Petr Mandl

Об асимптотическом поведении вероятностей внутри групп состояний однородного процесса Маркова

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 4, 448--456

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117347

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВНУТРИ ГРУПП СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОЦЕССА МАРКОВА

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

(Поступило в редакцию 12/X 1959 г.)

В статье исследуется предельное поведение распределения вероятностей в множестве состояний однородного процесса Маркова с конечным числом состояний при предложении, что пребывание системы в данном множестве не нарушалось.

Настоящая работа непосредственно примыкает к статье [3]. В ней выводятся для однородных процессов Маркова с конечным числом состояний результаты, полученные в работе [3] для цепей.

Пусть задана матрица $Q = \|q_{ij}\|$ плотностей вероятности перехода такого процесса. Возьмем какое-либо множество T состояний процесса и начальное распределение вероятностей, данное вектором p и сосредоточенное целиком на состояния множества T. Предметом наших исследований будет предельное поведение величин $P_j(t|T)$, обозначающих вероятность того, что система будет в момент времени t находиться в состоянии j, при условии, что до момента t система пребывала непрерывно в состояниях, принадлежащих классу T. Вектор этих величин мы овозначим через $\boldsymbol{P}(t|T)$.

Прежде всего мы будем исследовать величины $P_{ij}(t; T)$ для $i \in T$, $j \in T$, обозначающие вероятность того, что система, находящаяся в момент времени 0 в состоянии i, будет по крайней мере до момента t непрерывно пребывать в классе T и в момент t будет находиться в состоянии j. Матрицу величин $P_{ij}(t; T)$ мы будем обозначать через $\boldsymbol{P}(t; T)$. Положим

$$^{(0)}P_{ij}(t; T) = \delta_{ij} e^{q_{ii}t} ,$$

$$^{(n+1)}P_{ij}(t; T) = \int_0^t e^{q_{ii}(t-s)} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in T}} q_{ik} {}^{(n)}P_{kj}(s; T) \, \mathrm{d}s .$$

Сразу же видно, что $^{(n)}P_{ij}(t; T)$ означает вероятность того явления, что система, которая была в момент 0 в состоянии i, будет в момент t в состоянии j, изменит свое состояние в точности n раз и не выйдет притом из класса T. (См. также подробное обсуждение таких представлений в [2]). Итак, мы имеем $P_{ij}(t; T) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(n)}P_{ij}(t; T)$. Пусть Q_T — подматрица матрицы Q, образованная из плотностей вероятности перехода между состояниями класса T. Легко убедиться, что $\boldsymbol{P}(t; T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{P}(t; T) = Q_T \boldsymbol{P}(t; T) ,$$

и ввиду начального условия $\boldsymbol{P}(0; T) = E$ получаем $P(t; T) = \exp Q_T t$.

Определение. Множество S состояний однородного процесса Маркова назовем *регулярным*, если матрица Q_S плотностей вероятности перехода между состояниями множества S неразложима.

Теорема 1. *В случае, когда T регулярно, для каждого $j \in T$ существует предел*

$$\lim_{t \to \infty} P_j(t/T) = P_j(T) > 0 ,$$

не зависящий от начального распределения вероятностий.

Доказательство. В случае, когда множество T регулярно, матрице Q_T соответствует характеристическое число ϱ, имеющее наибольшую действительную часть. Такое число — действительное, простое, причем $\varrho \leqq 0$. Этому характеристическому числу соответствует характеристический вектор, имеющий сплошь положительные компоненты. В этом мы убедимся следующим образом: пусть $q > \max_{i \in T} |q_{ii}|$. Матрица $R = qE + Q_T$ имеет сплошь неотрицательные элементы и диагональ состоит из положительных элементов. Поэтому она — ациклическая, и так как матрица Q_T была неразложима, то и R неразложима. Итак, существует (напр., согласно [3], доказательство теоремы 1) положительный, простой и действительный характеристический корень λ_0 матрицы $R = \|r_{ij}\|$, наибольший по абсолютной величине из всех корней. Имеем для $i \in T$ $\sum_{j \in T} q_{ij} \leqq 0$, откуда $\sum_j r_{ij} \leqq$ $\leqq q$. Из этого видно, что $\lambda_0 \leqq q$. Если $\{\lambda_j\}$ — система характеристических чисел матрицы R, то $\{\lambda_j - q\}$ — система характеристических чисел матрицы Q_T. Теперь уже легко видеть, что $\varrho = \lambda_0 - q$ является характеристическим числом матрицы Q_T, имеющим требуемые свойства.

Характеристическому корню λ_0 соответствует (см. также [3]) характеристический вектор k, имеющий сплошь положительные компоненты. Из соотношения $0 = (\lambda_0 E - R)\, k = (\varrho E - Q_T)\, k$ видно, что k — характеристический вектор матрицы Q_T, соответствующий характеристическому числу ϱ. Воспользовавшись каким-либо представлением матрицы $\exp Q_T t$, известным из теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. напр. [1]), мы видим, что при наших условиях можно написать

$$\exp Q_T t = e^{t\varrho} kc + o(e^{t\varrho'}) = e^{t\varrho} A_T + o(e^{t\varrho'}) .$$

Здесь $\varrho' < \varrho$, и c есть ненулевой строчный вектор. Итак, A_T — матрица, столбцы которой являются кратными характеристического вектора k. $o(e^{t\varrho'})$ есть матрица, элементы которой суть бесконечно малые величины высшего порядка по сравнению с $e^{t\varrho'}$.

Все элементы матрицы $\exp Q_T t$ положительны для $t > 0$. Это следует из представления элементов этой матрицы при помощи величин ${}^{(n)}P_{ij}(t;\, T)$, так как из неразложимости Q_T следует, что для каждой пары i, j существует m так, что ${}^{(m)}P_{ij}(t;\, T) > 0$. Отсюда также вытекает, что элементы матрицы $A_T = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t\varrho} \exp Q_T t$ неотрицательны. Пусть $s > 0$. Из соотношения

$$A_T = \lim_{t\to\infty} e^{-(t+s)\varrho} \exp Q_T(t+s) = A_T e^{-s\varrho} \exp Q_T s$$

видно, что вектор c удовлетворяет соотношению

$$c = ce^{-s\varrho} \exp Q_T s \quad \text{т. е.} \quad \frac{(e^{s\varrho}-1)}{s}\, c = c\, \frac{(\exp Q_T s - E)}{s},$$

откуда, переходя к пределу для $s \to 0$, получаем $\varrho c = cQ_T$. Итак, c есть характеристический вектор матрицы Q_T^*, транспонированной по отношению к матрице Q_T. Так как для матрицы Q_T^* справедливы те же рассуждения, как и для Q_T, мы видим, что все компоненты вектора c положительны и что он определяется вплоть до мультипликативной постоянной.

Если дан строчный вектор p начального распределения вероятностей и если e — вектор с единичными координатами, то мы имеем

$$\boldsymbol{P}(t|T) = (p\boldsymbol{P}(t;\, T)\, e)^{-1}\, p\boldsymbol{P}(t;\, T) = \frac{e^{t\varrho} pkc + o(e^{t\varrho'})}{e^{t\varrho} pkce + o(e^{t\varrho'})}.$$

Отсюда легко следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{P}(t|T) = (ce)^{-1}\, c$. Из свойств вектора c мы получим утверждение теоремы.

Определение. Если класс T состояний процесса регулярен, то характеристическое число ϱ матрицы Q_T обладающее среди всех характеристических чисел наибольшей действительной частью, мы назовем *характеристическим числом класса* T.

Рассмотрим общего вида подмножество T состояний процесса. Мы скажем, что состояние $j \in T$ следует за состоянием $i \in T$ внутри T, если существует последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_s$ состояний подмножества T такая, что плотности $q_{ii_1}, \ldots, q_{i_n i_{n+1}}, \ldots, q_{i_s j}$ положительны. Если состояние j следует за состоянием i внутри T, а также i следует за j внутри T, то мы их назовем состояниями взаимно сообщающимися внутри T. Каждое состояние мы называем сообщающимся само с собой. Множество T распадется на классы T_j состояний взаимно сообщающихся внутри T. Классы T_j регулярны. Мы будем говорить, что класс $T_m \neq T_n$ следует за классом T_n, если состояния класса T_m следуют за состояниями класса T_n. Переставляя строки и столбцы матрицы Q_T так, чтобы индексы состояний, принадлежащих одному и тому же классу, были рядом и чтобы индексы состояний каждого класса были ниже, чем индексы состояний следующих классов, мы приведем матрицу Q_T к виду

$$Q_T = \begin{pmatrix} Q_{11}, & Q_{12}, & \ldots, & Q_{1s} \\ 0, & Q_{22}, & \ldots, & Q_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & Q_{ss} \end{pmatrix}.$$

Подразделению матрицы соответствует подразделение состояний на отдельные классы. Если подразделить и матрицу $\boldsymbol{P}(t;\, T)$ на соответствующие блоки $\boldsymbol{P}_{kj}(t;\, T)$, то систему уравнений $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}(t;\, T) = Q_T\boldsymbol{P}(t;\, T)$ можно представить при помощи блочных матриц в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\, T) = \sum_k Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\, T) = \sum_{k \geq i} Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\, T)\,.$$

Положим $i = s$. Имеем $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{sj}(t;\, T) = Q_{ss}\boldsymbol{P}_{sj}(t;\, T)$. Принимая во внимание, что начальное условие имеет вид $\boldsymbol{P}_{sj}(0;\, T) = 0$ для $s \neq j$, мы видим, что $\boldsymbol{P}_{sj}(t;\, T) \equiv 0$ для $s > j$. Для $i = s - 1$, $s - 2$ и т. д. мы последовательно убедимся таким же способом, что $\boldsymbol{P}_{ij}(t;\, T) \equiv 0$ для $i > j$. Итак, мы получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\, T) = \sum_{i \leq k \leq j} Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\, T)\,.$$

В частности, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ii}(t;\, T) = Q_{ii}\boldsymbol{P}_{ii}(t;\, T)$ и в силу начального условия $\boldsymbol{P}_{ii}(0;\, T) = E$ будет $\boldsymbol{P}_{ii}(t;\, T) = \exp Q_{ii}t$.

Решение $y(t)$ неоднородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами $y'(t) = Ay(t) + b(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \exp\{A(t - \tau)\}\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Пусть теперь $i < j$. Применяя это представление к уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\, T) = Q_{ii}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\, T) + \sum_{i < k \leq j} Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\, T)\,,$$

мы получим

$$\boldsymbol{P}_{ij}(t;T) = \sum_{i<k\leqq j} \int_0^t \boldsymbol{P}_{ii}(t-\tau;T)\, Q_{ik} \boldsymbol{P}_{kj}(\tau;T)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Введем для двух непрерывных матричных функций $A(t)$ и $B(t)$, A — типа (n, m) и B — типа (m, r), обозначение

$$A * B = \int_0^t A(t-\tau)\, B(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Тогда будет $\boldsymbol{P}_{ij} = \sum\limits_{i<k\leqq j} \boldsymbol{P}_{ii} Q_{ik} * \boldsymbol{P}_{kj}$. Выражая $\boldsymbol{P}_{kj}$ аналогичным образом, мы увидим, что справедливо представление

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r} \boldsymbol{P}_{ii} Q_{ik_1} * \boldsymbol{P}_{k_1k_1} Q_{k_1k_2} * \ldots * \boldsymbol{P}_{k_rk_r} Q_{k_rj} * \boldsymbol{P}_{jj}\,.$$

При суммировании используются, разумеется, лишь такие последовательности $(i, k_1, k_2, \ldots, k_r, j)$ индексов классов, для которых все матрицы $Q_{ik_1}, \ldots, Q_{k_nk_{n+1}}, \ldots, Q_{k_rj}$ — ненулевые. При формулировке следующей леммы мы назовем такие последовательности индексов допустимыми.

Лемма. *В случае, когда последовательность* $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ *допустима, имеет место равенство*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-n+1} e^{-\varrho t} \boldsymbol{P}_{j_1j_1} Q_{j_1j_2} * \boldsymbol{P}_{j_2j_2} Q_{j_2j_3} * \ldots * \boldsymbol{P}_{j_{r-1}j_{r-1}} Q_{j_{r-1}j_r} * \boldsymbol{P}_{j_rj_r} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} A_{j_1} Q_{j_1j_2} A_{j_2} Q_{j_2j_3} \ldots \mathrm{A}_{j_{r-1}} Q_{j_{r-1}j_r} A_{j_r}\,,$$

где $\varrho = \max \varrho_m$, *а* ϱ_m *— характеристическое число класса* T_{j_m}, n *— число, показывающее, сколько раз число* ϱ *встречается среди чисел* ϱ_m. *Если* $\varrho_m < \varrho$, *то* $A_{j_m} = (\varrho E - Q_{j_mj_m})^{-1}$, *а если* $\varrho_m = \varrho$, *то* A_{j_m} *является коэффициентом* $e^{t\varrho}$ *в представлении матрицы* $\exp Q_{j_mj_m} t$. *Все элементы предельной матрицы положительны.*

Доказательство. Обозначим $I = \boldsymbol{P}_{j_1j_1} Q_{j_1j_2} * \ldots * \boldsymbol{P}_{j_{r-1}j_{r-1}} Q_{j_{r-1}j_r} \boldsymbol{P}_{j_rj_r}$. Воспользуемся теперь представлением матриц $\boldsymbol{P}_{j_mj_m}$, соответствующих классам с характеристическим числом ϱ, которое было указано в доказательстве теоремы 1, т. е. $\boldsymbol{P}_{j_mj_m}(t;T) = e^{\varrho t} A_{j_m} + o(e^{\varrho' t})$. В сокращенном виде получим

$$I = \int_A \ldots \int \boldsymbol{P}_{j_1j_1}(t_1;T)\, Q_{j_1j_2} \boldsymbol{P}_{j_2j_2}(t_2;T) \ldots \boldsymbol{P}_{j_rj_r}(t - \textstyle\sum t_j;T)\, \mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_{r-1} =$$

$$= \int_A \ldots \int \ldots e^{\varrho t_m} A_{j_m} Q_{j_mj_{m+1}} \ldots \boldsymbol{P}_{j_ej_e}(t_e;T)\, Q_{j_ej_{e+1}} \ldots \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{r-1} +$$

$$+ o(t^{n-1}e^{\varrho t}), \quad A = \{t_1 + t_2 + \ldots t_{r-1} < t,\ t_m \geqq 0\}\,.$$

Оценку остатка можно получить, приняв во внимание, что матрицы $\boldsymbol{P}_{j_mj_m}$, соответствующие классам с характеристическим числом, меньшим чем ϱ, равны $o(e^{t\varrho'})$ для подходящего $\varrho' < \varrho$, и пользуясь соотношениями

$$t^k e^{\varrho t} * e^{\varrho t} = (k+1)^{-1}\, t^{k+1} e^{\varrho t} \quad \text{и} \quad t^k e^{\varrho t} * t^s e^{\varrho' t} = O(t^k e^{\varrho t})\,.$$

Интегрируя по переменным t_m, соответствующим классам с характеристическим числом ϱ, мы получим, обозначив переменные, соответствующие классам с меньшим характеристическим числом через $s_1, \ldots, s_k$, $k = r - n$,

$$I = \frac{1}{(n-1)!} \int_B \ldots \int (t - \sum s_j)^{n-1} e^{\varrho(t - \Sigma s_j)} \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots \boldsymbol{P}_{j_e j_{e+1}}(s_q; T)\, Q_{j_e j_{e+1}} \ldots$$

$$\ldots \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_k + o(t^{n-1} e^{\varrho t}) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\varrho t} \int_B \ldots \int e^{-\varrho \Sigma s_j} \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots$$

$$\ldots \boldsymbol{P}_{j_e j_{e+1}}(s_q; T)\, Q_{j_e j_{e+1}} \ldots \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_k + o(t^{n-1} e^{\varrho t}),$$

$$B = \{s_1 + s_2 + \ldots + s_k < t,\ s_q \geqq 0\}.$$

Итак,

$$t^{-n+1} e^{-\varrho t} I = \frac{1}{(n-1)!} \int_B \ldots \int \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots e^{-\varrho s_q} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s_q; T) Q_{j_e j_{e+1}} \ldots$$

$$\ldots \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_k + o(1),$$

что для $t \to \infty$ стремится к

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots e^{-\varrho s_q} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s_q; T) \ldots \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_k =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots \int_0^\infty e^{-\varrho s_q} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s_q; T)\, \mathrm{d}s_q\, Q_{j_e j_{e+1}} \ldots$$

Интегрируя по частям, мы получаем

$$\int_0^\infty e^{-\varrho s} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s; T)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\varrho} E + \frac{1}{\varrho} Q_{j_e j_e} \int_0^\infty e^{-\varrho s} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s; T)\, \mathrm{d}s.$$

Итак,

$$\int_0^\infty e^{-\varrho s} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s; T)\, \mathrm{d}s = (\varrho E - Q_{j_e j_e})^{-1} = A_{j_e}$$

Остается доказать, что все элементы предельной матрицы положительны. В случае, когда A_{j_m} соответствует классу с характеристическим числом ϱ, это следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1. Если же характеристическое число соответствующего класса меньше ϱ, то

$$A_{j_m} = \int_0^\infty e^{-\varrho t} \boldsymbol{P}_{j_m j_m}(t; T)\, \mathrm{d}t.$$

Имеем $\boldsymbol{P}_{j_m j_m}(t; T) = \exp Q_{j_m j_m} t$; при доказательстве теоремы 1 мы убедились, что в случае неразложимой матрицы Q все элементы $\exp Qt$ положительны для $t > 0$. Следовательно, то же имеет место и для A_{j_m}. В том, что элементы предельной матрицы положительны, можно убедиться, используя то обстоятельство, что умножение ненулевой матрицы с неотрицательными элементами справа и слева на матрицы со сплошь положительными элементами приводит к матрице со сплошь положительными элементами.

Следующие теоремы можно в общем легко доказать, если воспользоваться леммой и представлением

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \sum \boldsymbol{P}_{ii} Q_{ik_1} * \boldsymbol{P}_{k_1k_1} Q_{k_1k_2} * \ldots * \boldsymbol{P}_{k_rk_r} Q_{k_rj} * \boldsymbol{P}_{jj} .$$

Мы их приведем без доказательства; в работе [3] можно найти доказательства тех же теорем для однородных цепей. Через $P_T(t)$ мы обозначим вероятность того, что система пребывала непрерывно в состояниях множества T с начала по крайней мере до момента t. То обстоятельство, что класс T_m следует за классом T_n, мы будем обозначать через $T_n \prec T_m$. На начальное распределение вероятностей p мы будем помимо предположения, что оно полностью сосредоточено в состояниях множества T, накладывать еще условие, что имеется положительная вероятность того, что в момент времени нуль система находится в таких классах T_k, для которых не существует $T_j \precsim T_k$ (Условие А).

Теорема 2. *Пусть* $\varrho = \max\limits_{T_j} \varrho_j$ *и пусть* k *— наибольшее число такое, что существуют классы* $T_{\alpha_1} \prec T_{\alpha_2} \prec \ldots \prec T_{\alpha_k}$, *для которых* $\varrho_{\alpha_1} = \varrho_{\alpha_2} = \ldots = \varrho_{\alpha_k} = \varrho$. *Тогда при выполнении условия А существует*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-k+1} e^{-\varrho t} P_T(t) > 0 .$$

Пусть p_k означает ту часть вектора начального распределения вероятностей, которая соответствует состояниям, входящим в класс T_k. Пусть e_m — столбцевой вектор, у которого на месте, соответствующем состоянию m, стоит единица, а на всех остальных местах — нули.

Теорема 3. *При тех же условиях, как и в теореме 2, имеет место: для каждого* $m \in T$ *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} P_m(t|T) = P_m(T)$; *этот предел положителен, если и только если* m *входит в такой класс* T_j, *для которого существуют* $T_{s_1} \prec T_{s_2} \prec \ldots \prec T_{s_k} \precsim T_j$, *характеристические числа которых равны* ϱ. *В этом случае*

$$P_m(T) = C {\sum}^* p_{r_1} A_{r_1} Q_{r_1r_2} A_{r_2} \ldots A_j e_m .$$

C есть независимая от j постоянная, а ${\sum}^*$ *означает, что суммирование производится по всем последовательностям классов* $T_{r_1} \prec T_{r_2} \prec \ldots \prec T_j$, *среди характеристических чисел которых число* ϱ *встречается* k *раз.*

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 2; пусть существует одна-единственная k-членная последовательность классов* $T_{s_1} \prec T_{s_2} \prec \ldots$ $\ldots \prec T_{s_k}$ *с характеристическими числами* ϱ; *тогда вероятность* $P_m(T)$ *будет одинаковой для всех начальных распределений, выполняющих условие* A.

Литература

[1] *Coddington E. A., Levinson N.*: Theory of ordinary differential equations. New York 1955.

[2] *Doob J. L.*: Stochastic processes. New York 1953.

[3] *Мандл П.* (*Mandl P.*): Об асимптотическом поведении вероятностей в группах состояний однородной цепи Маркова. Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 140–149.

Výtah

O ASYMPTOTICKÉM CHOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ UVNITŘ SKUPIN STAVŮ HOMOGENNÍHO MARKOVOVA PROCESU

PETR MANDL, Praha

Cílem práce je odvoditi pro homogenní Markovovy procesy s konečným počtem stavů výsledky, které pro Markovovy řetězce jsou uvedeny v dřívější práci autorově [3]. Je studováno limitní chování pravděpodobností $P_j(t/T)$, že systém se bude vyskytovati v okamžiku t ve stavu j, patřícím množině stavů T za podmínky, že se vyskytoval ve stavech T bez přerušení aspoň do doby t.

Množina T je nazvána *regulární*, jestliže matice, utvořená z intensit pravděpodobnosti přechodu mezi stavy T je nerozložitelná. Charakteristické číslo této matice, které má největší reálnou část, se nazývá *charakteristickým číslem* množiny T.

Jestliže T je regulární, limity $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t/T)$ existují a jsou kladné a nezávislé na počátečním rozložení pravděpodobností. Obecná množina T může být rozložena ve více tříd stavů sousledných. Řekneme, že $T_j \prec T_k$, jestliže existuje stav množiny T_j, který má kladnou intensitu přechodu do stavů množiny T_k. Třídy T_j jsou regulární. Charakteristická čísla tříd T_j a struktura množiny tříd T_j daná vztahem $T_j \prec T_k$ určují, jakého řádu jsou pravděpodobnosti, že se systém bude vyskytovati v T bez přerušení aspoň do doby t a určují také, pro které stavy j limity $\lim\limits_{t\to\infty} P_j(t/T)$ jsou kladné.

Résumé

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PROBABILITÉS DANS LES ENSEMBLES DES ÉTATS D'UN PROCESSUS DE MARKOV HOMOGÈNE

PETR MANDL, Praha

Le but de l'article présent est établir pour les processus de Markov homogènes avec un nombre fini d'états les résultats obtenus pour les chaînes de Markov dans un travail antérieur [3] de l'auteur. On étudie le comportement limite des probabilités $P_j(t/T)$ que le système se trouvera à l'instant t dans un état j appartenant à l'ensemble T des états, sous la condition qu'il se trouvait sans cesse dans les états de T au moins jusqu'au temps t.

L'ensemble T est dit *régulier*, si la matrice formée des intensités de probabilité de transition entre les états de T est indecomposable. La racine caractéristique de cette matrice avec la plus grande partie réelle est nomée *racine caractéristique* de l'ensemble T.

Si T est régulier, les limites $\lim_{t\to\infty} P_k(t/T)$ existent et sont positives et indépendantes de la lois de probabilité initiale. L'ensemble T général peut être décomposé en plusieurs classes d'états communicants. On dit que $T_j \prec T_k$ s'il existe un état de T_j qui a l'intensité de transition dans les états de T_k positive. Les classes T_j sont régulières. Les racines caractéristiques des T_j et la structure de l'ensemble des T_j donnée par la relation $T_j \prec T_k$ determinent l'ordre de grandeur des probabilités que le système se trouve dans T sans cesse au moins jusqu'au temps t et determinent aussi pour quels états j les limites $\lim_{t\to\infty} P_j(t/T)$ sont positives.