Věra Trnková

Několik příkladů topologických prostorů nesplňujících axiom F

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 4, 461–466

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117322

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

NĚKOLIK PŘÍKLADŮ TOPOLOGICKÝCH PROSTORŮ NESPLŇUJÍCÍCH AXIOM F

VĚRA ŠEDIVÁ, Praha

(Došlo dne 27. ledna 1959) DT: 513.83

V tomto článku podávám čtyři příklady topologických prostorů, které jsou v jistém smyslu zostřením a v případě I opravou protipříkladů z [1].

Kniha [1] se soustavně zabývá studiem topologických prostorů, které nemusí splňovat následující axiom: Uzávěr bodové množiny je uzavřená množina. Tento axiom je v [1] nazýván F a prostor, který jej splňuje, F-prostor.

Nyní několik definic, které všechny jsou obsaženy v [1]:

Je-li (P, v) topologický prostor (obecně nesplňující axiom F), $A \subset P$, značí vA uzávěr množiny A v prostoru (P, v). Je-li jasné, o jakou topologii se jedná, píšeme též $\overline{A}$ místo vA. Pro $M \subset P - \overline{A}$ je $P - A$ okolí M.

Je-li $\overline{A} = P$, nazývá se množina A hustá v P, je-li $\overline{P - \overline{A}} = P$, nazývá se A řídká v P.

Množina A se nazývá 1. kategorie v P, je-li sjednocením spočetně mnoha množin řídkých v P.

Je-li $x \in P$, nazývá se x slabý F-bod prostoru P, jestliže vnitřek každého okolí bodu x je zase okolím bodu x.

$x \in P$ se nazývá silný F-bod, jestliže všechna otevřená okolí bodu x tvoří jeho úplnou soustavu okolí.

Množiny $A, B \subset P$ se nazývají H-oddělené, mají-li disjunktní okolí.

Bod $x \in P$ se nazývá R-bod prostoru P, jestliže ke každému okolí U bodu x existuje takové okolí V bodu x, že $\overline{V} \subset U$.

I. V [1] na str. 106 je dokázána následující věta (5.3.6):

Budiž a silný F-bod. Nechť pro každou uzavřenou množinu F, která neobsahuje bod a, množiny (a), F jsou H-oddělené. Pak a je R-bod.

Na str. 140 je uveden příklad (6.4.16), který má ukázat, že věta neplatí, nahradíme-li v ní předpoklad silného F-bodu předpokladem, že a je slabý F-bod. Snadno se nahlédne, že uvedený příklad je chybný.

Uvádím zde jiný příklad:

Buď M množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, N množina přirozených čísel. Prostor P se skládá z $M \times N$ a jednoho dalšího bodu ω. Buď A diskretní prostor mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Buďtež $A_1 \subset \beta A - A$, $A_2 \subset \beta A - A$ takové, že $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, moh A_1 = moh $A_2 = 2^{\aleph_0}$ a každá nekonečná podmnožina množiny A má nekonečně mnoho hromadných bodů v A_1 i v A_2. v^* značí topologii prostoru βA.

Buď $P^* = A \cup A_1 \cup A_2$; na P^* definuji topologii v takto: Budiž $X \subset P^*$; pro $x \in A$ je $x \in vX$, právě když je $x \in X$, pro $x \in A_1 \cup A_2$ je $x \in vX$, právě když $x \in X$ nebo $x \in v^*(X \cap A)$.

Pro každé přirozené $n > 2$ označím $M_n = [M \times (1)] \cup [M \times (n-1)] \cup \cup [M \times (n)]$. Buď φ_n prosté zobrazení P^* do M_n takové, že

$$\varphi_n(A) = M \times (n-1)\,, \quad \varphi_n(A_1) = M \times (n)\,, \quad \varphi_n(A_2) \subset M \times (1)\,,$$

při čemž

$$\varphi_{n_1}(A_2) \cap \varphi_{n_2}(A_2) = \emptyset \quad \text{pro} \quad n_1 \neq n_2 \quad \text{a} \quad \bigcup_{n=3}^{\infty} \varphi_n(A_2) = M \times (1)\,.$$

Buď ještě φ_2 prosté zobrazení $A \cup A_1$ na $[M \times (1)] \cup [M \times (2)]$ takové, že $\varphi_2(A) = M \times (1)$, $\varphi_2(A_1) = M \times (2)$.

Na P definuji topologii takto: Je-li $X \subset P$, pak $\omega \in \overline{X}$ právě když $\omega \in X$ nebo $[M \times (n)] \cap X \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho n. Pro $n > 1$, $m \in M$ je $[m, n] \in \overline{X}$, právě když $\varphi_n^{-1}([m, n]) \in v\varphi_n^{-1}(X)$; $[m, 1] \in \overline{X}$, právě když pro nějaké $n \in N$ je $\varphi_n^{-1}([m, 1]) \in v\varphi_n^{-1}(X)$.

V této topologii je zřejmě bod ω slabým F-bodem. Dále jsou zřejmě každé dvě jednobodové množiny H-oddělené. Uzavřené množiny v P, které neobsahují ω, jsou pouze konečněbodové a $\emptyset$, takže každá uzavřená množina F, která neobsahuje ω, je s (ω) H-oddělená. ω však není R-bod, neboť uzávěr každého okolí bodu ω protne množinu $M \times (1)$.

II. V příkladě 6.4.8 v [1] je popsán prostor P takový, že existují podmnožiny $S \subset P$, $D \subset P$ tak, že S je 1. kategorie v $S \cup D$, ale S není 1. kategorie v P.

Uvádím prostor P s touto vlastností: Existuje $S \subset P$ tak, že S je v sobě 1. kategorie, ale S není 1. kategorie v P:

Buď M nespočetný diskrétní prostor, $N = \beta M - M$, v_1 topologie prostoru βM. Buď R množina racionálních čísel, v_2 topologie na R daná uspořádáním. Buď $P = (M \times R) \cup N$. Na P definuji topologii takto: Buď $X \subset P$. Pro $m \in M$, $r \in R$ je $[m, r] \in \overline{X}$, právě když $r \in v_2(\{y \in R \mid [m, y] \in X\})$. Pro $x \in N$ je $x \in \overline{X}$, právě když $x \in v_1(\{m \in M \mid [m, 0] \in X\})$. Zřejmě $S = M \times R$ je v sobě 1. kategorie, ale není v P 1. kategorie.

III. Příklad 6. 4. 9 v [1] popisuje topologický prostor P následujících vlastností: existuje $S \subset P$ tak, že každý bod $x \in S$ má okolí U takové, že $U \cap S$ je řídká v P a přitom S není 1. kategorie v P.

Sestrojíme topologický prostor P následujících vlastností: Každý bod $x \in P$ má takové okolí U, že U je 1. kategorie v sobě i v P, ale P není v sobě 1. kategorie:

Pomocné tvrzení. *Buď A diskrétní prostor mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Existuje prosté zobrazení ψ systému $\mathfrak{S}$ všech spočetních podmnožin S prostoru A do $\beta A - A$ tak, že pro každou S je $\psi(S)$ hromadným bodem množiny S v βA.*

Důkaz plyne pomocí transfinitní indukce snadno z toho, že mohutnost β-obalu spočetného diskrétního prostoru je $2^{2^{\aleph_0}}$.

Označím $\psi(\mathfrak{S}) = A^*$; v^* značí topologii prostoru βA. Na $P_1 = A \cup A^*$ definuji topologii v takto: Je-li $X \subset P_1$, pak pro $x \in A$ je $x \in vX$, právě když $x \in X$, pro $x \in A^*$ je $x \in vX$, právě když $x \in X$ nebo $x \in v^*(X \cap \psi^{-1}(x))$.

Buď nyní M množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, N množina přirozených čísel, $P = M \times N$. Pro každé $n \in N$ buď φ_n prosté zobrazení $(M \times (n)) \cup (M \times (n + 1))$ na $A \cup A^*$ tak, že $\varphi_n(M \times (n)) = A^*$, $\varphi_n(M \times (n + 1)) = A$. Na P definuji topologii takto: Je-li $X \subset P$, je $x = [m, n] \in \overline{X}$, právě když $\varphi_n(x) \in v(\varphi_n(X))$.

Je-li $x \in P$, $x = [m, n]$, pak množina

$$U = (x) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \varphi_{n+k}^{-1}\psi^{-1}\varphi_{n+k} \ldots \varphi_n^{-1}\psi^{-1}\varphi_n(x)$$

je okolí x v P, je spočetná a nemá isolovaných bodů. Tedy je 1. kategorie v sobě i v P.

Kdyby $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, pak pro jisté n_1 a jisté $n_2 > 1$ přirozená, by C_{n_1} obsahovala nekonečně mnoho bodů z $M \times (n_2)$. Tedy $\overline{C_{n_1}}$ by vyplnila celé jisté okolí nějakého bodu z $M \times (n_2 - 1)$, tedy C_{n_1} by nebyla řídká v P. Tudíž P není v sobě 1. kategorie.

IV. V [1] na str. 416—417 jsou dokázány věty:

1,18: Sjednocení lokálně konečného souboru řídkých množin v F-prostoru je řídká množina.

1,19: Sjednocení σ-lokálně konečného souboru množin 1. kategorie v F-prostoru P je 1. kategorie v P.

Že v 1,18 nelze předpoklad F-prostoru vynechat, je ukázáno v [1] v příkladě 6.4.1. V následujícím příkladě ukazuji, že ho nelze vynechat ani v 1,19.

Příklad prostoru, který je sjednocením lokálně konečného systému řídkých množin a není přitom v sobě 1. kategorie:

Pomocné tvrzení 1: *Buďtež $\{C_\alpha | \alpha \in \mathscr{A}\}$, $\{D_\beta | \beta \in \mathscr{B}\}$ disjunktní systémy disjunktních množin. Nechť* moh $\mathscr{A}$ = moh $\mathscr{B} = \gamma$ *je nekonečná a pro každé $\alpha \in \mathscr{A}$, $\beta \in \mathscr{B}$ je též* moh C_α = moh $D_\beta = \gamma$. *Pak existuje prosté zobrazení φ mno-*

žiny $C = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} C_\alpha$ *na množinu* $D = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} D_\beta$ *tak, že pro každé* $\alpha \in \mathscr{A}$, $\beta \in \mathscr{B}$ *je množina* $[\varphi(C_\alpha)] \cap D_\beta$ *jednobodová.*

Důkaz. Buď M množina mohutnosti γ, ψ prosté zobrazení $\mathscr{A}$ na M, ψ^* prosté zobrazení M na $\mathscr{B}$. Pro každé $\alpha \in \mathscr{A}$ buď ψ_α prosté zobrazení C_α na M, pro každé $\beta \in \mathscr{B}$ buď ψ_β prosté zobrazení M na D_β. Pro $x \in C$ definuji: $\varphi(x) = y \in D$ tak, že $\beta = \psi^*\psi_\alpha(x)$, $y = \psi_\beta\psi(\alpha)$, kde $x \in C_\alpha$. φ má žádané vlastnosti.

Buďtež M_1, M_2 dva exempláře diskrétního prostoru mohutnosti $2^{\aleph_0}$. Buď $\mathfrak{S}_i$ systém všech spočetných podmnožin S_i prostoru M_i $(i = 1, 2)$.

Snadno se dokáže, že existuje prosté zobrazení ψ_i, které každé množině $S_i \in \mathfrak{S}_i$ přiřadí množinu $\psi_i(S_i) \subset \beta M_i - M_i$ tak, že moh $\psi_i(S_i) = 2^{\aleph_0}$, každý bod $\psi_i(S_i)$ je v βM_i hromadným bodem množiny S_i a pro S_i, $S_i^* \in \mathfrak{S}_i$, $S_i \neq S_i^*$ jsou $[\psi_i(S_i)] \cap [\psi_i(S_i^*)] = \emptyset$ $(i = 1, 2)$.

Uvažuji systémy množin $\{\psi_1(S_1) | S_1 \in \mathfrak{S}_1\}$, $\{\psi_2(S_2) | S_2 \in \mathfrak{S}_2\}$. Buď φ prosté zobrazení množiny $\bigcup_{S_1 \in \mathfrak{S}_1} \psi_1(S_1) = M_3$ na množinu $\bigcup_{S_2 \in \mathfrak{S}_2} \psi_2(S_2)$ s vlastnostmi, uvedenými v tvrzení 1.

Buď $P^* = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Na P^* definuji topologii v takto (v_i značí topologii prostoru βM_i, $i = 1, 2$): Je-li $X \subset P^*$, $x \in M_1 \cup M_2$, je $x \in vX$, právě když $x \in X$. Je-li $X \subset P^*$, $x \in M_3$, je $x \in vX$, právě když $x \in X$, nebo $x \in v_1(X \cap S_1)$, kde $S_1 \in \mathfrak{S}_1$, $x \in \psi_1(S_1)$, nebo $\varphi(x) \in v_2(X \cap S_2)$, kde $S_2 \in \mathfrak{S}_2$, $\varphi(x) \in \psi_2(S_2)$.

Z definice topologie v na P^* plyne:

Jsou-li $K_1 \subset M_1$, $K_2 \subset M_2$ nekonečné, existuje bod $x \in M_3$ tak, že $x \in v(K_1 \cup K_2)$ a $K_1 \cup K_2 \cup (x)$ je okolím bodu x v P^*.

Je-li M množina, značí $\frac{M \times M}{2}$ množinu všech dvojic (neuspořádaných) různých prvků množiny M.

Pomocné tvrzení 2: Buď M nekonečná množina. Pak existuje množina $A \subset \frac{M \times M}{2}$ a prosté zobrazení χ množiny A na M tak, že platí:

1. *Ke každému* $m_1 \in M$ *existuje* $m_2 \in M$ *tak, že* $(m_1, m_2) \in A$.

2. *Je-li* C_{m_1} *množina všech* $m_2 \in M$ *taková, že* $(m_1, m_2) \in A$, *a* D_{m_1} *množina všech* $\chi(m_1, m_2) (m_2 \in C_{m_1})$, *je* $C_{m_1} \cap D_{m_1} = \emptyset$.

3. *Je-li* $H \subset M$ *nekonečná, existují* $h_1, h_2 \in H$ *tak, že* $(h_1, h_2) \in A$.

Důkaz. Buď $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ tak, že A_i jsou po dvou disjunktní a moh $A_i =$ moh M $(i = 1, 2, 3)$. Položíme $A = \frac{A_1 \times A_1}{2} \cup \frac{A_2 \times A_2}{2} \cup \frac{A_3 \times A_3}{2}$.

Ze stejných mohutností plyne, že $\frac{A_1 \times A_1}{2}$ je možno prostě zobrazit na A_2, $\frac{A_2 \times A_2}{2}$ na A_3 a $\frac{A_3 \times A_3}{2}$ na A_1.

Toto zobrazení A na M má hledané vlastnosti.

Buď M množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, pro každé $m \in M$ buď P_m množina mohutnosti $2^{\aleph_0}$, $P_{m_1} \cap P_{m_2} = \emptyset$ pro $m_1, m_2 \in M$, $m_1 \neq m_2$. Buď $P = \bigcup_{m \in M} P_m$. Na M aplikuji tvrzení 2. $A \subset \frac{M \times M}{2}$ a χ mají tentýž význam jako ve tvrzení 2.

Pro každé $\alpha = (m_1, m_2) \in A$ buď μ_α prosté zobrazení množiny $P_{m_1} \cup P_{m_2} \cup P_{\chi(\alpha)}$ na prostor P^* tak, že $\mu_\alpha(P_{m_1}) = M_1$, $\mu_\alpha(P_{m_2}) = M_2$, $\mu_\alpha(P_{\chi(\alpha)}) = M_3$. Na P definuji topologii takto:

Je-li $X \subset P$, $x \in P_m$, je $x \in \overline{X}$, právě když

$$\mu_{\chi^{-1}(m)}(x) \in v[\mu_{\chi^{-1}(m)}(X)] .$$

Z definice topologie na P plyne: Je-li $x \in P_m$, $\chi^{-1}(m) = \alpha = (m_1, m_2)$, má bod x okolí $U \subset P_m \cup P_{m_1} \cup P_{m_2}$. Systém $\{P_m | m \in M\}$ je tedy lokálně konečný. Pro každé $m_1 \in M$ je $\overline{P}_{m_1} = P_{m_1} \cup \bigcup_{m \in D_{m_1}} P_m$ (D_{m_1} ve významu z tvrzení 2.), $\overline{P}_{m_1}$ nevyplní tedy okolí žádného bodu z P, P_{m_1} je řídká v P.

Předpokládejme, že $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Existuje přirozené číslo n_0 a nekonečná množina $H \subset M$ tak, že pro každé $h \in H$ je $C_{n_0} \cap P_h$ nekonečná. Podle tvrzení 2 existují $h_1, h_2 \in H$ tak, že $(h_1, h_2) \in A$. $\overline{C}_{n_0}$ tedy vyplní celé okolí jistého bodu $x \in P_{\chi(h_1, h_2)}$. C_{n_0} tedy není řídká v P. Odtud plyne, že P není v sobě 1. kategorie.

LITERATURA

[1] *Eduard Čech*: Topologické prostory s dodatky *J. Nováka* a *M. Katětova*. Nakladatelství ČSAV, Praha, 1959.

Резюме

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, В КОТОРЫХ НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ АКСИОМА F

ВЕРА ШЕДИВА (Věra Šedivá), Прага

(Поступило в редакцию 27/I 1959 г.)

Статья содержит конструкции топологических пространств, в которых не выполняется следующая аксиома F: Замыкание множества является замкнутым множеством. В статье показано, что такие пространства обладают разными необычными свойствами. Даются следующие примеры:

Топологическое пространство P и множество $A \subset P$ такое, что A является множеством первой категории в себе, но не первой категории в P (пример II).

Топологическое пространство P, каждая точка x которого имеет окрестность первой категории в себе и в P, но все пространство P не является в себе множеством первой категории (пример III).

Топологическое пространство, которое является объединением локально конечной системы нигде не плотных множеств, но не является множеством первой категории в себе. Все конструкции используют чеховское компактное расширение дискретного пространства.

Summary

SOME EXAMPLES OF TOPOLOGICAL SPACES, IN WHICH THE AXIOM F DOES NOT HOLD

VĚRA ŠEDIVÁ, Praha

(Received January 27, 1959)

The present note contains some constructions of topological spaces, in which the following axiom F does not hold: The closure of every set is closed. It is shown, that these spaces have some unusual properties. Following examples are given:

A topological space P and a set $A \subset P$ such that A is meager in itself but not meager in P.

A topological space P such that (i) P is not meager in itself, (ii) every $x \in P$ has a neighbourhood which is meager in itself as well as in P.

Topological space P, such that (i) P is the union of a locally finite system of nowhere dense (in P) sets, (ii) P is not meager in itself.

In all construction the β-compactification of a discrete space is used.