Recense

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 4, 474--488

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117326

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

RECENSE

Eduard Čech: **Topologické prostory.** S dodatkem JOSEFA NOVÁKA: Konstrukce některých význačných topologických prostorů a MIROSLAVA KATĚTOVA: Plně normální prostory. Nakladatelství ČSAV, Praha 1959, str. 524. Cena 38.— Kčs.

Vlastní kniha (str. 13—381) obsahuje celkem 12 paragrafů a podle svého obsahu se zcela zřetelně rozpadá na dvě, blíže ovšem nijak neoddělené části.

První z těchto částí (§ 1—§ 3, str. 13—56) má ráz přípravný a akademik Čech v ní podává velmi pěkně zpracovaný přehled základních pojmů abstraktní teorie množin. O této části se zmíním jen stručně, poněvadž látka v nich obsažená neobsahuje topologické pojmy.

V § 1 se akademik Čech zabývá pojmem prvků a částí množin, kartézským součinem dvou množin a zobrazením, ekvivalencí množin a rozklady, množinovými operacemi (sjednocení, průnik a rozdíl množin) a obecnými kartézskými součiny. V následujícím § 2 pak probírá pojem posloupností a spočetných množin a nejzákladnější věty nauky o mohutnostech, pokud je bude potřebovat při výkladu o topologických prostorech. Další § 3 je věnován uspořádaným množinám. Hovoří se v něm o pojmu a typech uspořádání, zvláště pak o přirozeném uspořádání množiny celých nebo racionálních čísel, pojmu dobrého uspořádání a pořadových čísel, transfinitní indukci a provádí se důkaz, že každou množinu lze dobře uspořádat. Po té přicházejí některé důležité aplikace teorie dobrého uspořádání na nauku o mohutnostech, dále se vykládá konfinalita a dokazuje se Zornovo lemma o množinách částečně uspořádaných. Ke každému z těchto prvních tří paragrafů je připojena řada vybraných cvičení, která vesměs sleduje cíl, aby čtenář, který nezná abstraktní teorii množin odjinud, si v tomto oboru účelně prohloubil nebo doplnil své znalosti získané četbou textu.

Výklady topologických pojmů počínají až v druhé části knihy § 4—§ 12, str. 57—381). V § 4 se mluví o topologických prostorech a F-prostorech. K pojmu *topologického prostoru* se podle Čecha dojde takto:

Budiž P libovolná množina a budiž $\mathfrak{P}$ soustava všech jejích částí. Pak řekneme, že P je topologický prostor (krátce jen prostor), je-li dáno zobrazení u množiny $\mathfrak{P}$ do $\mathfrak{P}$, které splňuje tyto dva axiomy:

($\overline{\mathrm{I}}$) jestliže $X \subset P$ obsahuje nanejvýš jeden prvek, je $uX = X$;

($\overline{\mathrm{II}}$) $X_1 \subset P, X_2 \subset P \Rightarrow u(X_1 \cup X_2) = (uX_1) \cup (uX_2)$.

Zobrazení u nazýváme pak *topologií* prostoru P a pro $X \subset P$ množinu uX nazýváme *uzávěrem* množiny X (při topologii u). Pokud nemůže vzniknout nedorozumění, je pro označení uzávěru množiny $X \subset P$ používán v knize obvykle znak $\overline{X}$. Množiny $X \subset P$, pro něž $\overline{X} = X$ se nazývají *uzavřené*, jejich komplementy (v prostoru P) pak množiny *otevřené*.

Na základě této své definice topologického prostoru pak Čech odvozuje řadu jeho vlastností a definuje pojem derivace a hromadných bodů množiny, vnitřku, okolí, úplných soustav okolí aj.

Čechovo pojetí topologického prostoru je obecnější než např. pojetí K. Kuratowského (viz K. Kuratowski: Topologie I, 2. vyd., Warszava 1948, str. 20), který vyžaduje, aby topologie u splňovala kromě axiomů ($\bar{\text{I}}$) a ($\overline{\text{II}}$) ještě axiom

$$X \subset P \Rightarrow uuX = uX\,,$$

při čemž uuX značí uzávěr uzávěru množiny X. Topologické prostory, které splňují předešlý axiom, nazývá Čech *F-prostory*. Důvod, proč Čech zobecnil pojem topologického prostoru, spočívá především v tom, že některé důležité topologické prostory (v Čechově pojetí), např. prostor všech reálných spojitých funkcí $f(t)$ definovaných v intervalu $[0, 1]$, v němž topologie je definována pomocí konvergence, nejsou F-prostory.

Teorii F-prostorů rozvíjí Čech ve zvláštním odstavci § 4 a ukazuje, že takovéto prostory lze definovat zcela jednoznačně pomocí předepsaného systému uzavřených množin, který splňuje axiomy ($\mathrm{I}\mathfrak{F}$) až ($\mathrm{IV}\mathfrak{F}$). Na to se věnuje studiu dalších topologických pojmů jako jsou např. vnořené prostory, hustě a řídce rozložené množiny, hranice bodové množiny, husté a řídké bodové množiny a bodové množiny první kategorie a posléze přechází k základům teorie charakterů.

Charakter bodové množiny M, značka $\chi(M)$, jest nejmenší možná mohutnost úplné soustavy okolí množiny M. *Pseudocharakter bodové množiny* M, značka $\psi(M)$, je nejmenší možná mohutnost takové soustavy okolí množiny M, že $M = \bigcap U (U \in \mathfrak{U})$. *Vnitřní charaker bodové množiny* M, značka $\omega(M)$, je pak nejmenší mohutnost takové soustavy $\mathfrak{U}$ okolí množiny M, pro kterou průnik $\bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$ je buďto roven M nebo není okolím množiny M. Čech odvozuje řadu důležitých vět, z nichž snad bych tu upozornil jen na větu, že každý vnitřní charakter je regulární mohutnost. Pro F-prostory pak zavádí ještě pojem *totálního charakteru prostoru* P, značka $\chi^t(P)$.

Teorie charakterů byla dlouho střediskem zájmu a studia v topologickém semináři, který akademik Čech, tehdy ještě profesor brněnské přírodovědecké fakulty, vedl v Brně od května 1936 až do násilného uzavření českých vysokých škol v listopadu 1939. Východiskem byl tu známý Urysohnův výsledek z roku 1925, jemuž se podařilo sestrojit regulární spočetný prostor, který v jednom svém bodě má nespočetný charakter. Urysohnův výsledek byl poprvé zlepšen v roce 1938 J. Novákem, který sestrojil spočetný prostor, jehož každý bod má charakter mohutnosti kontinua. Na základě dalších výsledků, které byly v topologickým semináři dosaženy, vybudoval pak mladistvý skvělý matematik Bedřich Pospíšil, umučený později gestapem ve věku 32 let, soustavnou teorii charakterů, v níž došel k výsledkům, jejichž obecnost je tak překvapující, že sama o sobě by stačila k tomu, aby autor byl zařazen mezi velké badatele. Proto také Čechova kniha byla věnována jeho památce.

Vraťme se však ještě k § 4. Ve cvičeních k tomuto paragrafu připojených (str. 95—101) zavádí Čech ještě pojem tzv. *obecného topologického prostoru*, který vznikne z pojmu topologického prostoru tím, že axiom ($\bar{\text{I}}$) nahradíme slabším axiomem

$$(\bar{\text{I}}\text{ ob.}) \qquad u\emptyset = \emptyset\,,$$

axiom ($\overline{\text{II}}$) ponecháme beze změny a dále připojíme axiom

$$(\overline{\text{III}}\text{ ob.}) \qquad X \subset P \Rightarrow X \subset uX\,.$$

Je zřejmé, že zatím co v topologickém prostoru jsou jednobodové množiny vesměs uzavřené, v obecném topologickém prostoru tak být nemusí. Všechna zmíněná cvičení jsou pak vesměs věnována studiu těchto obecných topologických prostorů a je v nich ukázáno, že mnohé pojmy a věty platné pro topologické prostory se dají buď přímo anebo s menšími úpravami přenést i na obecné topologické prostory, kdežto jinde takové přenesení (i po možných úpravách) vede k větám, které jsou nesprávné.

V topologickém semináři byly však studovány ještě obecnější prostory. Ve svém článku „Topologické prostory", uveřejněném v Časopise pro pěst. mat. a fys., roč. *66* (1937), str. D 225—D 264, definoval Čech „topologický prostor" jakožto množinu P, v níž „topologie" u splňuje pouze tyto axiomy

$$(\mathrm{I}^u) \qquad u\emptyset = \emptyset\,,$$

$$(\mathrm{II}^u) \qquad X \subset P \Rightarrow X \subset uX\,,$$

$$(\mathrm{III}^u) \qquad X_1 \subset X_2 \subset P \Rightarrow uX_1 \subset uX_2\,.$$

Nepředpokládal tedy ani, že jednobodové množiny jsou uzavřené, ani že topologie u je additivní funkcí, nýbrž že je jen funkcí monotonní. Snadno se nahlédne, že topologický prostor i obecný prostor z Čechovy knihy jest též „topologickým prostorem" ve smyslu tohoto Čechova článku, neboť předešlé tři axiomy (I^u) až (III^u) jsou bezprostředními důsledky axiomů ($\bar{\mathrm{I}}$) a ($\bar{\mathrm{II}}$).

Ve své knize však akademik Čech od tohoto původního, vskutku velmi obecného pojetí topologického prostoru upustil, třebaže v topologickém semináři byla i v tomto směru dosažena řada hodnotných a velmi zajímavých výsledků. K tomuto kroku vedlo ho patrně to, že axiom additivity, tj. axiom ($\bar{\mathrm{II}}$), má v konkrétních případech důležitých topologických prostorů fundamentální důležitost a pak snad i to, že rozsah knihy by se tím značně zvětšil. To je asi vše, co třeba říci k § 4.

V následujícím § 5 jsou probírány axiomy oddělování. O dvou bodových množinách M_1, M_2 pravíme, že jsou *oddělené* (v prostoru P), jestliže existuje okolí U_1 množiny M_1 a okolí U_2 množiny M_2 tak, že je splněna podmínka $U_1 \cap M_2 = U_2 \cap M_1 = \emptyset$.

Dále pravíme, že množiny M_1, M_2 jdou *H-oddělené* (v prostoru P), jestliže existuje okolí U_1 množiny M_1 a okolí U_2 množiny M_2 tak, že platí $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Jsou pak studovány vzájemné vztahy obou druhů oddělenosti a definován pojem *H-prostoru*, v němž každé dva různé body jsou H-oddělené. Zvláštní důležitost mají FH-prostory neboli *Hausdorffovy*, o nichž je kromě jiného dokázána věta, že mohutnost soustavy všech uzavřených množin nekonečného FH-prostoru je rovna aspoň mohutnosti kontinua ($\geqq \exp \aleph_0$). Je známo, že v předešlé větě nelze nahradit předpoklad FH-prostoru předpokladem F-prostoru. Otázkou však zůstává, zda jej lze nahradit předpokladem H-prostoru.

Následující úvahy o *R-prostorech*, tj. prostorech, v nichž ke každému okolí U každého bodu existuje takové okolí V téhož bodu, že $\bar{V} \subset U$. Zvláštním případem R-prostorů jsou FR-prostory neboli prostory *regulární*. Dále se studují prostory *normální* neboli *N-prostory*, tj. takové F-prostory, v nichž každé dvě disjunktní uzavřené množiny jsou H-oddělené. Vedlo by příliš daleko, kdybych zde chtěl podrobněji probírat obsah celého § 5 včetně cvičení, a proto přejdu k následujícímu § 6.

V tomto paragrafu jsou uvedeny některé příklady důležitých topologických prostorů. Především je tu rozvinuta theorie tzv. *uspořádaných prostorů* a *zobecněných uspořádaných prostorů*, v níž je kromě jiného ukázáno, že každý z. u. prostor je dědičně normální. Následuje odstavec o kartézských součinech topologických prostorů a odstavec o *L-prostorech*, v nichž lze topologii definovat pomocí konvergence. Celý § 6 je přímo nabit množstvím látky a doplněn bohatou sbírkou různých příkladů a cvičení. Příklady i cvičení sice kladou dosti značné nároky na čtenáře, avšak jejich nesporná cena spočívá v tom, že podporují a prohlubují jeho abstraktní myšlení.

Pojem spojitosti má v topologii prvořadý význam. V Čechově knize je mu věnován celý § 7. Nechť P, P_1 jsou dané topologické prostory a nechť $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{P}_1$ je množina všech částí prostoru P resp. P_1. Nechť f je zobrazení prostoru P do P_1 a nechť f^1 resp. f^{-1} je zobrazení množiny $\mathfrak{P}$ do množiny $\mathfrak{P}_1$ resp. množiny $\mathfrak{P}_1$ do množiny $\mathfrak{P}$, které je indukováno zobrazením f.

O nějakém bodě $a \in P$ pak Čech praví, že je to *bod spojitosti* zobrazení f, jestliže pro každou bodovou množinu $M \subset P$ platí

$$a \in \overline{M} \Rightarrow f(a) \in \overline{f^1(M)} .$$

Zobrazení f se nazývá *spojité*, jestliže každý $x \in P$ je bodem spojitosti zobrazení f, nebo (což je totéž) jestliže pro každou $M \subset P$ platí

$$f^1(\overline{M}) \subset \overline{f^1(M)} .$$

Dále se zavádí pojem *přesně spojitého zobrazení* jakožto takového zobrazení f, pro něž platí

$$M_1 \subset P , \quad M = f^{-1}(M_1) \Rightarrow \overline{M}_1 = f^1(\overline{M}) ,$$

pojem *uzavřeného zobrazení* jakožto takového zobrazení f, pro něž pro každou v P uzavřenou $M \subset P$ je $f^1(M)$ uzavřená v P_1, a pojem *polouzavřeného zobrazení* jakožto takového zobrazení f, že pro každou $M_1 \subset P_1$, pro niž $f^{-1}(M_1)$ je uzavřená v P, je M_1 uzavřená v P_1.

Obdobně se definuje inversní spojitost. O nějakém bodě $b \in P_1$ říká Čech, že je to bod *inversní spojitosti* zobrazení f, jestliže pro každou bodovou množinu $M \subset P$ platí

$$b \in \overline{f^1(M)} \Rightarrow f^{-1}(b) \cap \overline{M} \neq \emptyset .$$

Zobrazení f se pak nazývá *inversně spojité*, jestliže každý $y \in P$ je bodem inversní spojitosti zobrazení f. Zobrazení, které je současně spojité a inversně spojité nazývá se *oboustranně spojité*.

Uvedl jsem výčet pojmů, které se vyskytují v prvních dvou částech § 7, aniž bych si podrobněji povšiml rozmanitých vztahů mezi jednotlivými druhy zobrazení. Rovněž nechci podrobněji rozebírat další části § 7, z nichž část třetí jedná o spojitých funkcích v normálních prostorech, část čtvrtá pak obsahuje drobné poznámky a konečně část pátá cvičení. Řeknu jen, že je to četba zajímavá a velmi poučná.

Pak přichází velmi důležitý a bohatě propracovaný § 8. V první jeho části se především mluví o pokrývání prostoru (resp. bodové množiny) soustavou bodových množin. Pravíme, že soustava $\mathfrak{S}$ bodových množin prostoru P *zakrývá* množinu $Q \subset P$, jestliže ke každému $x \in Q$ existuje vhodná $X \in \mathfrak{S}$ taková, že $x \in X$. Dále řekneme, že soustava $\mathfrak{S}$ *pokrývá* množinu $Q \subset P$, jestliže pro každý $x \in Q$ existuje vhodná $X \in \mathfrak{S}$, která jest okolím bodu x (v prostoru P). V případě $Q = P$ pak soustavu $\mathfrak{S}$ nazýváme *zakrytím*, resp. *pokrytím* prostoru P.

Po té se zavádí pojem bodů zhuštění. O nějakém bodě $a \in P$ pravíme, že je to *slabý bod zhuštění* množiny $M \subset P$, jestliže pro každé okolí U bodu a jest množina $M \cap U$ nespočetná. Dále pravíme, že bod $a \in P$ je *silný bod zhuštění* množiny $M \subset P$, jestliže každé okolí U bodu a je okolím nespočetně mnoha bodů množiny M. Snadno se nahlédne, že při F-prostorech není rozdílu mezi slabým a silným bodem zhuštění bodové množiny, a proto v tomto případě mluvíme krátce jen o bodech zhuštění.

Přechází se pak k studiu Lindelöfovy vlastnosti prostoru P. Pravíme, že prostor P má *slabou*, resp. *silnou Lindelöfovu vlastnost*, jestliže pro každou bodovou množinu $Q \subset P$ je v každé soustavě bodových množin, která pokrývá Q, obsažena nejvýš spočetná soustava, která zakrývá resp. pokrývá množinu Q. Při F-prostorech ovšem obě předešlé vlastnosti jsou totožné. Po této základní definici se odvozují podmínky (často nutné i postačitelné), aby prostor měl některou z právě definovaných Lindelöfových vlastností. Při takových prostorech se ukazuje, že pojem zakrývání, resp. pokrývání bodové množiny soustavou bodových množin je v úzkém vztahu nejen s pojmem slabých, resp. silných bodů zhuštění bodových množin, ale i s jinými topologickými pojmy jako jsou např. řídce rozložené množiny, husté množiny, sestupně nebo vzestupně dobře uspořádané soustavy bodových množin aj. Některé odvozené výsledky byly sice, zejména při F-prostorech, již dříve známy a studovány, nicméně jsou zde i výsledky zcela nové, získané v topologickém semináři. Rád bych ale upozornil, že v té šíři a obecnosti, jaká je v Čechově knize, nebyly podle mých zkušeností soustavně zpracovány vůbec.

O dalších částech § 8 se zmíním jen stručně, poněvadž by se jinak můj referát pro bohatost látky velmi rozrostl. Tak v druhé části § 8 jsou studovány *spočetně kompaktní prostory* neboli stručně *S-kompaktní prostory*, tj. prostory mající vlastnost, že každé jejich spočetné pokrytí obsahuje konečné zakrytí. Třetí část § 8 je pak věnována kompaktním prostorům, tj. prostorům majícím vlastnost, že každé jejich pokrytí obsahuje konečné zakrytí. Prázdnou množinu $\emptyset$ počítáme jak mezi S-kompaktní, tak mezi kompaktní prostory.

Při té příležitosti pokládám za vhodné zmínit se i o tom, že pojem S-kompaktního, resp. kompaktního prostoru byl v topologickém semináři zobecněn v tom smyslu, že pro danou nekonečnou mohutnost $\mathfrak{m}$ byly studovány prostory mající vlastnost, že každé jejich pokrytí $\mathfrak{S}$, pro něž moh $\mathfrak{S} = \mathfrak{m}$ obsahovalo zakrytí (pokrytí) o mohutnosti menší než $\mathfrak{m}$. V tomto směru byla dosažena řada velmi zajímavých a zdá se, že i hodnotných výsledků, jež však vesměs zůstaly nepublikovány a pochopitelně nebyly ani pojaty do Čechovy knihy.

Čtvrtá část § 8 se zabývá teorií *úplně regulárních prostorů.* Pravíme, že prostor P je úplně regulární, jestliže P je F-prostor a jestliže ke každé uzavřené množině $F \subset P$ a ke každému bodu $a \in P - F$ existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1$, $f(a) = 0$, $x \in F \Rightarrow f(x) = 1$. Je kromě jiného ukázáno, že každý úplně regulární prostor je R-prostor a každý normální prostor je úplně regulární. Je pak dále zaveden pojem *kompaktního β-obalu* daného topologického prostoru. Pravíme, že prostor P je kompaktní β-obal prostoru Q, jestliže P je kompaktní FH-prostor, Q je vnořen do P, Q je hustý v P a ke každé omezené spojité funkci f v oboru Q existuje spojité rozšíření na obor P. Tato definice má ovšem smysl jen v tom případě, že Q je úplně regulární prostor; v tomto případě kompaktní β-obal — budeme ho značit $\beta(Q)$ — skutečně existuje a je „v podstatě", tj. až na homeomorfii, jednoznačně určen.

Pátá a poslední část § 8 obsahuje cvičení, která vhodným způsobem doplňují a prohlubují látku obsaženou v předcházejícím textu.

§ 9 jedná o metrisovatelných prostorech. Nejprve je definována *odchylka* ϱ v množině P jako reálná funkce v oboru $P \times P$, pro niž platí $\varrho(x, x) = 0$, $\varrho(x, y) > 0$ pro $x \neq y$. Platí-li $\varrho(x\ y) = \varrho(y, x)$ pro libovolné dva body z P, nazveme odchylku ϱ *symetrickou odchylkou*. Jestliže pro každé tři body x, y, z je splněna trojúhelníková nerovnost, nazývá se ϱ *metrikou*. Je-li ϱ odchylka v P a $x \in P$, potom množinu $\mathscr{E}_x[\varrho(a, x) < \varepsilon]$ nazveme *(ϱ, ε)-okolí bodu x*. O topologii, která jest definována pomocí (ϱ, ε)-okolí, řekneme, že je vytvořena odchylkou ϱ. Je-li ϱ metrika, je tato topologie FHL-topologií na P. Prostor P se nazývá metrisovatelný, je-li možno vytvořit jeho topologii metrikou. V prvním odstavci jsou pak odvozeny nejzákladnější poznatky o metrisovatelných prostorech týkající se otevřených a uzavřených množin a kompaktnosti.

Druhý odstavec se týká metrisovatelnosti prostorů. Základní větou je tu následující tvrzení: Aby prostor P byl metrisovatelný, k tomu je nutné a stačí, aby existovala posloupnost $\{\mathfrak{A}_n\}_1^\infty$ neprázdných soustav bodových množin s těmito vlastnostmi: A) Pro každé n je $P = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{A}_n)$ B) Je-li $X_1 \in \mathfrak{A}_{n+1}$, $X_2 \in \mathfrak{A}_{n+1}$, $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, pak existuje taková $X \in \mathfrak{A}_n$, že $X_1 \cup X_2 \subset X$. C) Pro $a \in P$ budiž $W_n(a) = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{A}_n,\ a \in X)$. Pak členy posloupnosti $\{W_n(a)\}_1^\infty$ tvoří úplnou soustavu okolí bodu a.

V odstavci třetím je definováno diskontinuum jako kartézský součin $\mathfrak{P}_{n=1}^{\infty} P_n$, kde $P_n = \{0, 1\}$. Je ukázáno, že pro neprázdný kompaktní metrisovatelný prostor P existuje spojité zobrazení diskontinua na P.

Čtvrtý odstavec jedná o *úplných metrických prostorech*. Je dokázána existence úplného obalu pro libovolný metrický prostor. Prostor Q nazveme *topologicky úplným prostorem*, existuje-li takový kompaktní FH-prostor P, že Q je G_δ-množina v P. Je sledována souvislost mezi topologicky úplnými prostory a úplnými metrickými prostory. V odstavci pátém jsou studovány *funkce 1. třídy* na P, to jest funkce, které jsou limitou posloupnosti spojitých funkcí na P. Je tu hlavně studován pojem dokonale uzavřených a otevřených množin v P. Bodovou množinu $F \subset P$ nazveme *dokonale uzavřenou* v prostoru P, existuje-li spojitá funkce f v oboru P, pro kterou je $F = \mathscr{E}_x[f(x) = 0]$. Komplement dokonale uzavřené množiny nazveme množinou *dokonale otevřenou.*

V následujícím § 10 se probírá nauka o souvislosti. Definici souvislých množin, která je uvedena v Čechově knize, poprvé zavedl N. J. Lennes v pojednání „Curves in non-Metrical Analysis Situs with an Application in the Calculus of Variations", Amer. Journal of Math., *33* (1911), str. 303. Nezávisle na Lennesovi znovu tutéž definici zavedl F. Hausdorff v knize „Grundzüge der Mengenlehre", 1914, kap. VII, § 7. Definice sama pak zní: Bodová množina $M \subset P$ se nazývá *souvislá*, jestliže $M \neq \emptyset$ a jestliže ze vztahu $M = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$ plyne, že množiny A, B nejsou oddělené.

Je naprosto nemožné podrobněji mluvit o všech pojmech, které jsou v § 10 obsaženy a proto se jen letmo dotknu některých z nich. Po výkladu základních vlastností souvislých množin definuje Čech *komponenty* a *kvasikomponenty*. Po té probírá *kontinua* a *semikontinua*. Kontinuem rozumí každý prostor P, který obsahuje víc než jeden bod a je kompaktní a souvislý. Množina $M \subset P$ je kontinuem, jestliže M jakožto uzavřený prostor je kontinuum. Semikontinuem pak rozumí každou bodovou množinu S, která je buď dvoubodová anebo, v případě, že obsahuje více než jeden bod, existuje ke každým dvěma bodům $a \in S$, $b \in S$, $a \neq b$ vhodné kontinuum $K \subset S$, které obsahuje oba body a, b.

Po té studuje *roztínání prostoru* bodovou množinou a *ireducibilně souvislé prostory* mezi dvěma body $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$. Tím rozumí takové prostory P, které jsou souvislé a mají vlastnost, že žádná souvislá bodová množina $S \neq P$ neobsahuje oba body a, b. Dále definuje *lineárně orientované prostory* a zavádí pojem *pseudooblouku* a (jednoduchého) *oblouku*. Pseudoobloukem nazývá každý uspořádaný prostor P bez skoků a bez mezer, který obsahuje první bod a i poslední bod $b \neq a$. Pseudooblouk, který obsahuje hustou spočetnou množinu, je oblouk. Ukazuje se pak, že pro každý ireducibilně souvislý prostor mezi body a, b existuje prosté spojité zobrazení tohoto prostoru na pseudooblouk a že každý oblouk se dá homeomorfně zobraziti na interval $[0, 1]$.

Dále jsou probírány *cyklicky uspořádané množiny* a *cyklické prostory*. Kompaktní a cyklický prostor se nazývá *pseudokružnice*. Pseudokružnice, která obsahuje hustou spočetnou množinu, se nazývá *topologická kružnice* (nebo též jednoduchá uzavřená křivka). Ukazuje se tam, že každá topologická kružnice dá se homeomorfně zobrazit na množinu $\mathscr{E}_{(x,y)}[x^2 + y^2 = 1]$, tj. na jednotkovou kružnici euklidovské roviny.

V předposledním odstavci § 10 je uvedeno několik zajímavých vět o *dělicích bodech* prostoru. Při tom bod $a \in P$ se zove dělicím bodem prostoru P, jestliže P je souvislý, avšak množina $P - (a)$ není souvislá. Poslední odstavec § 10 obsahuje značné množství příkladů, které podobně jako v předešlých paragrafech i zde vhodně doplňují a prohlubují vyloženou látku.

Základním pojmem § 11 je pojem *bodu lokální souvislosti prostoru P*. Tím se rozumí takový bod $a \in P$, jehož souvislá okolí tvoří úplnou soustavu okolí tohoto bodu. Pro danou bodovou množinu $Q \subset P$ pak bod $a \in P$ se nazývá *bodem lokální souvislosti množiny* Q, jestliže ta okolí U bodu a, pro něž množina $Q \cap U$ je souvislá, tvoří úplnou soustavu okolí tohoto bodu; při tom ovšem nemusí být $a \in Q$.

Po odvození několika vět o bodech lokální souvislosti se definují *prostory lokálně souvislé* jakožto prostory, jejichž každý bod je bodem lokální souvislosti prostoru. O nějaké bodové množině $Q \subset P$ se praví, že jest lokálně souvislá, jestliže vnořený prostor Q je lokálně souvislý. Dokazuje se pak řada zajímavých vlastností lokálně souvislých prostorů i množin, načež se přechází k významné větě o *existenci oblouku*, jejímž obsahem je, že každé dva různé body a, b metricky úplného, souvislého a lokálně souvislého prostoru P se dají spojit obloukem $C \subset P$ s koncovými body a, b. Obdobná věta platí pro topologicky úplné, souvislé a lokálně souvislé prostory; takovéto prostory P mají vlastnost, že pro každé dva jejich různé body a, b existuje kontinuum $C \subset P$, které obsahuje oba body a, b. V závěru § 11 se probírají *lokálně souvislá kontinua*, načež následují příklady.

§ 12 je věnován některým novějším výsledkům. Nejprve se pojednává o *FH-uzavřených prostorech*, t. j. *FH*-prostorech s touto vlastností: Jestliže $T \supset P$ je *FH*-prostor, pak množina P je uzavřená v T. Studium těchto prostorů bylo započato Alexandrovem a Urysohnem v jejich společném jednání „Mémoire sur les espaces topologiques compacts" (1929, str. 43n) a později dále rozvinuto M. Katětovem, jehož výsledky byly ze značné části převzaty do Čechovy knihy.

Druhá část § 12 povětšině obsahuje řadu Pospíšilových a Čechových výsledků o *existenci topologií* v dané nekonečné množině P, pro něž jsou předepsány charaktery, popř. pseudocharaktery jednotlivých bodů $x \in P$. V třetí části § 12 jsou hlavně uvedeny další důležité věty o *kompaktních β-obalech*. K celému paragrafu jsou pak opětně připojena cvičení.

Tím končím rozbor Čechovy knihy po obsahové stránce. Pokusil jsem se o to, aby čtenář dostal aspoň trochu přibližnou představu o bohatosti a rozmanitosti látky v knize probírané. Když však znovu přehlížím svůj referát, vidím, že se mi to podařilo vskutku jen velmi zhruba. Každý z 12 paragrafů knihy je přímo nabit úžasným množstvím faktů a vět, jejichž často skvělé důkazy jsou pro logicky myslícího čtenáře pravým požitkem.

Svým dílem se Čech podjal obtížného úkolu dát českým matematikům učebnici obecné topologie, jejíž znalost je dnes nezbytná pro hlubší studium takřka všech základních oborů moderní matematiky. A i když v předmluvě upřímně říká, že původní rukopis knihy, který byl v podstatě hotov již za okupace, nemohl úplně znova přepracovat s ohledem na nesmírně prudký vývoj, jímž v posledních letech obecná topologie prošla, přece jen jeho kniha podává obsáhlé a rozmanité informace i o nejaktuálnější problematice obecné topologie.

První kapitoly Čechovy knihy jsou poměrně snadné, čím dál tím více však činí kniha větší a větší nároky na čtenářovu vyspělost a logický úsudek. To ovšem při matematické učebnici tak velkého rozsahu je samozřejmé. Avšak velké pedagogické mistrovství Čechovo, s nímž vede čtenáře od nejjednodušších problémů až k problémům velmi složitým, to již není věc samozřejmá. Myslím, že i ve světové matematické literatuře jest jen několik málo knih, které by se po této stránce mohly vyrovnat Čechovu dílu. Tiskových chyb na knihu takového rozsahu a zaměření jest poměrně málo a pokud jsou, povětšině neruší smysl, takže pozorný čtenář si je může hned sám opravit. A to je další předností knihy a svědčí o velké pečlivosti autorově i recensentů. Kniha bude dlouho ozdobou naší moderní matematické literatury a autor jejím vydáním vykonal velmi záslužné dílo.

Dodatek I. Dodatek akad. Josefa Nováka, nazvaný „*Konstrukce některých význačných prostorů*" (str. 386—406), sleduje cíl vyjádřený nadpisem a skládá se ze tří částí.

V první z nich je podána *konstrukce regulárního F-prostoru, na němž je každá spojitá funkce konstantní*. Tato část je v podstatě přepracováním jedné významné Novákovy práce, uveřejněné v Časopise pro pěst. mat. a fys., roč. *73* (1949), str. 58—68.

V druhé části nazvané „*Konstrukce topologického prostoru, jehož uzávěry mají předepsané vlastnosti*" se akad. Novák zabývá tímto problémem: Je-li (P, u) topologický prostor, pak pro každé pořadové číslo ξ a bodovou množinu $X \subset P$ lze definovat tzv. ξ-tý uzávěr množiny X takto:

$$u^0X = X\,,\quad u^1X = uX\,,\quad u^\xi X = u(u^{\xi-1}X)\,,$$

když ξ je isolované pořadové číslo; $u^\xi X = \bigcup_{0 \leqq \eta < \xi} u^\eta X$, když ξ je limitní pořadové číslo.

Snadno se pak dokáže, že pro každé pořadové číslo ξ je (P, u^ξ) topologický prostor. Dá se dále ukázati, že pro každou bodovou množinu $X \subset P$ existuje nejmenší pořadové číslo $\varphi(x)$ takové, že množina $u^{\varphi(x)}X$ je uzavřená. Budiž $\Phi(P, u)$ množina všech takových pořadových čísel $\varphi(X)$, kde $X \subset P$. V této souvislosti položil Čech svého času otázku, jaké vlastnosti musí mít množina H pořadových čísel, aby v dané množině P existovala topologie u s vlastností $H = \Phi(P, u)$. V jedné své práci z roku 1950 (Proceedings Amer. Math. Soc. 1, str. 211—214) akad. Novák tento problém rozřešil a za předpokladu, že P je nekonečná spočetná množina našel nutné a dostatečné podmínky pro množinu H.

Z historického hlediska snad nebude bez zajímavosti, když uvedu, že pro velmi obecné prostory, které byly definovány Čechem v jeho článku „Topologické prostory" z roku 1937 a v nichž topologie u splňuje pouze následující tři axiomy: $u\emptyset = \emptyset$, $X \subset P \Rightarrow X \subset uX$, $X_1 \subset X_2 \subset P \Rightarrow uX_1 \subset uX_2$, byl tento problém řešen akad. V. Jarníkem v pojednání „Sur un problème de M. Čech" (Věstník Král. čes. společnosti nauk, roč. 1938). Pro prostory, v nichž se na topologii klade požadavek additivity však udal tehdy Jarník pouze jediný příklad množiny H, pro niž existuje v dané množině P topologie u taková, že $H = \Phi(P, u)$. Teprve Novákovi se podařilo za předpokladu, že P je nekonečná spočetná množina, zvládnout problém v celé jeho šíři.

Třetí část Novákova dodatku je věnována velmi důmyslné *konstrukci dvou spočetně kompaktních FR-prostorů, jejichž kartézský součin není spočetně kompaktní*, a obsahuje výsledky jedné Novákovy práce uveřejněné ve Fundamenta mathematicae *40* (1953), str. 385—395.

Není pochyby o tom, že Novákův dodatek je po konstruktivní stránce kladným přínosem k Čechově knize a dobrou školou pro vědecké pracovníky v oboru obecné topologie.

Karel Koutský, Brno

Dodatek II. Tento dodatek zpracoval prof. Miroslav Katětov. Má název „*Plně normální prostory*" (str. 407—495).

Před válkou vedl prof. Čech v Brně topologický seminář. V tomto semináři se probíraly nejzákladnější pojmy množinové topologie (definice topologického prostoru a řada otázek s tím souvisících, např. vlastnosti množiny všech topologií na dané množině, existence topologií určitých vlastností apod.). Čechova kniha „Topologické prostory" je vlastně rozpracováním problematiky probírané v onom semináři. Tím je dán jak výběr látky, tak způsob zpracování. Thematika se váže k nejzákladnějším pojmům topologie a zpracování je pokud možno nejelementárnější a přitom důsledně přesné. Srozumitelnost, důsledná precisnost a velká promyšlenost je největší předností této knihy.

Brněnský topologický seminář skončil již před válkou a proto také Čechova kniha nezahrnuje rozsáhlou poválečnou problematiku. Důležitou část této problematiky tvoří otázky kolem uniformních prostorů a plně normálních prostorů. Tyto otázky velmi přehledným a hutným způsobem zpracoval v Dodatku II prof. Miroslav Katětov.

Tento dodatek je nazván „Plně normální prostory", takže řada čtenářů by se mohla mylně domnívat, že jde o teorii jakéhosi speciálního druhu topologických prostorů, určenou pouze pro matematiky zabývající se topologií. Ve skutečnosti prof. Katětov pojednává o nejdůležitějších pojmech jednoho odvětví množinové topologie, které se zformovalo až po válce. Jde o pojmy, které se stále a stále více vyskytují v nejrůznějších odvětvích analysy a které by tedy měly být známy nejširšímu okruhu čtenářů. Pokusím se nejprve naznačit obsah dodatku.

Dodatek je rozdělen na deset paragrafů. V prvních čtyřech jsou definovány pojmy lokálně konečného souboru, lokálně konečného pokrytí, pseudometriky a normálního pokrytí. Je odvozena celá řada velmi hlubokých vět, které jsou v dalších paragrafech aplikovány na teorii plně normálních prostorů (§ 5), dědičně plně normálních prostorů (§ 6), lokalisaci vlastností (§ 7), spočetně plně normálních prostorů (§ 8) a prodlužování otevřených pokrytí (§ 9). V posledním paragrafu jsou soustředěny protipříklady vztahující se k celému dodatku.

Ke každému paragrafu jsou připojena cvičení. Některá jsou lehká a jejich předmětem je dokázat jednoduchý důsledek vět vlastního textu. Většina cvičení je však věnována buď jinému důkazu vět z textu anebo důkazu vět blízkých probírané látce. Tato cvičení jsou často velmi obtížná. V cvičeních k § 3 a § 4 jsou soustavně probrány základy uniformních prostorů a δ-prostorů. Ve vlastním textu se nikde nepoužívá výsledků dosažených ve cvičeních.

V přípravném § 1 je definováno několik *základních pojmů*, které se potom používají v celém textu. Souborem prvků (množiny X) rozumíme zobrazení množiny A (nazývané množinou indexů) do X. Soubory se značí $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ (nebo jednoduše $\{x_\alpha\}$). Přitom x_α značí prvek z X přiřazený indexu α. Je-li nějaká vlastnost V definována pro jistou třídu souborů, pak řekneme, že množina X má vlastnost V, jestliže soubor $\{x; x \in X\}$ (tj. identické zobrazení X na X) má vlastnost V. Jestliže V je vlastnost definovaná pro jistou třídu množin, pak řekneme, že soubor $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ má vlastnost V, jestliže množina všech x_α má vlastnost V. Soubor množin $\{M_\alpha; \alpha \in A\}$ je bodově konečný, jestliže pro libovolný prvek x je $x \in M_\alpha$ jen pro konečný počet indexů α. Soubor $\{M_\alpha\}$ podmnožin topologického prostoru P se nazývá lokálně konečný, jestliže každé $x \in P$ má okolí U takové, že $U \cap M_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečný počet α. Lokálně konečný soubor $\{M_\alpha\}$ se nazývá diskretním, jestliže je soubor $\{\overline{M}_\alpha\}$ disjunktní, tj. $\overline{M}_{\alpha_1} \cap \overline{M}_{\alpha_2} = \emptyset$ pro $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Je-li V nějaká vlastnost definovaná pro jakousi třídu souborů, pak se říká, že soubor $\{x_\alpha; \alpha \in A\}$ má vlastnost σ - V, jestliže existuje posloupnost $\{A_n\}$ taková, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ a každý soubor $\{x_\alpha; \alpha \in A_n\}$ má vlastnost V. (Podle této definice např. víme, co znamená termín σ-bodově konečný soubor apod.)

V § 2 se pojednává o *otevřených lokálně konečných pokrytích*. Nejdůležitější jsou věty 2.1, 2.6, 2.7 a 2.9. Pomocná věta 2.1 tvrdí, že ke každému otevřenému bodově konečnému pokrytí $\{G_\alpha\}$ normálního prostoru existuje otevřené pokrytí $\{H_\alpha\}$ tak, že $\overline{H}_\alpha \subset G_\alpha$. Soubor množin $\{X_\alpha\}$ se nazývá zjemněním souboru množin $\{Y_\beta\}$, jestliže každá X_α je obsažena v nějaké Y_β. Soubor $\{X_\alpha\}$ je hvězdovitým zjemněním souboru $\{Y_\beta\}$, jestliže ke každému $x \in \bigcup X_\alpha$ existuje Y_β tak, že $x \in X_\alpha \Rightarrow X_\alpha \subset Y_\beta$. Ve větě 2.6 je dokázána jedna důležitá vlastnost lokálně konečných otevřených pokrytí: Ke každému otevřenému lokálně konečnému pokrytí $\{G_\alpha\}$ normálního prostoru P existuje σ-diskretní a lokálně konečné otevřené pokrytí $\{U_\mu\}$ prostoru P, které je hvězdovitým zjemněním pokrytí $\{G_\alpha\}$. Následující věta 2.7, která je v podstatě důsledkem věty 2.6, tvrdí, že ke každému lokálně konečnému otevřenému pokrytí existuje posloupnost $\{\mathfrak{H}_n\}$ σ-diskretních lokálně konečných otevřených pokrytí (vyhovující dalším požadavkům) tak, že $\mathfrak{H}_{n+1}$ je hvězdovitým zjemněním $\mathfrak{H}_n$ a $\mathfrak{H}_1$ je zjemněním daného pokrytí. Ve formulaci této věty je menší chyba. $\mathfrak{H}_1$ nemusí být σ-diskretní, jak se dá snadno ukázat. Věta 2.9 tvrdí, že ke každé posloupnosti $\{\mathfrak{H}_n\}$ otevřených pokrytí, v níž $\mathfrak{H}_{n+1}$ je hvězdovitým zjemněním $\mathfrak{H}_n$ (taková posloupnost se někdy nazývá normální), existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{U_\mu\}$ tak, že $\{U_\mu\}$ je zjemněním $\mathfrak{H}_1$ (a $\{U_\mu\}$ má další vlastnosti). Věty 2.6 a 2.9 jsou velmi hluboké a jejich důkaz je velmi obtížný (zdá se, že nejobtížnější z celého dodatku). Poslední věta tohoto paragrafu tvrdí, že každé otevřené pokrytí metrisovatelného prostoru má hvězdovité zjemnění. Podle věty 2.9 má tedy každé otevřené pokrytí metrisovatelného prostoru lokálně konečné otevřené zjemnění. Přímý důkaz této věty a řady dalších vět o metrizovatelných prostorech je předmětem většiny cvičení připojených k tomuto paragrafu.

Vedle těchto cvičení jsou připojena dvě cvičení o bodově konečných pokrytích vztahující se spíše k § 1. Všechna cvičení jsou poměrně obtížná jako celý § 2.

V § 3 pojednává autor o *pseudometrikách*. Pseudometrikou v množině P se rozumí reálná funkce ϱ definovaná na $P \times P$ a splňující podmínky $\varrho(x, x) = 0$, $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ a $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) + \varrho(y, z)$. Pseudometrika ϱ v topologickém prostoru P se nazývá spojitou, jestliže ϱ je spojitou funkcí na $P \times P$. Nejprve je ukázáno několik ekvivalentních definic spojitosti pseudometriky. Potom je odvozena důležitá souvislost mezi pseudometrikami, speciálními posloupnostmi množin v $P \times P$ obsahujících diagonálu, tj. množinu všech (x, x), kde $x \in P$, a mezi normálními posloupnostmi pokrytí. Tyto věty mají zásadní důležitost pro teorii uniformních prostorů. Uniformní prostory se ve vlastním textu dodatku nestudují. Je však dokázána řada pomocných vět a vlastní teorie uniformních prostorů se probírá ve cvičeních. Ve cvičeních § 3 se probírá definice uniformního prostoru podle A. Weila (tj. pomocí systému množin v $P \times P$ obsahujících diagonálu) a definice pomocí pseudometrik. Vedle toho se definuje podprostor a kartézský součin uniformních prostorů. Ve zbytku § 3 jsou definovány normálně oddělené množiny: Podmnožiny M_1 a M_2 prostoru P jsou normálně oddělené tehdy a jen tehdy, jestliže existuje reálná spojitá funkce f na P tak, že $\overline{f^1(M_1)} \cap \overline{f^1(M_2)} = \emptyset$. Prostor je normální tehdy a jen tehdy, jestliže každé dvě disjunktní uzavřené množiny jsou normálně oddělené.

V § 4 autor pojednává o *normálních pokrytích*. Otevřené pokrytí $\{G_\alpha\}$ se nazývá normálním, jestliže existuje spojité zobrazení f do nějakého metrizovatelného prostoru R a otevřené pokrytí $\{V_\beta\}$ prostoru R tak, že $\{f^{-1}(V_\beta)\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$. Už z této definice je patrná důležitost tohoto pojmu. Dále je podána celá řada nutných a postačujících podmínek k tomu, aby otevřené pokrytí bylo normální. Uvedeme jenom dvě: $\{G_\alpha\}$ je normální tehdy a jen tehdy, jestliže existuje normální posloupnost $\{\mathfrak{G}_n\}$ otevřených pokrytí tak, že $\mathfrak{G}_1 = \{G_\alpha\}$; to nastane právě když existuje lokálně konečné otevřené zjemnění $\{U_\mu\}$ pokrytí $\{G_\alpha\}$ a uzavřené množiny $F_\mu \subset U_\mu$ tak, že $\bigcup F_\mu = P$ a F_μ a $P - U_\mu$ jsou normálně oddělené pro každé μ. V normálním prostoru je otevřené pokrytí normální tehdy a jen tehdy, jestliže má lokálně konečné zjemnění. V úplně regulárních prostorech poslední věta neplatí a proto pojem normálního pokrytí má velký význam v teorii těchto prostorů. Obsahem cvičení připojených k tomuto § je jednak pokračování teorie uniformních prostorů (jejich definice pomocí uniformních soustav zakrytí) a jednak několik vět o pseudokompaktních prostorech. Vedle toho se ve cvičeních probírají δ-prostory. δ-prostor je množina P a δ-relace v P. Přitom δ-relace v P je binární relace v exp P splňující jakési požadavky, které axiomatizují vlastnosti relace blízkosti množin v metrickém prostoru, tj. relace $\varrho(X, Y) = 0$. δ-relace mají velkou důležitost v teorii kompaktních rozšíření úplně regulárních prostorů.

V § 5 se pojednává o *plně normálních prostorech*, podle nichž je nazván celý dodatek. F-prostor se nazývá plně normálním, jestliže každé jeho otevřené pokrytí je normální. V literatuře se vedle tohoto názvu používá názvu parakompaktní. Autor dokazuje celou řadu nutných a postačujících podmínek k tomu, aby prostor byl plně normální; dále uvádí několik postačujících podmínek a nakonec vyšetřuje dědičnost plné normality, jejímuž podrobnějšímu studiu je věnován další paragraf. Vedle toho jsou definovány tzv. $\mathfrak{m}$-metrizovatelné prostory, tj. prostory, které jsou homeomorfní s podmnožinou kartézského součinu $\mathfrak{m}$-metrizovatelných prostorů. V této souvislosti je podáno zobecnění významné věty, která praví, že regulární prostor je metrizovatelný tehdy a jen tehdy, jestliže má σ-lokálně konečnou basi. Velmi důležitá je také věta o rozšíření lokálně konečného souboru uzavřených množin na lokálně konečný soubor otevřených množin: Je-li $\{F_\alpha\}$ lokálně konečný soubor uzavřených podmnožin plně normálního prostoru, pak existuje lokálně konečný soubor otevřených množin $\{U_\alpha\}$ tak že $F_\alpha \subset U_\alpha$.

V § 6 autor pojednává o *dědičně plně normálních prostorech*, tj. prostorech, jejichž každý podprostor je plně normální. Až na jednu větu o kartézském součinu plně normálních prostorů obsahuje tento paragraf jen jednoduché důsledky vět § 5.

V § 7 je teorie plně normálních prostorů aplikována na otázky *lokalisace vlastností*. Budiž $\mathfrak{M}$ soustava částí prostoru P. Množina $X \subset P$ náleží v bodě $x \in P$ do $\mathfrak{M}$, jestliže existuje okolí U bodu x tak, že $U \cap X \in \mathfrak{M}$; platí-li to pro každé $x \in P$ ($x \in X$), pak řekneme, že X náleží lokálně do $\mathfrak{M}$ (resp. vnitřně lokálně do $\mathfrak{M}$). Soustava $\mathfrak{M}$ částí prostoru P se nazývá vnitřně lokálně určenou, jestliže platí: Náleží-li X (vnitřně) lokálně do $\mathfrak{M}$, pak $X \in \mathfrak{M}$. Dokazuje se např., že soustava všech G_δ-množin (dědičně) plně normálního prostoru je (vnitřně) lokálně určenou soustavou.

§ 8 je věnován *spočetně plně normálním prostorům*, tj. prostorům, jejichž každé nejvýše spočetné otevřené pokrytí je normální.

V § 9 autor pojednává jen velmi stručně o otázkách *prodlužování pokrytí*. Přitom se omezuje na nejvýše spočetná pokrytí. Podrobněji (obsahově) a bez omezení na spočetná pokrytí probírá M. Katětov tyto otázky v Coll. Math. VI, 1958, str. 146—151.

Poslední paragraf 10 obsahuje vedle diskuse všeobecně známého prostoru spočetných ordinálních čísel několik velmi obtížných *protipříkladů*, které se vztahují k celému předcházejícímu textu. Autorovi se podařilo vystihnout a přesně formulovat jádro konstrukcí mnoha protipříkladů vyskytujících se v literatuře. Čtenáře překvapí jak poměrně jednoduchým způsobem lze sestrojit prostory zajímavých vlastností.

Ve světové literatuře o moderní množinové topologii jsou nejznámějšími dvě knihy. Jednak J. Kelley „General Topology" a jednak „Topologie générale" N. Bourbakiho. J. Kelley ve své knize zpracovává z moderního hlediska hlavně ty otázky množinové topologie, které mají důležitost pro moderní analysu a to spíše pro funkcionální analysu než např. pro teorii funkcí. Podle jeho vlastních slov měla probíraná látka obsahovat asi to, co by měl znát mladý matematik zabývající se analysou. Recensent se domnívá, že se to Kelleymu podařilo jen částečně. Na výběr látky měly vliv i jiné okolnosti, např. autorovo odborné zaměření a snaha zbytečně nezdvojovat literaturu.

Podobně ani Čechova kniha není universální učebnicí topologie. Ve srovnání s Kelleyem je Čechova kniha věnovnána hlubšímu studiu některých, spíše klasických, nejzákladnějších pojmů topologie, např. významu jednotlivých axiomů v definici topologického prostoru, hlavně axiomu $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, rozboru pojmu spojitého zobrazení apod. Tím Čechova kniha vhodně doplňuje světovou literaturu o topologii. Z hlediska českého čtenáře bylo jistě účelným doplnit knihu informacemi o poválečné problematice. To se velmi dobře podařilo M. Katětovovi dodatkem II. Ve srovnání s podobnou problematikou probíranou v Kelleyově knize, která vyšla v r. 1955 a neobsahuje tedy výsledky posledních let, Katětovův dodatek se o tyto výsledky opírá a shrnuje je ve velmi přehledných a obsažných větách. Prodlužování pokrytí, lokalisace vlastností a spočetně plně normální prostory nebyly dosud moderně knižně zpracovány.

Dodatek II nahuštéností látky připomíná spíše časopiseckou literaturu. Přesnost a jadrnost výkladu však způsobuje, že text je přes velkou stručnost poměrně snadno srozumitelný. Autorovi se podařilo najít rovnováhu mezi snahou podat látku co nejkratším způsobem a snahou osvětlit látku z mnoha hledisek. To se projevuje jak v celkovém pojetí tak ve zpracování jednotlivých důkazů. V prvních paragrafech se autorovi podařilo soustředit látku do několika velmi obsažných vět, které jsou v literatuře roztříštěny v řadu dílčích výsledků. Tím autor zkrátil výklad na minimum. To mu také umožnilo probrat základy uniformních prostorů a δ-prostorů ve cvičeních. Věty jsou podávány v nejostřejším znění. Tato zostření jsou někdy vlastními autorovými výsledky; vedle toho je v dodatku i několik zcela originálních výsledků.

Bylo by užitečné, kdyby autor učinil tento dodatek základem k samostatné soustavné publikaci, o kterou by jistě byl v zahraničí velký zájem, zejména kdyby byla napsána v některém světovém jazyce.

Autor moderním způsobem zpracoval v dodatku II jinak pro českého čtenáře těžko dostupnou látku. Dodatek mohou s úspěchem číst i posluchači vyšších ročníků matematiky; čtenáři by jistě uvítali, kdyby autor podle vlastního uvážení zpracoval i jiná themata.

Zdeněk Frolík, Praha

H. Lugowski-H. J. Weinert: **Grundzüge der Algebra** I u. II. B. G. Teubner, Leipzig 1957 u. 1958. Stran 234 a 250.

Dosud vyšly dva díly chystané třídílné učebnice algebry jako 9. a 10. svazek matematicko-přírodovědecké knihovny Teubnerova nakladatelství v Lipsku s názvy „Obecná teorie grup" (1957) a „Obecná teorie okruhů a těles" (1958). Připravovaný třetí díl bude mít název „Teorie řešení algebraických rovnic". Jak je již z titulů těchto jednotlivých částí vidět, bude třetí díl jakýmsi vyvrcholením celé učebnice a bude v sobě organicky spojovat — v Galoisově teorii — převážnou část látky obou dílů předcházejících.

Učebnice obsahuje celkem běžnou látku normálního vysokoškolského kursu algebry pojatou, jak je dnes snad již samozřejmostí, moderně, noetherovsky. Zvláštností učebnice je, že je psána speciálně pro čtenáře, kteří nemají ani žádné hlubší matematické vědomosti a velkou zběhlost v četbě matematického textu, ani možnost navštěvovat soustavně přednášky z příslušné discipliny, tj. v první řadě pro posluchače dálkového studia. Autoři mají v tomto směru značné zkušenosti, neboť již od r. 1951 se podíleli na vypracování celé řady tzv. učebních dopisů (Lehrbriefe) z algebry v dálkovém studiu pro učitele III. stupně a tyto učební texty byly podkladem k vypracování učebnice.

Toto zaměření ovlivnilo především rozsah učebnice a ovšem i její pojetí. Rozsah celé knihy je skutečně abnormálně velký, zejména nápadný je rozsah I. dílu, v němž jsou vyloženy základy teorie grup se zvláštním zaměřením ke grupám permutací, při čemž výklad je veden tak, aby byla probrána všechna látka teorie grup potřebná ke Galoisově teorii. Vlastní text tohoto prvního dílu má téměř 200 stran; pro srovnání uvádím, že v podstatě táž látka je vyložena ve známé Waerdenově Algebře asi na třiceti stranách. Rozdělení látky co do rozsahu v I. dílu recensované učebnice lze stručně zachytit takto:

Kapitola I: základní pojmy teorie grup (axiomy grupy, příklady grup, multiplikační tabulka, isomorfní zobrazení grup, komplexy a podgrupy, cyklické grupy, zbytkové třídy podle podgrupy), kapitola má celkem 70 stran; kapitola II: grupy permutací a transformací (representace konečné grupy pomocí permutací, transitivita a primitivita grup permutací, grupy zákrytů geometrických obrazců, grupy geometrických transformací), celkem 45 stran; kapitola III: automorfismy grup, konjugované prvky a podgrupy, normální podgrupy, homomorfní zobrazení grupy, obrazy podgrup v homomorfním zobrazení, celkem 45 stran; kapitola IV: maximální normální podgrupy, jednoduché grupy, normální a komposiční řetězce podgrup, řešitelné grupy, celkem 25 stran.

Látku druhého dílu lze rozdělit do dvou částí. První z nich — kapitola V až VII — obsahuje definice a základní vlastnosti algebraických útvarů se dvěma operacemi, je jí věnováno celkem 120 stran a obsahuje (stručně charakterisováno) tuto látku: Pologrupy, okruhy, tělesa, podokruhy a ideály, isomorfní a homomorfní zobrazení okruhů a těles, podílová tělesa, okruhy polynomů, grupy s operátory, vektorové prostory nad okruhem a nad tělesem a hyperkomplexní systémy. Druhá část — kapitola VIII — je věnována teorii dělitelnosti. Podobně jsou vyšetřovány podmínky pro existenci a jednoznačnost rozkladu v součin ireducibilních prvků a vztahy mezi okruhy s konečnými řetězci vlastních dělitelů, eukleidovskými okruhy a okruhy s hlavními ideály a to i z hlediska teorie ideálů. Text této části má celkem 100 stran.

Tento velký rozsah učebnice je poněkud na závadu přehlednosti látky, čemuž se autoři pokoušejí čelit podrobným a důsledným rozčleněním textu i výraznou grafickou úpravou při označování vět, definic a příkladů. Ke dvěma paragrafům jsou přiloženy tabulky logických souvislostí jednotlivých výsledků.

V celé učebnici je vidět celkem úspěšnou snahu autorů o to, aby psaný text co nejvíce nahrazoval přednášku. Tato snaha se projevuje v tom, že každý důležitější nově zaváděný pojem je doprovázen řadou ilustrativních příkladů a často i uveden odstavcem hovořícím o významu a účelnosti zavedení tohoto pojmu, v přesné a podrobné formulaci vět, v detailním rozepsání důkazů a konečně i v tom, že text je doprovázen řadou úloh (v prvním díle 152, ve druhém 146) s podrobnými řešeními na konci knihy. Z tohoto hlediska je třeba si všimnout i toho, že první díl je vlastně úvodem ke studiu moderní algebry, v němž se má čtenář naučit způsobu abstrakce i metodám důkazů v této disciplině. Teorie grup byla k tomuto účelu zvolena zřejmě proto, že pojem grupy (tj. vlastně pojem asociativní binární algebraické operace, k níž existuje operace inversní) je základním pojmem v moderní algebře. Volba však byla jistě ovlivněna i tím, že kolektiv matematiků Vysoké školy pedagogické v Postupimi, k němuž oba autoři patří, je zaměřen převážně k teorii grup.

Závěrem je možno říci — i když zatím nelze posuzovat učebnici jako celek — že se autorům podařilo sepsat knihu, jež ulehčuje posluchačům dálkového studia matematiky úkol zvládnout bez soustavné návštěvy přednášek předepsanou látku z algebry. Přitom je třeba poznamenat, že v NDR je situace v dálkovém studiu učitelů škol III. stupně odlišná od situace u nás: Na toto studium jsou za odměnu delegováni kraji nejlepší učitelé škol II. stupně, absolventi pětileté přípravy učitelů škol II. stupně (již vykonávají paralelně tři university a tři vysoké školy pedagogické). Přitom pětileté dálkové studium matematiky a některých přírodovědných oborů (studium je jednopředmětové) je zahájeno jednoročním úvodním kursem u příslušné instituce, v němž se soustavně zopakuje látka, kterou mají posluchači znát před zahájením vlastního studia a v němž se posluchači uvedou do metod práce při samostatném studiu příslušného oboru. Tato opatření jednak zaručují posluchači všechny výhody, na něž má jako účastník dálkového studia právo (neboť příslušný kraj a škola mají samy zájem, aby jimi delegovaný posluchač studoval co nejlépe), jednak umožňují vysokou úroveň a kvalitu dálkového studia, jež pak může být zcela rovnocenné studiu internímu.

Jaroslav Blažek, Praha

Историко-математические исследования. XI. Naklad. fysicko-matematické literatury, Moskva 1958, 794 str., cena v celopl. vazbě 22,50 rublů.

Nový ročník tohoto sborníku svědčí zase o velké péči a vážnosti, které se věnují v Sovětském svazu dějinám matematiky. Aby čtenář poznal bohatství obsahu, uvedu zde stručný výčet článků.

První část zahrnuje práce přednesené na III. všesovětském sjezdu matematiků v Moskvě r. 1956. Jsou to práce: A. P. JUŠKEVIČ „O nových pracích v SSSR z dějin matematiky" (str. 11—46), B. V. GNEDENKO „O některých úkolech dějin matematiky" (str. 47—62), S. A. JANOVSKÁ „Z dějin axiomatiky" (str. 63—96), A. P. NORDEN „Otázky základů geometrie v pracích N. I. Lobačevského" (97—132), S. N. KIRO „Matematika na sjezdech ruských přírodovědců a lékařů" (133—158), E. KOLMAN „O některých neřešených otázkách antické matematiky" (159—170), A. E. RAIK „Nové rekonstrukce některých úloh ve starých egyptských a babylonských textech" (171—184).

Druhá část jedná o vysokoškolských přednáškách z dějin matematiky. Jsou tu tyto články: I. G. BAŠMAKOVÁ, K. A. RYBNIKOV, A. P. JUŠKEVIČ, S. A. JANOVSKÁ „Program přednášek o dějinách matematiky na státní universitě v Moskvě" (185 až 192), S. A. JANOVSKÁ „Úvodní přednáška ke kursu o dějinách matematiky" (193—209), K. A. RYBNIKOV „Předmět dějin matematiky" (209—224), I. G. BAŠMAKOVÁ „Přednášky o dějinách matematiky ve starém Řecku" (225—440).

Třetí část je věnována různým oborům. Jsou v ní tyto práce: B. V. GNEDENKO a I. B. POGREBYSSKIJ „O dějinách matematiky a jejich významu v jiných vědách" (441 až 460), Q. VETTER „Stručný přehled rozvoje matematiky v českých zemích do Bělohorské bitvy" (461—514), K. RYCHLÍK „Nauka o reálných číslech v rukopisné pozůstalosti Bolzanově" (515—532), ILIE POPA „Z dějin matematiky v Rumunsku" (533—562), A. N. GLIVIČ „Z dějin rumunské matematické společnosti, vztahy mezi matematiky Rumunska a SSSR" (563—583), K. A. RYBNIKOV „O algebraických kořenech diferenciálního počtu" (583—592), M. I. MEDOVOJ „O jednom případě použití záporných čísel" u Abu-l-Vafy" (593—600).

Čtvrtá část obsahuje texty a dokumenty. Jsou tu: V. P. ZUBOV „Traktát Nikola Oresmeho De configuratione qualitatum" (601—635), Zubovův ruský překlad tohoto traktátu (636—719), Zubovovy poznámky k tomuto traktátu (720—732), B. A. ROSENFELD „Důkazy pátého postulátu Eukleidova u středověkých matematiků Chasana Ibn al-Chaitama a Levi ben Gersona" (733—742), Rosenfeldův ruský překlad Chaitamovy knihy komentářů k úvodu spisu Eukleidova „Základy" (743—762), Rosenfeldův ruský překlad Leviho ben Gersona komentáře k úvodu spisu Eukleidova (763—776) a Rosenfeldovy poznámky k těmto oběma textům (777—782).

Dvacetistránkový seznam jmen usnadňuje orientaci. *Q. Vetter*, Praha

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

A. K. Vlasov: **Učebnice vyšší matematiky II.** 1. část. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1958, 312 stran, 100 obr., cena Kčs 32,—.

Kniha vychází v 2. upraveném vydání jako celostátní vysokoškolská učebnice. Obsahuje dva oddíly s názvy: Základy vyšší algebry, Diferenciální a integrální počet II.

*

O. Maška: **Řešené úlohy z matematiky. Aritmetika a algebra.** Odborně upravil *J. Sedláček.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1958, 216 stran, 11 obr., cena brož. výtisku Kčs 10,—.

Knížka vyšla jako 1. svazek II. řady polytechnické knižnice Čs. společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí. Obsahuje řešené úlohy ze středoškolské aritmetiky a algebry se stručným přehledem použitých vzorců a pouček. Je určena pro všechny, kteří se chtějí zdokonalit v počtářské technice.

*

A. Železný: **Sbírka matematických vzorců.** Vzorce ověřil *Rud. Výborný.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1959, 240 stran, 119 obrázků, 16 tabulek, cena Kčs 8,60.

Knížka obsahuje výběr vzorců elementární a vyšší matematiky a je určena jako příručka technikům, žákům odborných škol i širšímu okruhu čtenářů technické literatury.

*

A. K. Vlasov: **Učebnice vyšší matematiky II, 2. část.** Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1959, 208 stran, 32 obrázků, cena Kčs 24,50.

Tato další část II. dílu vychází v 2. upraveném vydání jako celostátní vysokoškolská učebnice. Obsahuje čtyři kapitoly s názvy: Základy teorie řad, Řady funkcí, Užití analysy v geometrii a Diferenciální rovnice.

*

V II. řadě Polytechnické knižnice Čs. společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí vyšly ve Státním nakladatelství technické literatury tyto knížky:

Svazek 3: *O. Maška,* **Řešené úlohy z matematiky.** Stereometrie, trigononetrie, analytická geometrie. Odborně upravil *Miloslav Zelenka.* Praha 1959, 256 stran, 91 obrázků, cena brož. výtisku Kčs 10,—.

Tato knížka obsahuje řešené početní úlohy ze stereometrie o tělesech a vedle úloh z rovinné trigonometrie i úlohy ze sférické trigonometrie a analytické geometrie přímky a kuželoseček. Je určena pro ty zájemce, kteří se chtějí zdokonalit ve výpočtech z matematických oborů v knížce zastoupených.

*

Svazek 4: *Č. Kohlmann,* **Geometrie.** Praha 1959, 256 stran, 125 obrázků, cena Kčs 10,—.
Tato knížka obsahuje přehled planimetrie, stereometrie a rovinné trigonometrie (s goniometrií) v rozsahu učiva jedenáctiletky a je určena jednak studentům k opakování, jednak širšímu okruhu čtenářů, kteří se potřebují zdokonalit ve školské geometrii.

*

Svazek 5: *O. Maška,* **Řešené úlohy z matematiky.** Planimetrie. Odborně upravil *Stanislav Horák.* Praha 1959, 236 stran, 196 obrázků, cena brož. výtisku Kčs 10,—.

Tato knížka obsahuje skoro 300 řešených konstruktivních a početních úloh z planimetrie. Je určena těm zájemcům, kteří se chtějí zdokonalit v různých postupech užívaných při řešení zejména konstruktivních úloh o rovinných obrazcích.

*

Svazek 9: *A. Vacek,* **Početní tabulky pro techniky.** 7. rozšířené vydání. Praha 1959, 208 stran, cena brož. výtisku Kčs 10,—.

Knížka obsahuje 12 početních tabulek a to: tabulky mocnin, odmocnin, logaritmů, goniometrických funkcí i jejich logaritmů, arků a tabulky některých konstant. Jsou určeny pro použití v technické praxi popř. na středních a odborných školách. Jednotlivé tabulky jsou uvedeny krátkým návodem k jejich použití.

Redakce