Karel Čulík

Абсолютный ранг квадратной матрицы

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 4, 457--464

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117348`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

АБСОЛЮТНЫЙ РАНГ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 27/X 1959 г.)

Две матрицы одного и того же типа называются родственными, если их нулевые элементы расположены на тех же местах. Исследуется вопрос, как изменяется ранг матрицы при переходе к родственной матрице, т. е. при изменении ее ненулевых элементов, если не допускать, чтобы из них получились нули. Выводится несколько необходимых и достаточных условий для того, чтобы наименьший из рангов всех матриц, родственных квадратной матрице (т. наз. абсолютный ранг) порядка n, был также n. Далее выводятся некоторые результаты, касающиеся абсолютного ранга матриц.

В дальнейшем мы всюду предполагаем (поскольку не будет оговорено иное), что элементы матрицы взяты из любого поля, содержащего хотя бы три элемента. Элементы нулевой, единичный и обратный к единичному мы обозначаем в каждом таком поле, как обычно, через 0, 1, —1.

Матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ одного и того же типа m/n мы называем *родственными*, если для любого i, $1 \leqq i \leqq m$ и любого j, $1 \leqq j \leqq n$

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0\,. \tag{1}$$

Отношение родственности является, очевидно, эквивалентностью на множестве всех матриц над данным полем.

Рассмотрим прежде всего квадратную матрицу A с n строками, удовлетворяющую следующему условию:

(2) *существует n ненулевых элементов матрицы A, из которых никакие два не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце.*

Лемма 1. *Если квадратная матрица удовлетворяет условию* (2), *то существует родственная ей матрица, являющаяся неособенной. Для матриц над полем с двумя элементами это утверждение не обязательно справедливо.*

Доказательство. Пусть квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ с n строками удовлетворяет условию (2). Для $n = 1$ лемма, очевидно, справедлива. Допустим, что она справедлива и для $n - 1 \geqq 1$. Если a_{rs} — один из элементов, удовлетворяющих условию (2), то символом A_{rs} обозначим подматрицу матрицы A, получающуюся путем вычеркивания r-й строки и s-го столбца. Тогда A_{rs} также удовлетворяет условию (2) и по предположению индукции существует неособенная матрица A'_{rs}, родственная матрице A_{rs}. Пусть матрица $B = \|b_{ij}\|$ получается из A таким образом, что подматрица A_{rs} заменяется матрицей A'_{rs}. Тогда, конечно, B — матрица, родственная A, и согласно лапласовскому разложению определителя $|B|$ по элементам r-й строки будет

$$(3) \qquad |B| = b_{rs}|B_{rs}|(-1)^{r+s} + c\,, \quad \text{где} \quad c = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{n} b_{ri}|B_{ri}|(-1)^{r+i}\,,$$

причем $b_{rs}|B_{rs}| \neq 0$.

Если $|B| \neq 0$, то уже B будет искомой матрицей, а если $|B| = 0$, то $c \neq 0$, и мы подберем b'_{rs} так, чтобы $0 \neq b'_{rs} \neq b_{rs}$, что всегда возможно, если поле, над которым построены матрицы, содержит хотя бы три элемента. Тогда матрица B', полученная из B заменой элемента b_{rs} на b'_{rs}, будет искомой матрицей.

Наконец ясно, чот хотя квадратная матрица с $n > 1$ строками над полем с двумя элементами, все элементы которой равны 1, и выполняет условие (2), однако каждая родственная ей матрица над этим полем равна ей самой, т. е. является особенной.

Лемма 2. *Пусть M — матрица типа $n/n+1$ $(n+1/n)$ и пусть M_i означает квадратную подматрицу, полученную путем вычеркивания i-го столбца (i-й строки) матрицы M. Если существуют подматрицы M_i и M_k $i \neq j$, каждая из которых удовлетворяет условию* (2), *то существует такая матрица M', родственная M, что обе подматрицы M'_i и M'_j — неособенные.*

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо, и допустим, что оно справедливо и для $n - 1 \geq 1$. Пусть $M = \|a_{ij}\|$ будет типа $n/n+1$ и пусть для ее подматриц M_i и M_j выполняются условия леммы. Тогда среди элементов, о которых говорится в условии (2), имеется элемент a_{hj} из M_i и элемент a_{ki} из M_j (если сохранить обозначения элементов в M). Обозначим через N подматрицу матрицы M, полученную путем вычеркивания ее i-го и j-го столбцов, так что N будет типа $n/n-1$. Тогда матрицы N_h и N_k (полученные путем вычеркивания h-й и k-й строк из N) будут обе подматрицами как матрицы M_i, так и матрицы M_j, и будут обе удовлетворять условию (2). Далее мы вудем различать два случая:

1. $h \neq k$. Тогда по предположению индукции существует матрица N', родственная N, причем обе ее подматрицы N'_h и N'_k — неособенные. Пусть матрица P возникает из матрицы M заменой подматрицы N матрицей N'. Тогда, по аналогии с (3), согласно лапласовскому разложению определи-

теля $|P_i|$ по элементам j-го столбца (при обозначениях матрицы M) и определителя $|P_j|$ по элементам i-го столбца, имеют место соотношения

$$(4) \qquad |P_i| = a_{hj}|N'_h|(-1)^p + c\,, \quad |P_j| = a_{ki}|N'_k|(-1)^q + d\,,$$

где p и q — надлежащим образом подобранные четные или нечетные натуральные числа, а c и d — остаточные члены разложений. Из (4) непосредственно следует, что элементы a_{hj} и a_{ki} можно заменить подходящими элементами a'_{hj} и a'_{ki} так, чтобы $a'_{hj} \neq 0 \neq a'_{ki}$ и чтобы в полученной таким образом матрице M' обе ее подматрицы M'_i и M'_j были неособенными. Притом, конечно, и здесь M' родственна матрице M.

2. $h = k$. Тогда $N_h = N_k$, и по лемме 1 существует матрица N'_h, родственная N_h и неособенная. Пусть матрица P образована из M так, что подматрица N_h заменяется подматрицей N'_h. Тогда для подматриц P_i и P_j опять-таки имеет место (4), и далее мы поступаем так же, как и в случае 1. Этим и завершается доказательство.

Абсолютным рангом матрицы A называем наименьшей из рангов всех матриц, родственных матрице A, и обозначаем его через $h[A]$. Матрицу A (квадратную) называем *абсолютно неособенной*, соотв. *особенной*, если каждая родственная ей матрица является неособенной, соотв. особенной.

Если матрица A родственна матрице B, то $h[A] = h[B]$. Если матрица B получается из матрицы A путем замены некоторых строк между собой и некоторых столбцов между собой, то $h[B] = h[A]$. Если A' — матрица, транспонированная по отношению к матрице A, то опять $h[A'] = h[A]$.

Теорема 1. *Для квадратной матрицы $A = ||a_{ij}||$ с n строками следующие условия являются эквивалентными:*

а) *A — абсолютно неособенная матрица.*

б) *В каждой строке и в каждом столбце существует точно один такой элемент, напр. a_{rs}, что $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$, причем это имеет место для любой матрицы, родственной A. Более того, для этих элементов $0 \neq a_{rs}|A_{rs}| \cdot (-1^{s+r}) = |A|$.*

в) *Существует в точности одна n-ка элементов, которая удовлетворяет (2). Если это элементы $a_{i\alpha_i}$, $1 \leq i \leq n$, то $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} = \pm\, |A|$.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б) Если A — абсолютно неособенная матрица, то она также является неособенной, и согласно лапласовскому разложению определителя $|A|$ по какому-либо столбцу или строке, в каждой строке и в каждом столбце должен существовать элемент, напр. a_{rs}, для которого $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$. Если бы, однако, для одного из таких элементов имело место $0 \neq a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} \neq |A|$, то можно было бы определить матрицу $B = ||B_{ij}||$ так: $b_{rs} = (a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} - |A|)/(|A_{rs}|(-1)^{r+s})$ и $b_{ij} = a_{ij}$, если или $i \neq r$ или $j \neq s$. Однако, B — матрица родственная A и притом — неособенная, что невозможно. Остаются поэтому следующие возможности: для каждого элемента a_{ij} имеет место или $a_{ij}|A_{ij}|(-1)^{i+j} = |A|$ или $a_{ij}|A_{ij}| = 0$. Отсюда уже, согласно лапласовскому разложению определителя $|A|$, следует б), конечно, и для любой матрицы, родственной матрице A.

б) $\Rightarrow$ в) Пусть справедливо б), так что в первой строке матрицы A имеется элемент $a_{1\alpha_1}$, для которого $0 \neq a_{1\alpha_1}|A_{1\alpha_1}|(-1)^{1+\alpha_1} = |A|$. Тогда, конечно, $|A_{1\alpha_1}| \neq 0$ и, очевидно, существует перестановка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которой будет $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} \neq 0$ т. е. выполняется условие (2). Далее применим доказательство от противного. Допустим, что и для перестановки $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ имеет место $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$, т. е. что не справедливо в). Прежде всего существует индекс r такой, что $\alpha_r \neq \beta_r$. Для подматрицы $A_{r\alpha_r}$ и $A_{r\beta_r}$, очевидно, выполняется условие (2), значит, для подматрицы M, образованной из матрицы A вычеркиванием ее r-й строки, выполняются условия леммы 2. Поэтому существует матрица M', родственная M, и обе соответствующие подматрицы $A'_{r\alpha_r}$ и $A'_{r\beta_r}$ — неособенные. Пусть A' возникает из A заменой подматрицы M матрицей M' Тогда A' родственна A и, кроме того, $a_{r\alpha_r}|A'_{r\alpha_r}| \neq 0 \neq a_{r\beta_r}|, A'_{r\beta_r}$ что противоречит условию б).

в) $\Rightarrow$ а) ясно без доказательства.

Теорема 2. *Квадратная матрица с n строками является абсолютно особенной, если и только если она не удовлетворяет условию* (2).

Доказательство. Если данная матрица выполняет условие (2), то по лемме 1 существует родственная ет матрица, являющаяся неособенной, так что данная матрица не будет абсолютно особенной. Достаточность указанного условия очевидна.

Следствие 1. *Абсолютно неособенную квадратную матрицу можно заменой ее строк или столбцов привести к такому виду, в котором все главные миноры являются определителями абсолютно неособенных главных подматриц.*

Доказательство. По теореме 1 в абсолютно неособенной квадратной матрице $A = \|a_{ij}\|$ с n строками существует точно одна перестановка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которой $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} \neq 0$. Тогда можно поменять местами столбцы так, чтобы элемент $a_{i\alpha_i}$ перешел в i-й столбец для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом получится некоторая матрица $B = \|b_{ij}\|$, являющаяся также абсолютно неособенной, причем $b_{ii} = a_{i\alpha_i}$ для $1 \leqq i \leqq n$.

Пусть $|M|$ — главный минор порядка m, $1 \leqq m \leqq n$ матрицы B; предположим для простоты, что квадратная подматрица M образована вычеркиванием i-й строки и i-го столбца для $i = m + 1, \ldots, n$. Тогда подматрица M выполняет условие (2) для элементов $\prod_{i=1}^{m} b_{ii} \neq 0$, так что по теореме 2 она не будет абсолютно особенной. Но если бы она была, с другой стороны, абсолютно неособенной, то по теореме 1 существовала бы перестановка $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ чисел $1, 2, \ldots, m$, отличная от основной перестановки $(1, 2, \ldots, m)$ и должно было бы иметь место неравенство $\prod_{i=1}^{m} b_{i\beta_i} \cdot \prod_{i=m+1}^{n} b_{ii} \neq 0$, что невозможно.

Теорема 3. *Квадратная матрица с n строками является абсолютно неособенной, если и только если ее можно заменой ее строк или столбцов привести к таковому виду $A = \|a_{ij}\|$, что*

1. *все главные миноры порядка $m < n$ матрицы A являются определителями абсолютно неособенных матриц и*

2. *если $|M|$ есть минор матрицы A, не являющийся главным, а $|M^*|$ — его дополнение, то $|M| \cdot |M^*| = 0$; это справедливо и для всех матриц, родственных матрице A.*

Доказательство. Если данная матрица — абсолютно неособенная, то согласно следствию 1 ее можно заменой строк или столбцов привести к такому виду $A = \|a_{ij}\|$, что справедливо 1. Пусть $|M|$ — минор порядка m, не являющийся главным, а $|M^*|$ — его дополнение в определителе $|A|$, и пусть $|M| \cdot |M^*| \neq 0$. Тогда, конечно, матрицы M и M^* выполняют (2) и, далее, для каждой m-ки элементов $a_{j_i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq m$ из M и для каждой $(n-m)$-ки элементов $a_{j_i\alpha_i}$, $m + 1 \leqq i \leqq n$ из M^*, которые удовлетворяют (2), $\prod_{i=1}^{n} a_{j_i\alpha_i} \neq 0$ и, следовательно, согласно теореме 1, все элементы должны быть взяты из главной диагонали матрицы A, т. е. минор M должен быть главным, что невозможно. Итак, A, так же как и каждая родственная ей матрица, выполняют условие (2).

Если данная матрица не является абсолютно неособенной, но заменой ее строк или столбцов ее можно привести к виду $A = \|a_{ij}\|$, удовлетворяющему 1 и 2, то и матрица A не будет абсолютно неособенной и, следовательно, существует особенная матрица $B = \|b_{ij}\|$, родственная A. Притом, однако, матрица B выполняет условие 1, поэтому неравенство $b_{ii}|B_{ii}| \neq 0$ справедливо для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Из лапласовского разложения определителя $|B|$ по любой i-й строке (или по любому i-му столбцу) и из $|B| = 0$ следует существование элемента b_{ik}, $k \neq i$ для которого было бы $b_{ik}|B_{ik}| \neq 0$, что невозможно для 2.

Тогда как по условию в) из теоремы 1 вопрос о том, является ли данная квадратная матрица абсолютно неособенной, можно решить только на основании свойств самой матрицы, по условию б) необходимо исследовать не только данную матрицу, но и все родственные ей матривы. В случае матрицы над бесконечным полем этот критерий нужно поэтому считать неэффективным. В подобном же положении находится и условие 2 из теоремы 3. Весьма вероятно, однако, что теорема 1 и теорема 3 останутся в силе, если в них условия б) и 2 заменить более слабыми условиями, т. е. условиями

б′) *В каждой строке и в каждом столбце квадратной матрицы* $A = \|a_{ij}\|$ *имеется в точности один элемент, напр.,* a_{rs}, *такой, что* $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$.

2′. *Если* $|M|$ — *минор матрицы* A, *не являющийся главным, и если* $|M^*|$ — *его дополнение в* A, *то* $|M| \, . \, |M^*| = 0$.

Ни одно из этих двух условий пока не удалось доказать. Оба условия тесно связаны между собой и их можно сформулировать также в виде такого вопроса:

Пусть квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ *с* n *строками выполняет условия* 1 *и* 2′. *Можно ли утверждать, что тогда не существует перестановка* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *чисел* $1, 2, \ldots, n$, *отличная от основной перестановки* $(1, 2, \ldots, \ldots, n)$1 *для которой имеет место* $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Матрица A — неособенная, и при доказательстве от противного нет необходимости рассматривать такие перестановки $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, которые не удовлетворяют условию

$$\beta_i \neq i \text{ для любого } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Действительно, если бы было, напр., $\beta_j = j$, то подматрица $A_{j\beta_j}$ не была бы по теореме 1 абсолютно неособенной, что противоречит условию 1.

Перестановками, удовлетворяющими условию (5), в частности определением их числа, занимался целый ряд математиков, напр. Л. Эйлер, Й. Й. Сильвестер и др. (см. E. Netto: Lehrbuch der Combinatorik, Лейпциг 1901, стр. 66—74).

Výtah

ABSOLUTNÍ HODNOST ČTVERCOVÉ MATICE

Karel Čulík, Brno

Matice $A = \|a_{ij}\|$ a $B = \|b_{ij}\|$ téhož typu m/n se nazývají *příbuzné*, jestliže pro každé i, $1 \leqq i \leqq m$ a každé j, $1 \leqq j \leqq n$ platí: $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0$. *Absolutní hodností* matice se rozumí nejmenší z hodností všech matic příbuzných s maticí danou. Zejména čtvercová matice se nazývá *absolutně regulární* příp. *singulární*, jestliže každá s ní příbuzná matice je regulární příp. singulární. Jsou-li prvky uvažovaných matic z tělesa obsahujícího alespoň tři prvky a označujeme-li nulový, jednotkový a opačný k jednotkovému obvyklým způsobem 0, +1 a −1, platí:

Věta 1. *Pro čtvercovou matici $A = \|a_{ij}\|$ o n řádcích jsou ekvivalentní podmínky:*

a) *A je absolutně regulární.*

b) *V každém řádku a v každém sloupci matice A existuje právě jeden prvek, např. a_{rs}, takový, že $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$ a totéž platí pro každou matici příbuznou s A. Pro tyto prvky dokonce platí $0 \neq a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} = |A|$, když $|A_{rs}|$ je doplněk prvku a_{rs} v determinantu $|A|$.*

c) *Existuje právě jedna n-tice nenulových prvků z A, z nichž žádné dva nepatří do téhož řádku ani do téhož sloupce. Jsou-li to prvky $a_{i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq n$, platí zřejmě $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} = \pm |A|$.*

Věta 3. *Čtvercová matice o n řádcích je absolutně regulární právě tehdy, když ji lze výměnou jejích řádků nebo sloupců uvést na takový tvar $A = \|a_{ij}\|$, že platí:*

1. *Všechny hlavní podmatice řádu $m < n$ matice A jsou absolutně regulární a*

2. *Jestliže $|M|$ je minor matice A, který není hlavní, a jestliže $|M^*|$ je jeho doplněk, pak $|M| \,.\, |M^*| = 0$ a totéž platí pro každou matici příbuznou s A.*

Nepodařilo se však dokázat tyto věty v případě, že v nich zeslabíme podmínky b) příp. 2 vypuštěním dovětku „*a totéž platí pro každou matici příbuznou s A*". Zejména lze pro čtvercovou matici $A = \|a_{ij}\|$ o n řádcích, která splňuje podmínku 1 a příslušně zeslabenou podmínku 2, položit tuto otázku:

Může existovat permutace $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ čísel 1, 2, …, n, která je různá od permutace základní $(1, 2, \ldots, n)$ a pro niž platí $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Snadno se nahlédne, že takovéto permutace mohou být jenom mezi těmi, které splňují podmínku $\beta_i \neq i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Summary

ABSOLUTE RANK OF SQUARE MATRICES

KAREL ČULÍK, Brno

Matrices $A = \|a_{ij}\|$ and $B = \|b_{ij}\|$ of the same type m/n are said to be related, if $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0$ for all i, j $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$. The *absolute rank* of a matrix is the minimum of ranks of all matrices related to the given matrix. A square matrix is said to be *absolute regular* resp. *singular*, if every matrix

related to it is regular resp. singular. If the elements of matrices belong to a field containing at least three elements and if zero, the unit and its opposite are denoted by 0, 1 and -1, then there hold the following theorems:

Theorem 1. *For a square matrix $A = \|a_{ij}\|$ with n rows the following conditions are equivalent:*

a) A is absolute regular.

b) In every row and in every column of A there exists just one element, e. g. a_{rs} such that $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$ and the same is valid for every matrix related to A.

c) There exists just one n-uple of non-zero elements of A such that no two of these elements belong to the same row or column.

Theorem 3. *A square matrix with n rows is absolute regular if and only if it is possible by a permutation of its rows or columns to obtain a matrix $A = \|a_{ij}\|$ such that*

1. *all the main submatrices of degree $m < n$ of A are absolute regular and*

2. *if $|M|$ is a minor of A which is not main, and if $|M^*|$ is its complementary minor, then $|M| \,.\, |M^*| = 0$ and the same is valid for every matrix related to A.*

There remains unsolved the problem, whether the phrase "and the same is valid for every matrix related to A" can be omitted in these theorems (in conditions b) and 2). Namely for a square matrix $A = \|a_{ij}\|$ with n rows satisfying the condition 1 and the weaker (in the previous sense) condition 2, there arises the following question:

Does there exist a permutation $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ of integers 1, 2, …, n different from $(1, 2, \ldots, n)$ such that $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Such a permutation must satisfy the condition $\beta_i \neq i$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$.