

František Hladík

Poznámka o rovnici $y'' + \phi y' + \psi y = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 372--373

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117371>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

RŮZNÉ

POZNÁMKA O ROVNICI $y'' + \varphi y' + \psi y = 0$

FRANTIŠEK HLADÍK, Písek

Věta. *Nechť funkce φ, ψ' jsou spojité na intervalu (a, b) a necht' ψ nemění na tomto intervalu znaménko. Necht'*

$$(1) \quad \frac{F^2}{F' + \varphi F} = \alpha,$$

kde α je nenulová konstanta a $F = 2\varphi + \psi'/\psi$. Pak lze rovnici

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \varphi(x) \cdot \frac{dy}{dx} + \psi(x) y = 0$$

převést substitucí

$$(3) \quad \eta(\xi) = y(x), \quad \xi = -\alpha F^{-1}(x_1) + \int_{x_1}^x \exp\left(-\int_{x_1}^s \varphi(r) dr\right) ds, \quad x_1 \in (a, b)$$

na rovnici

$$(4) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + k|\xi|^{-\alpha} \eta = 0.$$

Poznámka. Jestliže $\alpha = 0$, pak lze rovnici (2) převést na rovnici

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{\psi}{|\psi|} \eta = 0 \quad \text{substitucí} \quad \xi = \int \sqrt{|\psi|}, \quad \eta(\xi) = y(x).$$

Jestliže $\alpha = 2$, pak rovnice (4) je rovnice Eulerova. Jestliže $\alpha = 4k/(2k - 1)$, kde k je celé číslo, pak lze rovnici (4) převést na rovnici Riccatiho, která je řešitelná pomocí elementárních funkcí.

Důkaz. Záměnou (3) přejde rovnice (2) v rovnici

$$(5) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \psi(x) e^{2 \int_{x_1}^x \varphi(r) dr} \cdot \eta = 0,$$

kde $x = x(\xi)$. Ze vztahu (1) plyne, že F^{-1} je řešením rovnice $u' - \varphi u = -1/\alpha$. Můžeme tedy psát, použijeme-li vztahu (3),

$$F^{-1}(x) = -\frac{\xi(x)}{\alpha \xi'(x)}.$$

Odtud plyne

$$\left| \frac{\xi(x)}{\xi(x_1)} \right|^{-\alpha} = e^{2 \int_{x_1}^x \varphi(s) ds} \cdot \frac{\psi(x)}{\psi(x_1)}.$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (5), obdržíme (4).

Poznámka. Použitím této věty snadno nalezneme řešení, např. rovnic

$$y'' - y' \cotg x + a \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} y = 0 \quad \text{a} \quad y'' + \frac{2x+1}{x^2} y' + \frac{a^2}{x^4} y = 0.$$

PŘIBLIŽNÁ KONSTRUKCE PRAVIDELNÉHO SEDMIÚHELNÍKA

P. HUGO VORLÍČEK, Havlíčkův Brod, zaslal redakci tuto přibližnou konstrukci pravidelného sedmiúhelníka

Buď k kružnice o poloměru 1 se středem v počátku v rovině s kartézskou souřadnou soustavou. Sestrojme body $A = [1, 0]$, $B = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$, $C = [\frac{5}{9}, 0]$. (Bod B leží na k a má od bodu A vzdálenost 1.) Strana pravidelného sedmiúhelníka, vepsaného do kružnice k , se pak přibližně rovná vzdálenosti bodu B od bodu C . Jestliže totiž středový úhel, příslušný k tětivě délky d , označíme symbolem α , je

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{18}\sqrt{61},$$

a tedy $\alpha \doteq 51^\circ 25' 51,6''$. Chyba $\alpha - 360^\circ/7$ je přibližně rovna $8,7''$.

Redakce