$$

je homeomorfní transformace množiny K^3 na množinu $F^3(K^3)$. Množina $F^3(K^3)$ má tedy typ F_σ a transformace F^3 převádí borelovské podmnožiny v K^3 na borelovské podmnožiny v H a naopak.

Označme symbolem L vnější dvojrozměrnou Lebesgueovu míru v E_2 a definujme na systému všech podmnožin množiny H vnější míru Q^3 předpisem

$$Q^3 M = L(F^3)^{-1}(M), \quad M \subset H.$$

Z předchozího je patrno, že všechny borelovské podmnožiny v H jsou Q^3-měřitelné a že všechny kompaktní podmnožiny v H mají konečnou Q^3-míru. Každá spojitá funkce s kompaktním nosičem na H je tedy Q^3-integrovatelná. Je-li dále g funkce, jejíž definiční obor obsahuje množinu H, pak rovnost

$$\int_{K^3} g(F^3(x_1, x_2))\, dx_1\, dx_2 = \int_H g\, dQ^3$$

platí co do existence i co do hodnoty.

Vycházejíce od transformace

$$[x_1, x_2] \to [x_1, x_2, f_3(x_1, x_2)] = F_3(x_1, x_2)$$

množiny K_3 na množinu $F_3(K_3)$, konstruujeme na H analogicky vnější míru Q_3. Tato míra má obdobné vlastnosti jako Q^3. Podobně definujeme zobrazení F^i, F_i a míry Q^i, Q_i také pro $i = 1, 2$. Z definice symbolu $P_i(K, \ldots)$ snadno plyne, že pro každou funkci g, jejíž definiční obor obsahuje množinu H, platí

$$P_i(K, g) = \int_H g\, dQ^i - \int_H g\, dQ_i$$

co do existence i co do hodnoty. (To znamená, že $P_i(K, g)$ je definováno, právě když g je současně Q^i- i Q_i-měřitelná, když existují integrály vpravo a má smysl jejich rozdíl; potom platí uvedená rovnost.)

Protože (borelovské) množiny $F^i(K^i)$, $F_i(K_i)$ jsou disjunktní a $Q^i(H - F^i(K^i)) = 0 = Q_i(H - F_i(K_i))$, jsou míry Q^i, Q_i (pokud je obě uvažujeme na systému borelovských podmnožin v H) navzájem singulární.

Poznámka 2. Jestliže g je funkce na E_3 mající spojité parciální derivace prvního řádu a kompaktní nosič, pak $P_i(K, g)$ existuje a

$$P_i(K, g) = \int_K \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \, dx \, .$$

(Důkaz tohoto faktu je možno přenechat čtenáři. Podotýkáme, že množina $H - (F^i(K^i) \cup F_i(K_i))$ má nulový průmět do i-té souřadné roviny.)

Je-li tedy v vektorová funkce s kompaktním nosičem, jejíž složky mají na E_3 spojité parciální derivace prvního řádu, pak

$$P(K, v) = \int_K \operatorname{div} v(x) \, dx \, .$$

Poznámka 3. V dalším bude stále x^0 pevně zvolený bod z vnitřku konvexního tělesa K. Symbolem $\hat{H}$ označíme množinu těch bodů z H, v nichž má konvexní těleso K aspoň dvě různé opěrné roviny. Na H definujeme vektorovou funkci $v^K = v$ tak, že položíme

$$v(x) = \frac{x - x^0}{|x - x^0|} \quad \text{pro} \quad x \in \hat{H}$$

a pro $x \in H - \hat{H}$ označíme symbolem $v(x)$ jednotkový vektor, jenž je kolmý k (jediné) opěrné rovině tělesa K v bodě x a směřuje do poloprostoru neobsahujícího K.

Symbolem $Q_H = Q$ budeme značit vnější povrchovou míru na systému podmnožin množiny H definovanou ve smyslu teorie konvexních ploch. Konstrukce této vnější míry je popsána v kap. X monografie [2]. Q je Carathéodoryho vnější měrou, takže všechny borelovské podmnožiny v H jsou Q-měřitelné. Úplnou míru (na systému všech Q-měřitelných podmnožin v H) odvozenou z vnější míry Q budeme rovněž značit symbolem Q. Všechny kompaktní podmnožiny v H mají konečnou Q-míru.

Nechť C je kompaktní podmnožina v H; zvolme konvexní těleso $\tilde{K}$ tak, že $C \subset \tilde{K}^0$. Položíme-li $K_0 = K \cap \tilde{K}$ a označíme-li symbolem Q_{H_0} příslušnou vnější povrchovou míru na hranici tělesa K_0, pak Q_H a Q_{H_0} splývají na systému podmnožin množiny C.

(Uvedená fakta jsou vesměs bezprostředními důsledky definice vnější povrchové míry na konvexní ploše; viz kap. X výše zmíněné monografie.)

Lemma 1. *Předpokládejme, že konvexní těleso K je kompaktní, a označme symbolem E kulovou plochu o středu v bodě x^0 a poloměru* 1. *Pro $x \in E$ položme*

$$r(x) = \sup \{\alpha; \alpha \in E_1, x^0 + \alpha(x - x^0) \in K\} \, ,$$
$$\psi(x) = x^0 + r(x)\,(x - x^0) \, .$$

Pak vektorová funkce $v(\psi(x))$ je Q_E-měřitelná na E,[3]) *zobrazení ψ a funkce r jsou*

[3]) Tzn., že její složky jsou Q_E-měřitelnými funkcemi.

na E spojité a pro každou vektorovou funkci v, jejíž složky mají na E_3 spojité parciální derivace prvního řádu, platí

$$P(K, v) = \int_E \frac{r^2(x)}{(x - x^0) \cdot \nu(\psi(x))} v(\psi(x)) \cdot \nu(\psi(x)) \, \mathrm{d}Q_E(x) . \tag{1}$$

Důkaz. Sestrojme posloupnost konvexních polyedrů $K_n \subset K$ tak, že $K_n \subset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a $\bigcup_n K_n \supset K^0$.[1]) Polyedry K_n tedy s rostoucím n konvergují[4]) ke konvexnímu tělesu K. Předpokládejme hned, že bod x^0 leží uvnitř všech polyedrů K_n, a položme pro $x \in E$

$$r_n(x) = \sup \{\alpha; \alpha \in E_1, x^0 + \alpha(x - x^0) \in K_n\} ,$$

$$\psi_n(x) = x^0 + r_n(x) (x - x^0) .$$

Nechť H_n je hranice polyedru K_n a buď $\hat{H}_n$ sjednocení všech hran téhož polyedru. Definujme na H_n vektorovou funkci ν^n tak, že položíme

$$\nu^n(x) = \psi_n^{-1}(x) - x^0 \quad \text{pro} \quad x \in \hat{H}_n$$

a pro $x \in H_n - \hat{H}_n$ označíme jako $\nu^n(x)$ jednotkový vektor mířící ven z K_n a kolmý ke stěně polyedru K_n, která obsahuje bod x. Za tohoto označení máme

$$P(K_n, v) = \int_E \frac{r_n^2(x)}{(x - x^0) \cdot \nu^n(\psi(x))} v(\psi_n(x)) \cdot \nu^n(\psi_n(x)) \, \mathrm{d}Q_E(x) .$$

(Ověření této rovnosti přenecháváme čtenáři; podotýkáme jen, že na E splývá Q_E s obvyklou povrchovou mírou.) Protože

$$\lim_n P(K_n, v) = \lim_n \int_{K_n} \operatorname{div} v(x) \, \mathrm{d}x = \int_K \operatorname{div} v(x) \, \mathrm{d}x = P(K, v) ,$$

stačí k důkazu rovnosti (1) zjistit, že

$$\lim_n \int_E \frac{r_n^2(x)}{(x - x^0) \cdot \nu^n(\psi_n(x))} v(\psi_n(x)) \cdot \nu^n(\psi_n(x)) \, \mathrm{d}Q_E(x) = \tag{2}$$

$$= \int_E \frac{r^2(x)}{(x - x^0) \cdot \nu(\psi(x))} v(\psi(x)) \cdot \nu(\psi(x)) \, \mathrm{d}Q_E(x) .$$

Zvolme $r_0 > 0$ tak, že koule B o středu x^0 a poloměru r_0 je obsažena uvnitř všech polyedrů K_n. Dále buď $r_1 > 0$ tak voleno, že všechny množiny K_n jsou obsaženy

---

[4]) Jde o konvergenci obvyklou v teorii konvexních těles; viz např. [2], str. 383.

v kouli o středu x^0 a poloměru r_1. Protože žádná opěrná rovina k tělesu K_n neprotíná kouli B, zjistíme jednoduchým výpočtem, že

$$(x - x^0) \,.\, v^n(\psi_n(x)) \geqq \frac{r_0}{r_1}\,, \quad x \in E\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dále je pro všechna $x \in E$ a všechna n

$$r_n(x) \leqq r_1\,.$$

Odtud je vidět, že funkce

$$\frac{r_n^2(x)}{(x - x_0) \,.\, v^n(\psi_n(x))}\, v(\psi_n(x)) \,.\, v^n(\psi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

jsou stejně omezené na E. Funkce r a zobrazení ψ jsou zřejmě spojité na E. Pro $x \in E$ platí

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = r(x)\,, \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)\,.$$

Položme

$$N_n = \psi_n^{-1}(\hat{H}_n)\ (n = 1, 2, \ldots)\,, \quad N_0 = \psi^{-1}(\hat{H})\,, \quad N = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k\,.$$

Podle věty 3* z [2], str. 324, je $Q_E N_0 = 0$. Zřejmě také $Q_E N_n = 0$ pro všechna n, takže $Q_E N = 0$. Z věty 1 na str. 384 v [2] snadno plyne, že pro $x \in E - N$ (tj. pro Q_E-skoro všechna $x \in E$) platí

$$\lim_{n\to\infty} v^n(\psi_n(x)) = v(\psi(x))\,.$$

Vidíme, že vektorová funkce $v(\psi(x))$ je Q_E-měřitelná a že (stejně omezená) posloupnost funkcí (3) konverguje Q_E-skoro všude na E k funkci

$$\frac{r^2(x)}{(x - x^0) \,.\, v(\psi(x))}\, v(\psi(x)) \,.\, v(\psi(x))\,.$$

Odtud plyne podle známé věty o limitním přechodu za integračním znamením vztah (2), čímž je naše lemma dokázáno.

Lemma 2. *Vektorová funkce v (viz lemma 1) je Q-měřitelná na H a pro každou spojitou vektorovou funkci v s kompaktním nosičem na H platí*

$$P(K, v) = \int_H v \,.\, v \,\mathrm{d}Q\,. \tag{4}$$

Důkaz. Vzhledem k poznámce 3 můžeme předpokládat, že K je kompaktní. Podržme označení z lemmatu 1. Zobrazení ψ je homeomorfní transformace sféry E na množinu H; převádí tedy borelovské podmnožiny v E na borelovské podmnožiny v H a naopak. Pro každou borelovskou množinu $M \subset E$ platí

$$Q\,\psi(M) = \int_M \frac{r^2(x)}{(x - x^0) \,.\, v(\psi(x))}\, \mathrm{d}Q_E(x) \tag{5}$$

(srovnej [2], str. 324–325). Odtud snadno plyne, že pro každou Q_E-měřitelnou množinu $M \subset E$ je množina $\psi(M)$ Q-měřitelná a že opět platí (5). Protože funkce $v(\psi(x))$ je Q_E-měřitelná na E, je $v(x)$ Q-měřitelná na H.

Je-li nyní v vektorová funkce s kompaktním nosičem na E_3, jejíž složky mají spojité parciální derivace prvního řádu, pak podle lemmatu 1 platí

$$P(K, v) = \int_E \frac{r^2(x)}{(x - x^0) \cdot v(\psi(x))} v(\psi(x)) \cdot v(\psi(x)) \, dQ_E(x) .$$

Odtud a z (5) plyne (4). Je-li konečně v libovolná spojitá vektorová funkce na (kompaktní) množině H, pak existuje posloupnost v^n vektorových funkcí na E_3 tak, že $v^n \to v$ stejnoměrně na H a že složky funkce v^n mají na E_3 spojité parciální derivace prvního řádu. Z rovnosti

$$P(K, v^n) = \int_H v^n \cdot v \, dQ$$

dostaneme (4) limitním přechodem.

Lemma 3. *Buď $\mathfrak{Q}$ systém všech Q-měřitelných podmnožin množiny H a zvolme index $i \in \langle 1, 3 \rangle$. Pak každá množina z $\mathfrak{Q}$ je současně Q^i-měřitelná i Q_i-měřitelná. Uvažujeme-li míry Q^i, Q_i na systému $\mathfrak{Q}$, pak jsou obě absolutně spojité vzhledem ke Q a platí*

$$\frac{dQ^i}{dQ} = v_i^+ , \quad \frac{dQ_i}{dQ} = v_i^- ;^{5)}$$

zde v_i značí i-tou složku vektorové funkce v (viz lemma 1).

Důkaz. Buď g spojitá funkce s kompaktním nosičem na H. Definujeme-li na H vektorovou funkci $v = [v_1, v_2, v_3]$ tak, že položíme $v_i = g$, $v_j = 0$ pro $j \neq i$, pak máme podle lemmatu 2

$$P_i(K, g) = P(K, v) = \int_H v \cdot v \, dQ = \int_H g \cdot v_i \, dQ .$$

Uvědomíme-li si, že

$$P_i(K, g) = \int_H g \, dQ^i - \int_H g \, dQ_i ,$$

dostáváme

$$\int_H g \, dQ^i - \int_H g \, dQ_i = \int_H g v_i \, dQ . \tag{6}$$

[5]) Je-li f bodová funkce, píšeme, jako obvykle, $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = (-f)^+$.

Rovnost (6) platí, jak snadno nahlédneme, také pro každou omezenou borelovsky měřitelnou funkci g s kompaktním nosičem na H. Odtud a ze vzájemné singularity měr Q^i, Q_i, uvažovaných na systému borelovských podmnožin v H (viz pozn. 1), plyne, že každá Q-nulová borelovská množina obsažená v H je současně $(\mathsf{Q}^i + \mathsf{Q}_i)$-nulovou množinou. Tedy každá množina z $\mathfrak{Q}$ je současně Q^i-měřitelná i Q_i-měřitelná. Odtud dále plyne, že vztah (6) platí pro každou omezenou Q-měřitelnou funkci g s kompaktním nosičem na H.

Zvolme na okamžik pevně kompaktní množinu $C \subset H$ a označme symbolem $\mathfrak{Q}_C$ systém všech podmnožin z $\mathfrak{Q}$ obsažených v C. Míry Q^i, Q_i, Q uvažované na $\mathfrak{Q}_C$ jsou úplně konečné a funkce v_i je na C $\mathfrak{Q}$-integrovatelná. Definujeme-li na $\mathfrak{Q}_C$ zobecněnou míru P_i předpisem

$$\mathrm{d}\mathsf{P}_i = v_i \, \mathrm{d}\mathsf{Q} \,,$$

pak ze vztahu (6) a ze vzájemné singularity měr Q^i, Q_i je patrno, že Q^i je positivní a Q_i je negativní variací zobecněné míry P_i na $\mathfrak{Q}_C$. Máme tedy na měřitelném prostoru $(C, \mathfrak{Q}_C)$ vztahy

$$\mathrm{d}\mathsf{Q}^i = v_i^+ \, \mathrm{d}\mathsf{Q} \,, \quad \mathrm{d}\mathsf{Q}_i = v_i^- \, \mathrm{d}\mathsf{Q}$$

(porovnej [3], cvič. 5, § 29, kap. VI, str. 124). Protože H je sjednocením spočetně mnoha kompaktních množin, dostáváme odtud ihned naše tvrzení.

Poznámka 4. Z lemmatu 3 ze vztahu $v_i^+ + v_i^- = |v_i| \leqq 1$ plyne nerovnost

$$\mathsf{Q}^i + \mathsf{Q}_i \leqq \mathsf{Q} \,. \tag{7}$$

Poznámka 5. Protože

$$\int_H v_i \, \mathrm{d}\mathsf{Q}^i = \int_H v_i \,.\, v_i^+ \, \mathrm{d}\mathsf{Q} = \int_H (v_i^+)^2 \, \mathrm{d}\mathsf{Q} \geqq 0 \,, \tag{8}$$

$$\int_H v_i \, \mathrm{d}\mathsf{Q}_i = \int_H v_i \,.\, v_i^- \, \mathrm{d}\mathsf{Q} = -\int_H (v_i^-)^2 \, \mathrm{d}\mathsf{Q} \leqq 0 \,, \tag{9}$$

je symbol $P_i(K, v_i)$ definován (porovnej pozn. 1) a

$$P_i(K, v_i) = \int_H (v_i^+)^2 \, \mathrm{d}\mathsf{Q} + \int_H (v_i^-)^2 \, \mathrm{d}\mathsf{Q} = \int_H v_i^2 \, \mathrm{d}\mathsf{Q} \geqq 0 \,.$$

Odtud je patrno, že existuje plošný integrál $P(K, v)$ a

$$P(K, v) = \sum_{i=1}^{3} P_i(K, v_i) = \int_H v \,.\, v \, \mathrm{d}\mathsf{Q} = \mathsf{Q}H \,.$$

Je-li nyní $v = [v_1, v_2, v_3]$ $\mathfrak{Q}$-měřitelná vektorová funkce na H, pro niž

$$\int_H |v - \nu| \, dQ < \infty , \tag{10}$$

pak podle (7)–(10) platí

$$\int_H v_i \, dQ^i > -\infty , \quad \int_H v_i \, dQ_i < \infty ,$$

$$P_i(K, v_i) = \int_H v_i \, dQ^i - \int_H v_i \, dQ_i > -\infty \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Vidíme, že plošný integrál $P(K, v) = \sum_{i=1}^{3} P(K, v_i)$ je definován pro každou $\mathfrak{Q}$-měřitelnou vektorovou funkci v na H, splňující vztah (10).

Lemma 4. *Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje spojitá vektorová funkce v na H tak, že*

$$|v(x)| = 1 \quad \textit{pro všechna} \quad x \in H$$

a

$$\int_H |v - \nu| \, dQ < \varepsilon .$$

Důkaz. Protože vektorová funkce ν je Q-měřitelná na H, existuje podle Luzinovy věty ([5], str. 72) uzavřená množina $F \subset H$ tak, že

$$Q(H - F) < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

a že ν je spojitá na F. Buď w taková spojitá vektorová funkce na H, že $w(x) = \nu(x)$ pro všechna $x \in F$ a $|w(x)| \leqq 1$ pro všechna $x \in H$. (Existence takové vektorové funkce plyne snadno ze známé věty o rozšíření spojité funkce.) Protože zřejmě

$$\nu(x) \, . \, (x - x^0) > 0$$

pro všechna $x \in H$, je množina $\hat{F} = \{x; x \in H, w(x) \, . \, (x - x^0) \leqq 0\}$ obsažena v $H - F$. Množina $\hat{F}$ je ovšem uzavřená. Sestrojme na H spojitou funkci g tak, aby bylo

$$g(x) = 1 \text{ pro } x \in \hat{F} , \quad g(x) = 0 \text{ pro } x \in F ,$$
$$1 \geqq g(x) \geqq 0 \text{ pro } x \in H .$$

Definujme nyní na H vektorovou funkci $\tilde{v}$ předpisem

$$\tilde{v}(x) = (1 - g(x)) \, w(x) + g(x) \, (x - x^0) .$$

Vektorová funkce $\tilde{v}$ je spojitá na H, $\tilde{v}(x) = \nu(x)$ pro $x \in F$,

$$\tilde{v}(x) \,.\, (x - x^0) = (1 - g(x))\, w(x) \,.\, (x - x^0) + g(x)\, |x - x^0|^2$$

pro všechna $x \in H$; speciálně tedy $|\tilde{v}(x)| > 0$ pro $x \in H$. Položíme-li konečně

$$v(x) = \frac{\tilde{v}(x)}{|\tilde{v}(x)|}, \quad x \in H,$$

pak v je spojitá jednotková vektorová funkce na H splývající s ν na F. Dále je

$$\int_H |v - \nu| \, dQ = \int_{H-F} |v - \nu| \, dQ \leqq 2Q(H - F) < \varepsilon,$$

čímž je naše tvrzení dokázáno.

Poznámka 6. Pro $M \subset H$ označíme symbolem χ_M charakteristickou funkci množiny M. (Oborem funkce χ_M je množina H.) Je-li v vektorová funkce na H, pak definujeme

$$P_M(K, v) = P(K, \chi_M \,.\, v)$$

za předpokladu, že je definován plošný integrál na pravé straně této rovnosti. ($P_M(K, v)$ je plošný integrál druhého druhu z vektorové funkce v přes množinu M.) Má-li smysl symbol $P(K, v)$, pak má také smysl symbol $P_M(K, v)$ pro každou Q-měřitelnou množinu $M \subset H$.

Věta. *Buď $\mathfrak{F}$ systém všech spojitých jednotkových vektorových funkcí v na H, pro něž existuje plošný integrál $P(K, v)$.*[6] *Potom platí pro každou Q-měřitelnou množinu $M \subset H$*

$$\sup_{v \in \mathfrak{F}} P_M(K, v) = QM.$$

Důkaz. Buď $v = [v_1, v_2, v_3] \in \mathfrak{F}$. Pak máme podle lemmatu 3

$$P_M(K, v) = \sum_{i=1}^{3} \left(\int_M v_i \, dQ^i - \int_M v_i \, dQ_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\int_M v_i \nu_i^+ \, dQ - \int_M v_i \nu_i^- \, dQ \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \int_M v_i \nu_i \, dQ = \int_M v \,.\, \nu \, dQ \leqq QM.$$

[6]) Je-li K kompaktní, pak ovšem do $\mathfrak{F}$ patří vůbec všechny jednotkové spojité vektorové funkce na H.

Zvolme nyní libovolně číslo $a < QM$. Podle lemmatu 4 existuje spojitá jednotková vektorová funkce v na H tak, že

$$a + \int_H |v - \nu| \,\mathrm{d}Q < QM .$$

Jak je patrno z poznámky 5, patří v do systému $\mathfrak{F}$. Dále máme

$$P_M(K, v) = \int_M v \,.\, \nu \,\mathrm{d}Q \geqq \int_M \nu \,.\, \nu \,\mathrm{d}Q -$$

$$- \int_M |v - \nu| \,\mathrm{d}Q = QM - \int_H |v - \nu| \,\mathrm{d}Q > a .$$

Odtud je vidět, že

$$\sup_{v \in \mathfrak{F}} P_M(K, v) = QM .$$

Poznámka 7. Je-li S konvexní plocha obsažená v H (tj. souvislá množina otevřená v H), pak z předchozí věty dostáváme, že supremum plošných integrálů druhého druhu přes plochu S z vektorových funkcí patřících do $\mathfrak{F}$ je rovno povrchu plochy S. Tím je řešen problém č. 191 z [1] (E. Čech, 24. V. 1952); faktor $\sqrt{D}$ vystupující za integračním znamením ve formulaci zmíněného problému je však třeba vypustit.

Idea, užít plošného integrálu druhého druhu k definici povrchové míry na hranici omezené lebesgueovsky měřitelné množiny v E_m byla rozvinuta J. Maříkem v práci [4]. Z výše uvedených výsledků je patrno, že v případě omezenosti konvexního tělesa K splývá míra Q (uvažovaná na systému borelovských podmnožin v H) s povrchovou mírou na H ve smyslu práce [4]; vektorová funkce ν je Q-skoro všude na H rovna normále ν z [4].

Literatura

[1] The new Scottish Book. Wrocław 1946—1958.

[2] *А. Д. Александров:* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Москва-Ленинград 1948.

[3] *П. Халмош:* Теория меры (P. R. Halmos: Measure Theory). Москва 1953.

[4] *J. Mařík:* The Surface Integral. Чех. мат. журн. *6 (81)*, 1956, 522—558.

[5] *S. Saks:* Theory of the Integral. New York.

Резюме

К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ ПЛОЩАДИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ИОСЕФ КРАЛ (J. Král), Прага

Пусть S — выпуклая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Символом Q будем обозначать поверхностную меру на S в смысле определения, данного в гл. X монографии [2]. Далее, пусть $\mathfrak{F}$ — система всех непрерывных векторных функций $v = [v_1, v_2, v_3]$, $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, для которых имеет смысл поверхностный интеграл $P(v)$ второго рода от v по S. (Разумеется, что в случае ограниченности поверхности S система $\mathfrak{F}$ содержит вообще все непрерывные единичные векторные функции на S.) Для каждого Q-измеримого множества $M \subset S$ и каждой функции $v \in \mathfrak{F}$ можно тоже определить поверхностный интеграл $P_M(v)$ второго рода от v по M. При этих обозначениях справедливо равенство

$$\mathrm{Q}M = \sup_{v \in \mathfrak{F}} P_M(v) .$$

Это утверждение можно тоже вывести из известных теорем теории площади поверхности. Здесь приводится простое доказательство, исьпользующее кроме теоремы Лузина лишь основные свойства меры Q, изложенные в монографии [2]. Этим решена проблема № 191 из „Новой шотландской книги", вписанная Э. Чехом (E. Čech).

Summary

ON A PROBLEM CONCERNING THE AREA OF A CONVEX SURFACE

Josef Král, Praha

Let S be a convex surface (in Euclidean 3-space) and let us denote by Q the surface measure on S in the sense of the definition given in [2], chap. X. Further, let $\mathfrak{F}$ be the system of all continuous vector-valued functions $v = [v_1, v_2, v_3]$ on S with $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, for which the Weierstrass surface integral $P(v)$ of v over S is available. (Of course, $\mathfrak{F}$ contains all continuous unit-vector-valued functions on S, whenever S is bounded.) For every Q-measurable set $M \subset S$ and every $v \in \mathfrak{F}$ the Weierstrass integral $P_M(v)$ of v over M can also be defined and we have

$$\mathrm{Q}M = \sup_{v \in \mathfrak{F}} P_M(v) .$$

This assertion, which could also be derived from known results of area theory, is proved here simply by using Lusin's theorem and the basic properties of Q established in [2]. It represents a solution of the problem № 191 in "The new Scottish Book", inscribed by E. Čech.