Milan Sekanina

O jisté vlastnosti soustav nezávislých prvků v abelovské grupě

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 3, 338--341

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117336`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O JISTÉ VLASTNOSTI SOUSTAV NEZÁVISLÝCH PRVKŮ V ABELOVSKÉ GRUPĚ

MILAN SEKANINA, Brno

(Došlo dne 18. července 1959)

V článku se dokazuje, že každá neprázdná množina nezávislých prvků z abelovské grupy je jejím faktorem ve smyslu Hajósově.

Nechť $\mathfrak{G}$ je abelovská grupa. Neprázdnou podmnožinu M z $\mathfrak{G}$ nazýváme nezávislou, platí-li pro každou neprázdnou konečnou podmnožinu $N = \{a_1, \ldots, \ldots, a_n\}$ množiny M, že z rovnice $v_1a_1 + \ldots + v_na_n = 0$ (0 je nulový prvek grupy $\mathfrak{G}$), kde v_i jsou celá čísla, plyne $v_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$ (viz [1], str. 123).

Nechť M, N jsou dvě neprázdné podmnožiny z $\mathfrak{G}$. Potom $M + N$ značí množinu všech těch prvků z $\mathfrak{G}$, které se dají psát jako součet prvku z M a prvku z N. Dá-li se každý prvek x z $\mathfrak{G}$ psát nanejvýš jedním způsobem jako $m + n$, $m \in M$, $n \in N$, píšeme $M \perp N$. Je-li $\mathfrak{G} = M + N$ a $M \perp N$, píšeme též $M \dot{+} N$ a říkáme, že M a N tvoří faktorisaci grupy $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově (viz též [2]) a M a N nazýváme faktory grupy $\mathfrak{G}$.

Dokážeme větu:

Věta. *Nezávislá množina $M \subset \mathfrak{G}$ je faktorem $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově.*

Důkaz. I. Nechť M je konečná množina, tedy $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ukážeme, že

$$\mathfrak{M} = \{a_1, \ldots, a_n\} \dot{+} \mathsf{E}[k_1na_1 + k_2(a_2 - 2a_1) + \ldots + k_n(a_n - na_1)\,,\ k_1, k_2, \ldots, k_n \text{ probíhají množinu celých čísel}]\,,$$

kde $\mathfrak{M}$ je nejmenší podgrupa z $\mathfrak{G}$ obsahující množinu M, tedy

$$x \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow x = h_1a_1 + h_2a_2 + \ldots + h_na_n\,,$$

h_i celé číslo (píše se též $\mathfrak{M} = [M]$). Nechť tedy $x = h_1a_1 + h_2a_2 + \ldots + h_na_n$ a

$$h_1 + 2h_2 + \ldots + nh_n = gn + s\,,$$

kde $0 < s \leqq n$.

a) Nechť $s \neq 1$. Potom $x = a_s + nga_1 + \sum_{i=2}^{n} k_i(a_i - ia_1)$, kde $k_i = h_i$ pro $i \neq s$, $k_s = h_s - 1$.

b) Nechť $s = 1$. Potom $x = a_1 + gna_1 + \sum_{i=2}^{n} h_i(a_i - ia_1)$. Tedy v obou případech

$$x \in \{a_1, \ldots, a_n\} + E[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_i \text{ celé}] .$$

Nechť nyní pro jisté ι, i a celá čísla $\varkappa_j$, k_j ($j = 1, \ldots, n$) platí

$$a_\iota + \varkappa_1 na_1 + \sum_{l=2}^{n} \varkappa_l(a_l - la_1) = a_i + k_1 na_1 + \sum_{l=2}^{n} k_l(a_l - la_1) .$$

Použijeme nyní předpokladu, že $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezávislé prvky.

1. Nechť $i = \iota$. Potom zřejmě $k_j = \varkappa_j$.

2. Nechť $i = 1 < \iota$. Potom porovnáme koeficienty u a_l a dostaneme rovnice

$$1 + \varkappa_1 n - \sum_{l=2}^{n} l\varkappa_l = nk_1 - \sum_{l=2}^{n} lk_l , \quad \varkappa_2 = k_2, \ldots, \varkappa_i = k_i + 1, \ldots, \varkappa_n = k_n .$$

Odtud plyne $n\varkappa_1 - i = nk_1 - 1$, což je spor, neboť $2 \leqq i < n$ a tedy $n \not\mid i - 1$.

3. Nechť $1 < i < \iota$. Srovnáním koeficientů u a_l plyne

$$n\varkappa_1 - \sum_{l=2}^{n} l\varkappa_l = nk_1 - \sum_{l=2}^{n} lk_l ,$$
$$\varkappa_2 = k_2, \ldots, \varkappa_i = k_i + 1, \ldots, \varkappa_\iota + 1 = k_\iota, \ldots, \varkappa_n = k_n .$$

Odtud dostáváme $n\varkappa_1 - i = nk_1 - \iota$, tedy $i = \iota$, což je spor. Tedy $\mathfrak{M} = \{a_1, \ldots, a_n\} \dot{+} \mathsf{E}[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_j \text{ celé}]$.

Označme $\mathfrak{N} = \mathsf{E}[k_1 na_1 + \ldots + k_n(a_n - na_1),\ k_j \text{ celé}]$. Je-li N systém representantů tříd grupy $\mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{M}$, platí podle známých vět o rozkladu grupy v třídy

$$\mathfrak{G} = [\{a_1, \ldots, a_n\} \dot{+} \mathfrak{N}] \dot{+} N = \{a_1, \ldots, a_n\} \dot{+} [\mathfrak{N} \dot{+} N] .$$

Tedy $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je faktorem grupy $\mathfrak{G}$ ve smyslu Hajósově.

II. Nechť M je nekonečná množina nezávislých prvků z $\mathfrak{G}$. Nechť μ značí počáteční ordinální číslo příslušné k mohutnosti card M. Uspořádejme M v posloupnost $\{a_0, a_1, \ldots, a_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$. Nechť opět $\mathfrak{M} = [M]$. Je card $\mathfrak{M} =$ card M. Uspořádejme $\mathfrak{M}$ v posloupnost $\{x_0, x_1, \ldots, x_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$. Množiny A_ι ($\iota < \mu$) definujme takto: $A_\iota = \varnothing$, je-li $x_0 = 0$; $A_\iota = \{a_{\iota_1}, \ldots, a_{\iota_m}\}$, je-li $x_\iota = \alpha_1 a_{\iota_1} + \ldots + \alpha_m a_{\iota_m}$, při čemž $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0$. Z nezávislosti množiny M plyne jednoznačnost definice množin A_ι.

Nyní budeme transfinitní indukcí definovat posloupnost $\{t_0, \ldots, t_\iota, \ldots\}$, $\iota < \mu$ prvků z M, pro niž platí $M = M \dot{+} \bigcup_{\iota<\mu}\{t_\iota\}$, ($\{t_\iota\}$ značí množinu o jediném prvku t).

Položme $t_0 = x_0 - a_0$. Je zřejmě $M \perp \{t_0\}$ a $x_0 \in M \dot{+} \{t_0\}$.

Nechť $1 \leqq \nu < \mu$ a předpokládejme, že jsou definována $t_\iota \in \mathfrak{M}$ pro $\iota < \nu$ taková, že $M \perp \bigcup_{\iota<\mu}\{t_\iota\}$ a $x_\iota \in M \dot{+} \bigcup_{\delta\leqq\iota}\{t_\delta\}$.

Nechť $x_{\iota_\varkappa} = t_\varkappa + a_0$. Ukážeme, že $\mathfrak{M} \neq M + \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$. Je totiž card $\bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\} <$ card M. Existuje tedy a_{ι_μ} non $\in \bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\}$. Protože

$$x \in M + \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\} \Rightarrow x = a + x_{\iota_\varkappa} - a_0$$

pro jisté $\iota_\varkappa$ a $a \in M$, platí $2a_{\iota_\mu}$ non $\in M \dotplus \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$. Jinak by totiž bylo $2a_{\iota_\mu} = a + x_{\iota_\varkappa} - a_0$, tedy $x_{\iota_\varkappa} = a_0 - a - 2a_{\iota_\mu}$, odkud $a_{\iota_\mu} \in A_{\iota_\varkappa}$, což je spor s volbou a_{ι_μ}.

Nechť ν_1 je první index, pro nějž platí x_{ν_1} non $\in M \dotplus \bigcup_{\iota<\nu}\{t_\iota\}$ (je $\nu_1 \geqq \nu$), nechť a_{ι_ν} non $\in \bigcup_{\varkappa<\nu} A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\} \cup A_{\nu_1}$. Položme $t_\nu = x_{\nu_1} - a_{\iota_\nu}$. Zřejmě platí $t_\nu \in \mathfrak{M}$ a $x_\nu \in M + \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\nu\}$. Ukážeme, že $M \perp \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\iota\}$. Připusťme, že $a_\mu + t_\nu = a_\lambda + t_\varkappa$ pro $\varkappa < \nu$. Potom $a_\mu + x_{\nu_1} - a_{\iota_\nu} = a_\lambda + x_{\iota_\varkappa} - a_0$ a tedy $a_{\iota_\nu} = a_\mu + x_{\nu_1} - a_\lambda - x_{\iota_\varkappa} + a_0$. Kdyby $a_\mu = a_{\iota_\nu}$, potom by bylo $x_{\nu_1} = a_\lambda + t_\varkappa$, což je spor s volbou x_{ν_1}. Tedy $\iota_\nu \neq \mu$ a $a_{\iota_\nu} \in A_{\nu_1} \cup A_{\iota_\varkappa} \cup \{a_0\}$, což je opět spor z volbou a_{ι_ν}. Tedy $M \perp \bigcup_{\iota\leqq\nu}\{t_\iota\}$. Tím je hledaná transfinitní posloupnost sestrojena.

Důkaz tvrzení, že M je faktor, je týž, jako v odstavci I.

Poznámka. V článku [3] bylo dokázáno, že množina $\{0, 1, \alpha\}$, kde α je iracionální číslo, je faktorem grupy reálných čísel ve smyslu Hajósově. Toto tvrzení plyne ihned z naší věty, neboť pro iracionální číslo ε, nezávislé racionálně na α, je $\{\varepsilon, 1 + \varepsilon, \alpha + \varepsilon\}$ nezávislou množinou v množině reálných čísel, tedy faktorem. Tvrzení pak plyne z toho, že je-li A faktorem $\mathfrak{G}$ a $a \in \mathfrak{G}$, je též $A + \{a\}$ faktorem $\mathfrak{G}$.

Literatura

[1] *А. Г. Курош,* Теория групп. Москва, 1953.

[2] *G. Hajós*: Sur la factorisation des groupes abéliens. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *74* (1949), 157—162.

[3] *K. Koutský* a *M. Sekanina*: Rozklad přímky na shodné trojbodové množiny. Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 317—326.

Резюме

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИСТЕМ НЕЗАВИСИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

В статье доказывается теорема, что каждая система M независимых элементов в абелевой группе $\mathfrak{G}$ (см. [1], стр. 123) является множителем $\mathfrak{G}$ в смысле Хайоша, т. е. существует такое подмножество $N \subset \mathfrak{G}$, что каждый элемент из $\mathfrak{G}$ можно однозначно представить в виде суммы $a + b$, где $a \in M$, $b \in N$.

Summary

ON A CERTAIN PROPERTY OF A SET OF INDEPENDENT ELEMENTS OF AN ABELIAN GROUP

MILAN SEKANINA, Brno

In the paper there is proved that every set M of independent elements of an abelian group $\mathfrak{G}$ (see [1], 123 p.) is a factor of $\mathfrak{G}$ in Hajós' sense; this means that there exists a subset N of $\mathfrak{G}$ such that each element of $\mathfrak{G}$ can be expressed just in one way as $a + b$ where $a \in M$ and $b \in N$.