Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

POZNÁMKA O SPOČETNÝCH MNOŽINÁCH V ROVINĚ

LADISLAV KOSMÁK, Brno

(Došlo dne 8. června 1960)

V článku se zobecňují výsledky obsažené v práci [1].

V [1] je podána konstrukce jednoduché lomené čáry, jejíž každý druhý vrchol*) je prvkem speciálně definované spočetné množiny husté v rovině a která tak celou tuto množinu pokrývá. Lze však snadno dokázat obecnější a silnější tvrzení.

Řekneme, že lomená čára v rovině má střídavě rovnoběžné strany, když existují takové dvě různoběžky, že každá z libovolných dvou sousedních stran lomené čáry je s některou z nich rovnoběžná. Dále definujeme, že body libovolné konečné nebo spočetné množiny jsou hustě spojeny lomenou čarou, je-li právě každý druhý vrchol lomené čáry bodem této množiny a je-li množina lomenou čarou pokryta. Platí:

Věta. *Ke každé spočetné množině S, která je hustá v rovině E_2, lze sestrojit jednoduchou lomenou čáru (ať už s počátečním bodem nebo oboustranně nekonečnou), která má střídavě rovnoběžné strany a hustě spojuje body množiny S.*

Důkaz. Body množiny S lze uspořádat do posloupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje nespočetně mnoho přímek p v E_2 takových, že každá rovnoběžka s p prochází nejvýš jedním bodem množiny S; zvolme dvě takové přímky p_1, p_2.

Zřejmě existuje jednoduchá lomená čára L_2, jejíž strany jsou střídavě rovnoběžné s p_1 a p_2 a která hustě spojuje body A_1, A_2. Nechť $n \geqq 2$ a předpokládejme, že již byla sestrojena jednoduchá lomená čára L_n, která má strany rovněž střídavě rovnoběžné s p_1, p_2 a hustě spojuje body jisté konečné části množiny S obsahující body A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Jestliže L_n obsahuje bod A_{n+1}, položme $L_{n+1} = L_n$. V opačném případě čáru L_n nejprve orientujme; chceme-li sestrojit lomenou čáru s krajním bodem A_1, zachováváme pevnou orientaci, při níž A_1 je počáteční bod, zatím co při konstrukci oboustranně nekonečné lomené čáry orientaci měníme např. podle parity čísla n. Označme Q koncový bod čáry L_n při zvolené orientaci a předpokládejme, že $Q \in S$.

Veďme bodem A_{n+1} rovnoběžku např. s přímkou p_1. Jestliže tato rovnoběžka p_1' protíná L_n, nechť B je průsečík nejbližší bodu A_{n+1} (jsou-li dva, tedy kterýkoliv z nich). Bod B nemůže být vrcholem lomené čáry L_n; označme V_k jemu nejbližší vrchol

*) Vrcholem rozumíme všude vlastní vrchol, tj. takový, při němž leží úhel $\neq \pi$.

ležící na L_n mezi body Q, B, po případě bod Q sám. Neprotíná-li p'_1 lomenou čáru L_n, označme V_k jeden z jejích vrcholů, které mají nejmenší vzdálenost od p'_1 (takové vrcholy jsou nejvýše dva) a B průsečík přímky p'_1 s rovnoběžkou vedenou bodem V_k s přímkou p_2. Nechť L'_k je lomená čára, která má s L_n společnou část od bodu Q k bodu V_k a pokračuje pak úsečkami V_kB, BA_{n+1}; zřejmě L'_k je jednoduchá. Z předpokladů o množině S plyne možnost sestrojit dostatečně blízko podél L'_k jednoduchou lomenou čáru L''_k, jejíž strany jsou střídavě rovnoběžné s p_1, p_2, která hustě spojuje body jisté konečné množiny $S_{n+1} \subset S$ obsahující body Q, A_{n+1} a která nemá s L_n kromě krajního bodu Q žádný další průsečík, při čemž bod Q je vlastním vrcholem lomené čáry $L_n \cup L''_k$, jejíž oba krajní body patří do množiny S. O tom se lze snadno přesvědčit i bez podrobného popisu této konstrukce. Položme $L_{n+1} = L_n \cup L''_k$; lomená čára $L = \bigcup_{n=2}^{\infty} L_n$ má všechny vlastnosti požadované ve větě.

Protože každou spočetnou množinu v E_2 lze vnořit do spočetné množiny husté v E_2, plyne z dokázané věty, že **každou spočetnou množinu v rovině lze pokrýt jednoduchou lomenou čarou tak, že body této množiny leží nejvýš v jejích vrcholech.** Otázkou zůstává, zda naše věta platí i bez předpokladu, že S je hustá v E_2.

Literatura

[1] *V. Polák*: O jistém pokrytí racionálních bodů v rovině nekonečnou jednoduchou lomenou čarou. Časopis pro pěstování matematiky *85* (1960), 141—145.

Резюме

ЗАМЕТКА О СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ, ПЛОТНЫХ В ПЛОСКОСТИ

Л. КОСМАК (L. Kosmák), Брно

Пусть M — счетное множество, плотное в плоскости. Тогда можно построить непересекающуюся ломаную $A_1A_2A_3 \dots$ таким образом, что ее звенья попеременно параллельны двум удобно заданным прямым и что $\{A_1, A_3, A_5, \dots\} = M$ (см. [1]).

Zusammenfassung

ÜBER ABZÄHLBARE MENGEN, DIE IN DER EBENE DICHT SIND

L. Kosmák, Brno

Es sei eine abzählbare Menge M gegeben, die in der Ebene dicht ist. Man kann einen einfachen gebrochenen Streckenzug $A_1A_2A_3 \dots$ so konstruieren, dass seine Strecken wechselnd mit zwei geeignet gegebenen Geraden parallel sind und dass $\{A_1, A_3, A_5, \dots\} = M$ ist (vgl. [1]).