Časopis pro pěstování matematiky

Hana Svobodová; Jiří Vaníček

Optimální regulace

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 3, 345--356

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117338`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

OPTIMÁLNÍ REGULACE

HANA SVOBODOVÁ a JIŘÍ VANÍČEK, Praha

(Došlo dne 1. září 1959)

V článku se referuje o výsledcích dosažených v teorii optimální regulace a podává se přehled literatury tohoto oboru.

S rozvojem techniky stále přibývá procesů, které jsou řízeny automaticky, bez přímého zásahu člověka.

Praktický podklad otázek, o kterých se jedná v tomto článku, je asi tento: Chceme, aby se přístroj během své práce udržoval stále v určitém stavu, optimálním pro jeho výkonnost (např. správná rychlost přítoku paliva kosmických raket, dostatečně velký, ale přitom bezpečný počet rozštěpených atomů za jednotku času v atomovém reaktoru, správný počet otáček rotoru turbiny apod.).

První otázka je, jak sestrojit uvažovaný přístroj tak, aby se stále udržoval v tomto optimálním stavu. (Typický příklad zařízení, které nám to zprostředkuje, je známý Wattův regulátor užívaný běžně u parních strojů.)

Ve skutečnosti však na soustavu stále působí řada nahodilých prvků, které ji vychylují z optimální polohy, např. změny zatížení u parní turbiny. Druhý, neméně důležitý problém je tento:

Předpokládejme, že můžeme nějakým způsobem zasahovat do uvažovaného děje tak, že v určitém rozsahu měníme vstupní parametry (např. hloubku, do které jsou spuštěny kadmiové tyče brzdící rozpad v atomovém reaktoru). Otázka je, jak máme tyto parametry měnit, aby se soustava vrátila z libovolné polohy do optimální co nejdříve, za optimální čas, a z kterých poloh je vůbec možno vrátit soustavu do optimální polohy.

Matematická formulace problému je tato:

Nechť T je topologický prostor. Budeme říkat, že je dán regulační proces, je-li dán systém n diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u)$$

nebo vektorově

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n,\ x_1(t), \ldots, x_n(t) \tag{1}$$

jsou reálné funkce času t, $u \in T$, $f_i(\mathbf{x}, u)$ jsou spojité funkce v $E_n \times T$ a mají spojité parciální derivace prvního řádu podle proměnných x_j $(j = 1, \ldots, n)$ v $E_n \times T$. Regulátorem našeho procesu budeme nazývat zobrazení $u(t)$ intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ do T.

Budeme říkat, že regulátor $u(t)$ převádí bod ξ_0 v ξ_1, jestliže existuje řešení soustavy (1) s regulátorem $u(t)$ tak, že

$$\mathbf{x}(t_0) = \xi_0\,, \quad \mathbf{x}(t_1) = \xi_1\,.$$

Regulátor budeme nazývat optimální mezi body ξ_0 a ξ_1, jestliže převádí bod ξ_0 v ξ_1 za čas τ a jestliže neexistuje regulátor, který by převáděl bod ξ_0 v ξ_1 za čas kratší.

Úkolem je najít optimální regulátor převádějící libovolný bod ξ do počátku a vyjádřit tento regulátor jako funkci bodu $\mathbf{x}$ (výchylky) místo času t.

Pro obecný případ nelineární soustavy se podařilo sovětským matematikům L. S. Pontrjaginovi a R. V. Gamkrelidzovi odvodit nutnou podmínku pro optimálnost regulátoru, tak zvaný princip maxima (za předpokladu, že funkce $u(t)$ je po částech spojitá a má body nespojitosti pouze prvního druhu).

V [8] je nejprve řešen obecnější problém, najít takový regulátor, aby funkcionál

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), u(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

kde f_0 je funkce spojitá v $E_n \times T$, byl minimální. Pro speciální případ

$$f_0 \equiv 1 \tag{2}$$

dostáváme pak optimální regulátor. Výsledky pro tento důležitý speciální případ lze shrnout v následující větu:

Nechť ψ je libovolná vektorová funkce; označme skalární součin $(\psi, \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) = H(\psi, \mathbf{x}, u)$ a $\sup_{u \in T} H(\psi, \mathbf{x}, u) = M(\psi, \mathbf{x})$.

Věta 1. *Nechť $u(t)$ je optimální regulátor vzhledem k (2) soustavy (1) a $\mathbf{x}(t)$ jemu odpovídající řešení soustavy (1). Potom existuje taková nenulová vektorová funkce $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, že*

$$H(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0), u(t_0)) \geqq 0\,,$$

a funkce $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ vyhovují Hamiltonovu systému

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j} \quad (j = 1, \ldots, n)\,, \quad \frac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n)\,,$$

přičemž $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = M(\psi(t), \mathbf{x}(t))$. Ukazuje se kromě toho, že funkce $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ je konstantní, takže $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) \geqq 0$. Viz [8].

Mnohem úplnějších výsledků lze dosáhnout pro případ lineární soustavy.

Uvažujme systém n diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_1 u_1(t) + \ldots + \mathbf{c}_r u_r(t)\,. \tag{3}$$

O matici $\mathbf{A}$ předpokládáme, že je regulární a nezávisí na t; $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ jsou n-členné sloupcové vektory.

Pontrjagin a Gamkrelidze předpokládají, že regulátory $u_j(t)$ jsou po částech spojité a mají body nespojitosti pouze prvního druhu. (Viz [4, 7, 8].)

V naší nepublikované práci, která získala první cenu v celostátní studentské vědecké soutěži za přírodní vědy, je předpokládáno, že regulátory $u_j(t)$ jsou měřitelné funkce. Za prostor T budeme brát kartézský součin r jednorozměrných intervalů $\langle -1, 1\rangle$.[1])

Pro tento případ byla dokázána Gamkrelidzem [6] a nezávisle na něm námi ve shora uvedené práci existence optimálního regulátoru pro lineární soustavy.

Věta o existenci optimální soustavy regulátorů:

Označme $\mathbf{\Phi} = \|\varphi_{ik}\|$ fundamentální matici řešení soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ v $\langle 0, +\infty)$, tj. funkční matici, pro kterou platí $\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$. Dále označíme inversní matici $\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Psi}$.

Řešení soustavy (3) je určeno vzorcem

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,(\mathbf{q}_0 + \int_0^t \mathbf{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau) \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, +\infty)\,. \tag{4}$$

Označme $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r)$ řešení soustavy (3) příslušné k systému regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$.

Věta 2. *Nechť existuje systém regulátorů* $\{v_1(t), \ldots, v_r(t)\}$ *definovaných na* $\langle 0, +\infty)$ *a* $T' > 0$ *tak, že pro příslušné řešení soustavy* (3) *je* $\mathbf{x}(T', v_1, \ldots, v_r) = \xi_1$, *kde* $\xi_0 \neq \xi_1 \in E_n$.

Pak existuje systém regulátorů $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ *a číslo* $0 < T \leqq T'$ *tak, že platí:*

1. $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$,

2. *pro libovolný systém regulátorů* $\{u_1, \ldots, u_r\}$ *a* $0 < t < T$ *je* $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r) \neq \xi_1$.

Důkaz. Buď M množina těch $t \in \langle 0, +\infty)$, ke kterým existuje systém regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$ tak, že $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r) = \xi_1$. M je zdola omezena nulou, a protože $T' \in M$, je $M \neq \emptyset$, tedy existuje $\inf M = T$.

Je-li $T = T'$, je nutně $T \in M$ a věta je dokázána. Buď $T < T'$, pak existuje klesající posloupnost $T' = t_0 > t_1 > \ldots$ tak, že $t_n \to T$ a $t_n \in M$. Ze vzorce (4) plyne, že příslušné funkce $u_1^m, \ldots, u_r^m$ je možno volit tak, že $u_j^m(t) = 0$ pro $t \in (t_m, +\infty)$, tedy je

[1]) L. S. Pontrjagin v [8] zobecnil výsledky pro případ, že T je konvexní mnohostěn v E_r.

$$\xi_1 = \mathbf{x}(t_m, u_1^m, \ldots, u_r^m) = \boldsymbol{\Phi}(t_m)\,(\mathbf{q}_0 + \int_0^{t_m} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau) =$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(t_m)\,(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\,.$$

Protože u_j^m je měřitelná a omezená, existuje neurčitý Lebesgueův integrál, a označíme-li

$$U_j^m(t) = \int_0^t u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, U_j^m(t) = u_j^m(t)$ skoro všude. Platí

$$\int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\mathrm{d}U_j^m(\tau)\,,$$

kde vpravo je Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Jest

$$|U_j(\tau_2) - U_j(\tau_1)| \leqq \int_{T_1}^{T_2} |u_j^m(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqq |\tau_2 - \tau_1|\,,$$

takže funkce U_j^m splňují Lipschitzovu podmínku s konstantou 1. Tedy funkce U_j^m jsou stejně spojité a také stejně omezené. Podle Arzelovy věty lze z $\{U_j^m\}$ vybrat posloupnost $\{\tilde{U}_j^m\}$ stejnoměrně konvergentní: $\tilde{U}_j^m \to H_j$. Ze stejnoměrné konvergence $\tilde{U}_j^m \to H_j$ plyne, že také H_j splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou 1 a tedy existuje skoro všude $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, H_j(\tau) = \eta_j(\tau)$ a je

$$|\eta_j(\tau)| = \left|\lim_{t \to \tau} \frac{H_j(t) - H_j(\tau)}{t - \tau}\right| \leqq 1\,.$$

Protože je $|u_j^m| \leqq 1$, jsou variace funkcí U_j^m v intervalu $\langle 0, T' \rangle$ omezeny konstantou T' nezávislou na m a užitím Hellyovy věty [1] dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\mathrm{d}\tilde{U}_j^m(\tau) = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\mathrm{d}H_j = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\eta_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{T} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\eta_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

(protože $\eta_j = 0$ pro $t > T$).

Tedy i

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{\Phi}(\tilde{t}_m)(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau) =$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(T)(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau) = \xi_1\,,$$

což znamená, že $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$, a tedy $T \in M$.

Pro další vyšetřování je nutno zavést na soustavu omezující předpoklad. Systém (3) budeme nazývat regulární, jestliže žádný z vektorů $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r$ neleží v žádném podprostoru $P \subset E_n$ nižší dimense než n, invariantním vzhledem k operátoru $\mathbf{A}$.

Ukazuje se, že pro regulární soustavu mají optimální regulátory zvláště jednoduchý tvar. Mají konečně mnoho bodů nespojitosti a nabývají pouze hodnot 1 a -1. (Ztotožňujeme ovšem funkce, které se liší pouze na množině nulové míry.)

O tvaru řešení platí tato věta:

Věta 3. *Buď* (3) *regulární soustava a* $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ *soustava optimálních regulátorů soustavy* (3) *mezi body* ξ_0 *a* ξ_1. *Pak existuje řešení systému* $\dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$ *tak, že platí* $\eta_j(t) = \operatorname{sgn}(\omega(t) \cdot \mathbf{c}_j)$ *skoro všude.*

Naznačíme pouze nejdůležitější etapy důkazu. Označíme $A(t)$ množinu všech bodů $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r)$, kde $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je systém regulátorů; dále označíme $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ systém optimálních regulátorů a T optimální čas. Platí:

a) Množina $A(T)$ je konvexní a bod $\xi_1 = \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)$ leží na její hranici.

b) Je-li A konvexní množina, potom každým bodem její hranice lze vést nadrovinu R takovou, že A leží celá v jednom poloprostoru vyťatém nadrovinou R.

Existuje tedy nadrovina R procházející bodem ξ_1 taková, že množina $A(T)$ leží celá v jednom poloprostoru vyťatém nadrovinou R. Označme $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ vektor kolmý k R, orientovaný tak, že pro každý systém regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{x}(T, u_1, \ldots, u_r) - \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)] \leqq 0 . \tag{5}$$

Označme

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Phi}(T) , \quad \omega(t) = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\Psi}(t) . \tag{6}$$

Vektorová funkce $\omega(t)$ definovaná vztahy (6) splňuje soustavu $\dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$.

c) Je-li systém (3) regulární, jsou vektory $\mathbf{c}_j, \mathbf{A}\mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{c}_j$ lineárně nezávislé.

Z těchto tvrzení již snadno plyne věta o tvaru řešení.

Podle (4) a (5) je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}[\mathbf{x}(T, u_1, \ldots, u_r) - \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)] &= \\ = \int_0^T \mathbf{a}\, \boldsymbol{\Phi}(\tau)\, \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j (u_j(\tau) - \eta_j(\tau))\, \mathrm{d}\tau &= \\ = \int_0^T \omega(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j (u_j(\tau) - \eta_j(\tau))\, \mathrm{d}\tau &\leqq 0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Protože funkce $\omega(\tau) \cdot \mathbf{c}_j$ mají v intervalu $\langle 0, T \rangle$ pouze konečný počet nulových bodů, platí, že $\operatorname{sgn} \omega(\tau) \cdot \mathbf{c}_j$ je funkce po částech konstantní s konečným počtem bodů nespojitosti. Stačí tedy dokázat toto:

Je-li $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ systém optimálních regulátorů, je $\eta_j = \operatorname{sgn} \omega(\tau) \cdot \mathbf{c}_j$, $j = 1, \ldots, r$, skoro všude v $\langle 0, T \rangle$.

Označme G^j_+ množinu těch $t \in \langle 0, T \rangle$ takových, že $\operatorname{sgn} \omega(t) \,.\, \mathbf{c}_j = 1$ a $\eta_j(t) < < 1$. Nechť $\mu(G^j_+) > 0$. Definujme systém regulátorů $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r\}$ takto:

$$\vartheta_i = \eta_i \quad \text{pro} \quad i \neq j \quad \text{a} \quad t \in \langle 0, T \rangle \,,$$
$$\vartheta_j = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad t \in G^j_+ \\ \eta_j & \text{pro} \quad t \in \langle 0, T \rangle \dot{-} G^j_+ \,. \end{cases}$$

Dosadíme-li do výrazu (7), dostaneme:

$$\int_0^T \omega(\tau) \sum_{k=1}^r \mathbf{c}_k(\vartheta_k(\tau) - \eta_k(\tau)) \, d\tau = \int_{G^j_+} \omega(\tau) \, \mathbf{c}_j(1 - \eta_j(\tau)) \, d\tau > 0$$

a to je spor s (7). Tedy $\mu(G^j_+) = 0$.

Podobně definujeme G^j_- a dokážeme, že $\mu(G^j_-) = 0$. Tedy $\mu(G^j) = 0$, kde $G^j = \mathop{\mathscr{E}}_{t \in \langle 0,T \rangle} (\eta_j \neq \operatorname{sign} \omega \,.\, \mathbf{c}_j)$.

Jednoznačnost systému optimálních regulátorů plyne z následující věty:

Věta 4. *Jsou-li $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ a $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r\}$ dva systémy optimálních regulátorů, je $\eta_j = \vartheta_j$, $j = 1, \ldots, r$, skoro všude v $\langle 0, T \rangle$.*

(Při určování optimálního regulátoru vzorcem $\eta_j(t) = \operatorname{sgn} \omega(t) \,.\, \mathbf{c}_j$ tedy nezáleží na volbě nadroviny R.)

Důkaz. Buď $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \mathbf{x}(T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r) = \xi_1$. Pak také $\mathbf{x}\left(T, \frac{\eta_1 + \vartheta_1}{2}, \ldots, \frac{\eta_r + \vartheta_r}{2}\right) = \xi_1$. Nechť existuje $1 \leqq j \leqq r$ tak, že $\eta_j \neq \vartheta_j$ na nějaké množině G^j, která nemá nulovou míru. Označme

$$N^j = \mathop{\mathscr{E}}_{t \in \langle 0,T \rangle} (|\eta_j(t)| \neq 1) \,, \quad M^j = \mathop{\mathscr{E}}_{t \in \langle 0,T \rangle} (|\vartheta_j(t)| \neq 1) \,;$$

potom $\mu(N^j) = \mu(M^j) = 0$. Ale pak $\frac{\eta_j + \vartheta_j}{2} = 0$ na $G^j \dot{-} (M^j \cup N^j)$, což je spor, protože $\left\{\frac{\eta_1 + \vartheta_1}{2}, \ldots, \frac{\eta_r + \vartheta_r}{2}\right\}$ je systém optimálních regulátorů, a tedy musí být $\left|\frac{\eta_j + \vartheta_j}{2}\right| = 1$ skoro všude.

V praxi není příliš důležité určit optimální regulátory mezi dvěma pevně zvolenými body jako funkce času t, ale je důležité určit je v závislosti na poloze bodu $\mathbf{x}$ tak, aby se bod pohybující se podle rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_1 \, u_1(\mathbf{x}) + \ldots + \mathbf{c}_r \, u_r(\mathbf{x})$$

dostal z libovolné polohy do optimální za minimální čas. Tomuto úkolu se říká syntéza optimální soustavy.

Vzhledem k tomu, že o optimální poloze předpokládáme, že se v ní při ideálních podmínkách, tj. při vyloučení všech rušivých vlivů a při nepůsobení regulátorů, soustava stále udržuje, budeme brát za tuto polohu počátek.

Z existenční věty a z věty o jednoznačnosti plyne, že existuje taková množina $G \subset E_n$, pro kterou platí:

Je-li $\mathbf{x} \in G$, pak existuje právě jedna optimální trajektorie vedoucí z $\mathbf{x}$ do počátku; jestliže $\mathbf{x}$ non $\in G$, neexistuje žádný regulátor mezi body $\mathbf{x}$ a $\mathbf{0}$. Lze dokázat, že tato množina je vždy otevřená a konvexní a že může (ale nemusí) splynout s celým E_n. Pontrjagin v [8] odvodil, že postačující podmínkou pro $G = E_n$ je, aby reálné části všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ byly záporné.

Chceme určit nejprve množinu G těch bodů, z kterých je možno dospět do počátku pomocí nějakého regulátoru (a podle existenční věty také pomocí optimálního regulátoru) a pak na G definovat funkce $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_r(\mathbf{x})$, při kterých se libovolný bod $\xi \in G$ dostane do počátku v nejkratším čase.

Možnost určit funkci u pouze v závislosti na bodu $\mathbf{x}$ je dána tím, že je-li $u(t)$ optimální regulátor mezi body ξ_0 a ξ_1 a $\mathbf{x}(t, u)$ příslušné řešení systému (3) takové, že $\xi_0 = \mathbf{x}(t_0)$, $\xi_1 = \mathbf{x}(t_1)$, $t_0 < t_1$, a je-li $t_0 \leqq t_2 < t_3 \leqq t_1$, je také $u(t)$ optimální regulátor mezi body $\xi_2 = \mathbf{x}(t_2)$ a $\xi_3 = \mathbf{x}(t_3)$.

Dále se omezíme pouze na jeden regulátor a uvedeme postup konstrukce funkce u.

Z věty o tvaru optimálního regulátoru plyne, že všechny optimální trajektorie a optimální regulátory vycházející pro $t = 0$ z počátku dostaneme řešením soustavy podmínek:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}\, u(t)\,, \quad u(t) = \operatorname{sgn}(\omega(t) \,.\, \mathbf{c})\,, \quad \dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega \tag{8}$$

v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ pro různé počáteční podmínky pro $\omega(t)$ a počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ pro vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$.

K určení u v závislosti na $\mathbf{x}$ vyšetříme množinu těch bodů, ve kterých příslušná funkce $u(t)$ mění znaménko. Řešíme tedy (8) při libovolné počáteční podmínce pro $\omega(t)$. Je-li pro určitou počáteční podmínku stále $\omega(t) \,.\, \mathbf{c} \neq 0$, nemění na příslušné trajektorii tato funkce znaménko a tedy je tam $u(\mathbf{x})$ rovno stále buď 1 nebo -1. Jinak určíme pro každou počáteční podmínku první bod, v kterém je skalární součin $\omega(t) \,.\, \mathbf{c} = 0$. Dostaneme tzv. křivku prvních zvratů. Nyní opět řešíme (8) pro různé počáteční podmínky na křivce prvních zvratů a dostaneme tím křivku druhých zvratů atd.

Pro ilustraci uvádíme, jak vypadá situace ve třech jednoduchých, ale charakteristických případech. Silně je zakreslena křivka zvratu, slabě hranice oblasti G a čerchovaně některé trajektorie (viz obr. 1 až 3).

Zajímavé myšlenky obsahují některé práce N. N. Krasovského, které vyšly v poslední době.

V [12] je řešena úloha o optimální regulaci pro dvě nelineární rovnice, jejichž pravé strany závisí explicitně na čase. V práci je uvedena bez důkazu existenční věta analogická k větě 2. Dále jsou uvedeny nutné a postačující podmínky pro optimálnost a je popsána metoda přibližného řešení. Je uvedena věta, zaručující korektnost úlohy v tomto smyslu: Jsou-li

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \eta\, \mathbf{q}(t)\,, \tag{9}$$

$$|\eta(t)| \leqq 1$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{y}, t) + \eta\, \mathbf{q}^{(1)}(t)\,, \tag{10}$$

dva regulační procesy, pak ke každému $\varepsilon > 0$ a bodu $\mathbf{x}_0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li

$$|\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(1)}| < \delta\,, \quad |\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(1)}| < \delta\,, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i^{(1}}{\partial y_j}\right| < \delta$$

a je-li T_0 optimální čas příslušný k úloze (9), existuje také optimální regulátor úlohy (10) a pro příslušný optimální čas $T_0^{(1)}$ platí $|T_0 - T_0^{(1)}| < \varepsilon$.

V [13] je ukázáno, že některé nutné podmínky pro optimálnost již ani v jednoduchých případech nelze zeslabit.

V [11] je řešena stejná úloha jako v [12] pro libovolný počet rovnic. Situace je mnohem složitější než v případě dvou rovnic. Za omezujících předpokladů pro pravé strany je dokázána existenční věta a některé postačující podmínky pro optimálnost regulátoru.

Odlišná metoda je zpracována v [10] a [14]. V [10] se uvažuje systém explicitně závislý na čase

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t, u_1, \ldots, u_n)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Za přípustné regulátory se považují funkce $u_i(t)$ po částech spojité, pro které platí

$$\mathbf{G}_T(u_1(T), \ldots, u_r(T)) = N\,,$$

kde N je daná konstanta a $\mathbf{G}_T$ funkcionál závislý na u_j v $\langle t_0, t_0 + T\rangle$.

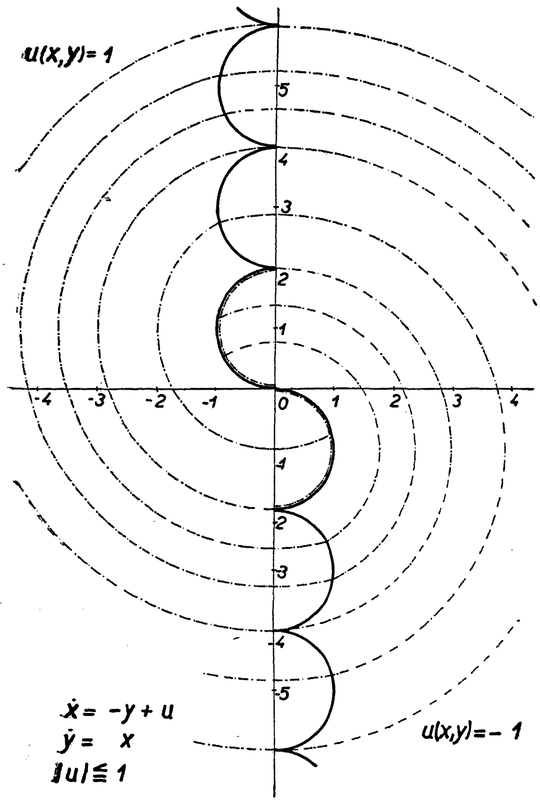
Na příklad:

1. $\mathbf{G}_T = \max |u_k(t)|\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \quad \tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle\,;$
2. $\mathbf{G}_T = \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} u_k^2(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\,;$
3. $\mathbf{G}_T = \frac{1}{T}\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} u_k^2(\tau)\, d\tau\right)$ a jiné.[2])

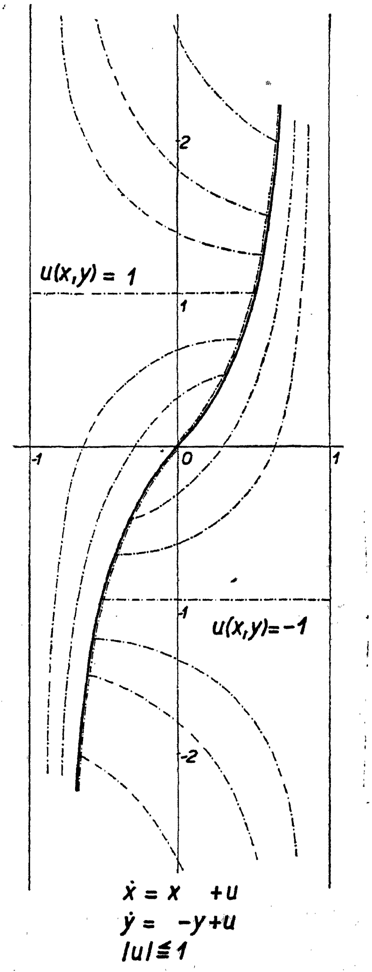
Buď nyní $t > t_0$ libovolný pevný čas; $\boldsymbol{\eta}(\tau)$ funkce, pro kterou je $\mathbf{x}(t, \eta_1, \ldots, \ldots, \eta_r) = \xi_1$. Najdeme při pevném t

$$\min \mathbf{G}_T(\eta_1(t), \ldots, \eta_r(t)) = F(t)\,.$$

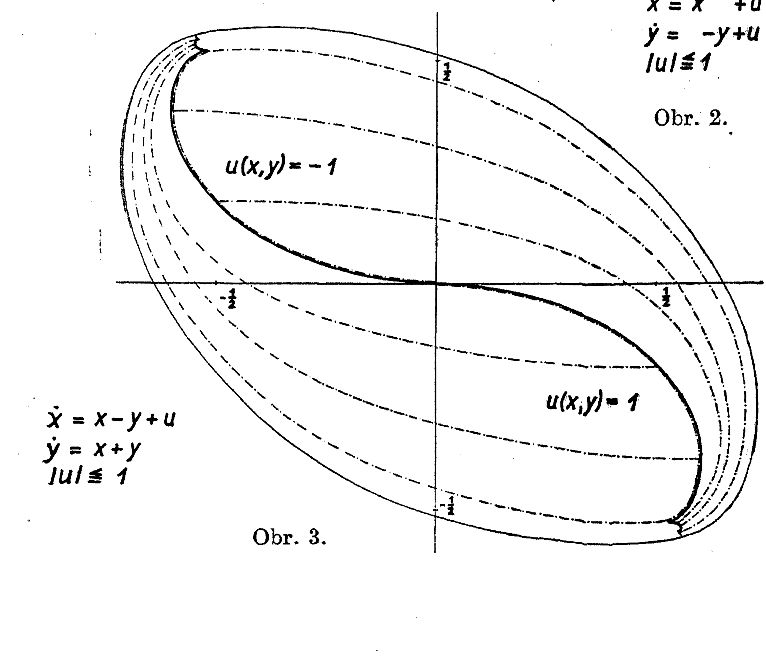
[2]) Omezení 1 vede zřejmě na problém, který jsme již vyšetřovali. Při 2 jde pro $p = 2$ v podstatě o omezení celkové energie.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Optimální čas bude pak nejmenší z čísel $\vartheta = t - t_0$, pro které $F(t) = F(t_0 + \vartheta) \leqq M$. Odpovídající řešení variačního problému bude optimální regulátor a optimální trajektorie.

Při omezeních typu 2 a 3 není možné provést syntézu úlohy, protože není splněna podmínka, že každá část optimální trajektorie je optimální trajektorií, jako tomu je v případě 1.

Obecněji lze úlohy tohoto typu řešit především jako tak zvaný L-problém ve funkcionálním prostoru s metrikou odpovídající typu ohraničení regulátoru.

V [14] je tento postup užit na soustavu

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{b}\eta + \mathbf{e}^{(1)}\xi^{(1)} + \ldots + \mathbf{e}^{(n-1)}\xi^{(n-1)}$$

při různých omezeních na regulátory η, $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-1)}$.

Nejdůležitější jsou:

1. $\mathbf{e}^{(i)} = \boldsymbol{0}$ pro $i = 1, \ldots, n - 1$, $|\eta(t)| \leqq 1$ pro $0 \leqq t \leqq T_0$;
2. $\eta^2(t) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} [\xi^{(i)}(t)]^2 \leqq 1$ pro $0 \leqq t \leqq T_0$.

Ukazuje se, že při dostatečně obecných předpokladech závisí optimální regulátor úlohy při omezení 2 spojitě na t. Hledání tohoto regulátoru vede na řešení obyčejné diferenciální rovnice. Dále je studován limitní přechod $\mathbf{e}^{(i)} \to \boldsymbol{0}$, který dovoluje aproximovat nespojitý optimální regulátor úlohy 1 spojitým optimálním regulátorem úlohy 2. Odtud také dostaneme přibližnou metodu pro řešení úlohy 1.

Literatura

[1] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественного переменого. Moskva-Leningrad, 1950.

[2] *Цянь Сюе Сень:* Техническая кибернетика. Moskva, 1956.

[3] *В. Г. Больтянський, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин:* К теории оптимальных процессов. ДАН *110*, № 1 (1956), 7—10.

[4] *Р. В. Гамкрелидзе:* К теории отпимальных процессов в линейных системах. ДАН *116*, № 1 (1957), 9—11.

[5] *В. Г. Больтянский:* Принцип максимума в теории оптимальных процессов. ДАН *119*, № 6 (1958), 1070—1073.

[6] *Р. В. Гамкрелидзе:* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, *22* (1958), 449—474.

[7] *Р. В. Гамкрелидзе:* К общей теории оптимальных процессов. ДАН *123*, № 2 (1958), 223—226.

[8] *Л. С. Понтрягин:* Оптимальные процессы регулирования. Успехи мат. наук Т *14*, № 1 (85), (1959), 3—20.

[9] *R. Bellman, J. Glicksberg, O. Gross*: On the bang-bang control problem. Anal. of Applied Math. *XIV* (1956), 11—18.

[10] *Н. Н. Красовский:* К теории оптимального регулирования. Авт. и телем. 18, II (1957), 960—970.

[11] *Н. Н. Красовский:* Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем. Прикл. матем. и мех. *23* (1959), 209—229.
[12] *Н. Н. Красовский:* К теории оптимального регулирования нелинейных систем второго порядка. ДАН *129* (1959), 267—270.
[13] *Н. Н. Красовский:* К достаточным условиям оптимальности. Прикл. матем. и мех. *23* (1959), 592—594.
[14] *Н. Н. Красовский:* К теории отпимального регулирования. Прикл. матем. и мех. *23* (1959), 627—639.
[15] *J. P. Lasalle*: Time optimal control systems. Proceedings of the National Academy of Siences *45*, No 4, 1959, 573—577.

Резюме

ОПТИМАЛЬНАЯ РЕГУЛЯЦИЯ

Г. СВОБОДОВА (H. Svobodová) и Ю. ВАНИЧЕК (J. Vaníček), Прага

Дается обзор вопроса оптимального регулирования и достижений советских математиков Л. С. Понтрягина, Р. В. Гамкрелидзе и Н. Н. Красовского и других в этой области.

Более подробно рассматривается случай линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{r} \mathbf{c}_k \,.\, u_k(t)\,,$$

где регуляторы предполагаются измеримыми функциями от времени, выполняющими условие $|u_k(t)| \leqq 1$ почти всюду.

Регуляторы ищутся так, чтобы решение системы достигло начала координат с любово положения в кратчайшее время.

Доказана теорема существования для оптимальново регулятора, при достаточно общих условиях дана его форма и описан синтез системы. Для иллустрации начерчено решение задачи в трех характерных случаях (рис. 1—3).

Далее приводятся результаты и ссылки на литературу, касающуюся нелинейных систем и других ограничений класса допустимых регуляторов.

Summary

OPTIMAL REGULATION

H. Svobodová and J. Vaníček, Praha

A survey is presented of optimal regulation of systems and the results obtained in this field by the Soviet mathematicians L. S. Pontrjagin, R. V. Gamkrelidze, N. N. Krasovskij and others.

A detailed treatment is given of the case of the linear system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{r} \mathbf{c}_k\, u_k(t)$$

with the regulators u_k measurable functions for which $|u_k| \leqq 1$ almost anywhere.

The problem is then to find regulators such that a solution of (1) is transferred from an arbitrary initial position to the origin in the shortest time.

A proof is given of the existence theorem for optimal regulation; under sufficiently general assumptions the form of the latter is found and the synthesis of the system described. The results are illustrated on three characteristic cases in fig. 1—3.

Finally, results and bibliography are listed concerning non-linear systems and also other requirements narrowing down the class of admissible regulators.