Časopis pro pěstování matematiky

Čestmír Vitner
Výjimečné body na křivkách v Riemannových prostorech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 4, 433--453

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117320`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

VÝJIMEČNÉ BODY NA KŘIVKÁCH V RIEMANNOVÝCH PROSTORECH

ČESTMÍR VITNER, Praha

DT: 513.813

(Došlo dne 15. října 1958)

Práce se zabývá vyšetřováním těch bodů analytických křivek v Riemannových prostorech, ve kterých absolutní derivace $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{D}^2\mathbf{M}}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{D}^n\mathbf{M}}{\mathrm{d}t^n}$ jsou lineárně závislé. V těchto bodech jsou definovány limitním přechodem normály $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ a křivosti $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Pro tyto normály a křivosti jsou nalezeny explicitní vzorce analogické vzorcům, které v případě nevýjimečných bodů nalezl W. Blaschke. Dále je v práci zkoumáno, jak se mění orientace normál při průchodu výjimečným bodem a jak se mění křivosti a orientace normál ve výjimečném bodě při změně orientace křivky. V případě konečných křivostí jsou odvozeny zobecněné Frenetovy formule. Konečně obsahuje práce ještě rozvoj křivky podle lomených mocnin oblouku $s^{\frac{1}{\alpha_1}}$ a jednu novou geometrickou interpretaci křivostí.

1. Úvod

Cílem této úvodní části je formulovat thema této práce a zavést základní pojmy, které budeme v dalším potřebovat.

Budeme se zabývat jednoduchými analytickými křivkami v Riemannově prostoru V_n. *Riemannův prostor* je jak známo n-rozměrná varieta, na které je dána metrika pomocí kvadratické diferenciální formy

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j\,. \tag{1,1}$$

Omezíme se v dalším na *positivně definitní* metriku. O funkcích $g_{ij}(x)$ budeme předpokládat, že jsou *analytické*.

Kvadratický kovariantní symetrický tensor g_{ij} nám umožňuje definovat skalární součin, úhel a délku vektorů v tečném prostoru v pevném bodě Riemannova prostoru. *Skalární součin* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dvou vektorů $\mathbf{a}(a^1, a^2, \ldots, a^n)$, $\mathbf{b}(b^1, b^2, \ldots, b^n)$ v pevném bodě (x) je dán vzorcem

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, a^i b^j\,. \tag{1,2}$$

Délka $|\boldsymbol{a}|$ vektoru a úhel ω vektorů jsou pak definovány vzorci

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\,, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \omega\,. \tag{1,3}$$

Jednoduchá křivka je homeomorfním obrazem otevřeného intervalu. Je dána v souřadném systému $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ parametrickými rovnicemi

$$x^i = x^i(t)\,, \quad t \in (a, b)\,. \tag{1,4}$$

V dalším budeme předpokládat, že křivka je *analytická*, tzn., že připouští analytickou parametrisaci (1,4).

Metrika (1,1) nám umožňuje, jak známo, definovat délku křivky pomocí vzorce

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{1,5}$$

(Vynechali jsme, jak je v tensorovém počtu obvyklé, summační znamení.)

Bod křivky odpovídající parametru t budeme označovat $\boldsymbol{M}(t)$. Vektor, který dostaneme derivací podle parametru t, označíme analogicky $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}$ nebo $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$. Vzorce (1,5) lze pak přepsati

$$s = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}}|\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{1,6}$$

Pomocí vztahu (1,5) lze na křivce zavést oblouk s jako parametr. Rovnice (1,6) totiž připouští inversní řešení $t = t(s)$, takže máme pro křivku parametrické vyjádření

$$x^i = x^i(t(s))\,. \tag{1,7}$$

Bod křivky budeme pak stručně označovat $\boldsymbol{M}(s)$. Parametrisace pomocí oblouku nemusí být v případě $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{0}$ v bodě t_0 analytická. Bod, ve kterém při nějaké diferencovatelné parametrisaci $\boldsymbol{M}(t)$ platí $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{\cdot}} \neq \boldsymbol{0}$, se nazývá *regulární*. Ostatní body se nazývají *singulární*. Z analytičnosti vyjádření (1,4) plyne, že v dostatečně malém okolí singulárního bodu jsou všechny body s výjimkou jeho samého regulární.

Máme-li podél křivky dáno vektorové pole $\boldsymbol{a}(t)$, pak můžeme zřejmě mluvit o *limitě* a *spojitosti* tohoto pole v bodě $\boldsymbol{M}(t_0)$. To můžeme dělat na libovolné diferencovatelné varietě, neboť souhrn vektorů ve všech bodech n-dimensionální diferencovatelné variety X_n tvoří diferencovatelnou varietu T_{2n} dimense $2n$. Jsou-li lokální souřadnice bodu $\boldsymbol{M}$ variety X_n $x^1, x^2, \ldots, x^n$ a souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ v přirozené lokální basi tečného prostoru v bodě $\boldsymbol{M}$ $a^1, a^2, \ldots, a^n$, jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}$ na zmíněné varietě T_{2n} $x^1, x^2, \ldots, x^n; a^1, a^2, \ldots, a^n$.

Podél křivky $\boldsymbol{M}(t)$ mějme dáno vektorové pole $\boldsymbol{a}(t)$. Obyčejná derivace $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}^i}{\mathrm{d}t}\right)$ tohoto vektoru podle t není vektorem. Za tím účelem se zavádí tak zvaná *absolutní* derivace $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$, která má obvyklé vlastnosti derivace a přitom $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ je opět vektorem. Tato derivace je dána pomocí vzorců

$$\frac{\mathrm{D}a^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} a^k , \tag{1,8}$$

ve kterých Γ^i_{jk} jsou známé Christoffelovy symboly

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right) \tag{1,9}$$

($g^{i\alpha}$ jsou kontravariantní složky metrického tensoru g_{ij}).

Pomocí Christoffelových symbolů lze definovat pojem *paralelismu* podél křivky: Vektorové pole se nazývá *paralelní* podél křivky $\boldsymbol{M}(t)$, jestliže platí

$$\frac{D\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} . \tag{1.10}$$

Nelze tedy obecně hovořit o tom, že dva vektory ve dvou různých bodech V_n jsou paralelní, ale že vektor se posunuje paralelně podél jisté křivky, anebo také, že dva vektory v různých bodech jsou paralelní vzhledem ke křivce. Vzhledem k této křivce pak můžeme zavést *úhel vektorů* $\boldsymbol{a}(t_0)$, $\boldsymbol{b}(t)$ *ve dvou různých* (dostatečně blízkých) *bodech křivky*. Bude to úhel vektoru $\boldsymbol{a}(t_0)$ s vektorem $\boldsymbol{b}(t_0)$, který dostaneme z vektoru $\boldsymbol{b}(t)$ paralelním posunem podél křivky.

Je známa *Fermiho věta*, že v prostoru V_n lze zavést souřadnou soustavu tak, že $\Gamma^i_{jk} = 0$ podél dané křivky. V této souřadné soustavě, tzv. *Fermiho souřadné soustavě*, pak absolutní derivace splývá podle (1,8) s derivací obvyklou. Vektor paralelně posunovaný podél té křivky má potom ve zmíněné soustavě konstantní souřadnice.

Na jednoduché křivce můžeme definovat dvojím způsobem *orientaci*. Budeme-li mít na mysli orientovanou křivku, budeme brát orientaci pomocí rostoucího parametru t (anebo pomocí oblouku definovaného vzorcem (1,5), což je totéž).

Na orientované křivce můžeme definovat jednotkovou *orientovanou tečnu* $\boldsymbol{t}$, která v případě $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} \neq \boldsymbol{0}$ je dána vzorcem

$$\boldsymbol{t} = \frac{\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}\right|} . \tag{1,11}$$

Předpokládáme-li, že vektory

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s^2}, \ldots, \frac{\mathrm{D}^n\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s^n} \tag{1,12}$$

jsou lineárně nezávislé, můžeme známým ortogonalisačním procesem E. Schmidta definovat vedle tečny $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}$ ještě $n - 1$ jednotkových *normál* $\mathbf{e}_k$, pro něž jsou známy následující explicitní vzorce [1], [2]:

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{\boldsymbol{U}_k}{\sqrt{D_{k-1}D_k}}, \tag{1,13}$$

kde

$$\boldsymbol{U}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}^{(k-1)}) & \boldsymbol{M}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}^{(k-1)}) & \boldsymbol{M}^{(k)} \end{vmatrix}, \tag{1,14}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}^{(k)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}') & \dots & (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}^{(k)}) \end{vmatrix}, \tag{1,15}$$

kde čárky znamenají absolutní derivace podle oblouku. D_k je známý Gramův determinant, který je > 0. Tyto vzorce platí i v případě $k = 1$, položíme-li $\mathbf{e}_0 = \mathbf{t}$, $D_0 = 1$.

Vektorový prostor vytvořený normálami $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ se nazývá $(k + 1)$-*-rozměrný oskulační prostor* v bodě křivky.

Pro absolutní derivaci normál podle oblouku platí základní *Frenetovy vzorce* [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0' &= \varkappa_1 \mathbf{e}_1 , \\ \mathbf{e}_1' &= -\varkappa_1 \mathbf{e}_0 + \varkappa_2 \mathbf{e}_2 , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_{k-1}' &= -\varkappa_{k-1} \mathbf{e}_{k-2} + \varkappa_k \mathbf{e}_k , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_{n-1}' &= -\varkappa_{n-1} \mathbf{e}_{n-2} . \end{aligned} \tag{1,16}$$

Skaláry $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{n-1}$ se nazývají *první* až $(p - 1)$-*tá křivost*. Platí pro ně explicitní vzorce [1]

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{D_{k-1}D_{k+1}}}{D_k}, \tag{1,17}$$

kde D_k jsou dány vzorci (1,15).

V případě, že derivace

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^2}, \dots, \frac{\mathrm{D}^n\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^n} \tag{1,18}$$

jsou lineárně nezávislé, budeme bod $\boldsymbol{M}$ nazývat *obecným* bodem křivky (přesněji obecným bodem parametrisace $\boldsymbol{M}(t)$). V tomto bodě pak existují derivace podle oblouku (1,12) a lze definovat křivosti, normály, oskulační prostory a platí Frenetovy vzorce. V této práci se budu zabývat *výjimečnými* body křivky, které při pevně zvolené analytické parametrisaci nejsou obecné. Přitom budu předpokládat, že ostatní body křivky v dostatečně malém okolí jsou obecné. Mezi výjimečné body zřejmě patří body singulární, inflexní atp.

Cílem této práce bude definovat křivosti, normály a oskulační prostory ve výjimečných bodech a odvodit pro ně vzorce analogické vzorcům (1,13) až (1,17). Z těchto vzorců budou pak odvozeny některé jednoduché důsledky. Vedle toho bude ukázán jeden jednoduchý geometrický význam křivostí.

2. Křivosti a normály

Mějme analytickou orientovanou jednoduchou křivku, která je dána analytickou parametrisací $\mathbf{M}(t)$. Budeme předpokládat, že všechny body jsou obecné nejvýše snad s výjimkou bodu $\mathbf{M}(0)$. V tomto bodě budeme definovat normály a křivosti limitním přechodem.

$$\mathbf{e}_k(0) = \lim_{t\to 0+} \mathbf{e}_k(t)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)\,; \tag{2,1}$$

$$\varkappa_k(0) = \lim_{t\to 0+} \varkappa(t)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{2,2}$$

(Připouštíme nekonečně velké křivosti.) Pomocí normál pak již obvyklým způsobem definujeme oskulační prostory.

W. Blaschke odvodil ve své práci [1] vzorce (1,13) až (1,17) s obloukem jako parametrem. Protože ale oblouk nemusí dávat v singulárních bodech analytickou parametrisaci, vyjdeme od analogických vzorců pro obecný parametr t. Platí následující:

Věta 2.1. *Při obecném parametru platí v obecném bodě křivky $\mathbf{M}(t)$ vzorce*

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{{}^t\mathbf{U}_k}{\sqrt{{}^tD_{k-1}\,{}^tD_k}}\,, \tag{2,3}$$

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{{}^tD_{k-1}\,{}^tD_{k+1}}}{{}^tD_k\sqrt{{}^tD_1}}\,, \tag{2,4}$$

kde ${}^tD_k$, ${}^t\mathbf{U}_k$ mají obdobný význam jako D_k, $\mathbf{U}_k$ ze vzorců (1,14) a (1,15), *jenomže derivace v nich jsou absolutní derivace podle parametru t.*

Důkaz. Zřejmě platí

$$\frac{\mathrm{D}^k\mathbf{M}}{\mathrm{d}s^k} = \frac{\mathrm{D}^k\mathbf{M}}{\mathrm{d}t^s}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\frac{\mathrm{D}^i\mathbf{M}}{\mathrm{d}t^i}\,.$$

Dosazením do vzorců (1,14) a (1,15) dostaneme po vynechání nulových členů

$$D_k = {}^tD_k\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{2(1+2+\ldots+k)}\,, \qquad \mathbf{U}_k = {}^t\mathbf{U}_k\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{2(1+2+\ldots+(k-1))+k}$$

Dosazením těchto vzorců do vzorců (1,13) a (1,17) dostaneme ihned (2,3), (2,4), uvědomíme-li si ještě, že $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{{}^tD_1}}$.

Pro další vyšetřování budeme potřebovat rozvoj pro křivku $\boldsymbol{M}(t)$ v okolí bodu $\boldsymbol{M}(0)$. Budiž $\frac{\mathrm{D}^{\alpha_1}M(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_1}}$ první nenulová derivace. Budiž $\frac{\mathrm{D}^{\alpha_2}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_2}}$ v pořadí první další derivace, která je na $\frac{\mathrm{D}^{\alpha_1}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_1}}$ lineárně nezávislá. Takto můžeme postupně definovat soustavu n vektorů [3]

$$\frac{\mathrm{D}^{\alpha_1}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_1}}, \frac{\mathrm{D}^{\alpha_2}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_2}}, \ldots, \frac{\mathrm{D}^{\alpha_n}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_n}} \tag{2,5}$$

takovou, že α_i je nejmenší číslo té vlastnosti, že vektory $\frac{\mathrm{D}^{\alpha_1}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{\mathrm{D}^{\alpha_i}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_i}}$, $1 \leqq i \leqq n$, jsou lineárně nezávislé. Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nezávisí na volbě souřadného systému, závisí však na volbě parametru na křivce. Máme-li jinou parametrisaci a k ní odpovídající čísla $\beta_1, \ldots, \beta_n$, platí $\alpha_i = k\beta_i$ pro $i = 1, \ldots, n$, kde k je nějaké racionální číslo. Viz F. Lévi [3].

Existence těchto n lineárně nezávislých vektorů (2,5) plyne z analytičnosti křivky. Dokažme to.

Volme podél křivky Fermiho souřadný systém. Předpokládejme nyní, že z nekonečné posloupnosti vektorů

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^k\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^k}, \ldots$$

nelze vybrat n lineárně nezávislých vektorů. Uvažujme determinant D, jehož sloupci jsou souřadnice vektorů $\boldsymbol{M}^{\cdot}, \boldsymbol{M}^{\cdot\cdot}, \ldots, \boldsymbol{M}^{(n)}$: $D = [\boldsymbol{M}^{\cdot}, \boldsymbol{M}^{\cdot\cdot}, \ldots, \boldsymbol{M}^{(n)}]$. Nyní platí $D^{\cdot} = [\boldsymbol{M}^{\cdot}, \boldsymbol{M}^{\cdot\cdot}, \ldots, \boldsymbol{M}^{(n-1)}, \boldsymbol{M}^{(n+1)}]$. Podobně všechny ostatní derivace determinantu D se dají vyjádřit jako lineární kombinace determinantů $[\boldsymbol{M}^{(i_1)}, \boldsymbol{M}^{(i_2)}, \ldots, \boldsymbol{M}^{(i_n)}]$. V bodě $t = 0$ jsou všechny tyto determinanty rovny nule. Tedy všechny derivace determinantu D jsou v bodě $t = 0$ rovny nule. Protože determinant D zřejmě je v t analytická funkce, platí identicky $D = 0$. To ale není možné, neboť jsme předpokládali, že $t = 0$ je isolovaný výjimečný bod a že tedy v jeho okolí s výjimkou $t = 0$ platí $D \neq 0$.

Nyní odvodíme lemma, které budeme v dalším často používat. V prostoru V_n volíme přitom Fermiho souřadný systém podél křivky.

Lemma 2.1. *Ve Fermiho souřadném systému platí rozvoje:*

$$\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{\mathrm{d}^{\alpha_1}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_1}}\left[\frac{t^{\alpha_1}}{\alpha_1!} + o(t^{\alpha_1})\right] + \frac{\mathrm{d}^{\alpha_2}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_2}}\left[\frac{t^{\alpha_2}}{\alpha_2!} + o(t^{\alpha_2})\right] + \\ + \ldots + \frac{\mathrm{d}^{\alpha_k}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_k}}\left[\frac{t^{\alpha_k}}{\alpha_k!} + o(t^{\alpha_k})\right] + \mathbf{o}(t^{\alpha_k}), \tag{2,6}$$

kde $1 \leqq k \leqq n$. Přitom $o(t^{\alpha_i})$, $\mathbf{o}(t^{\alpha_k})$ jsou známé symboly malé o.

Pro derivace platí analogické rozvoje:

$$\frac{\mathrm{d}^i\boldsymbol{M}(t)}{\mathrm{d}t^i} = \frac{\mathrm{d}^{\alpha_1}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_1}}\left[\frac{t^{\alpha_1-i}}{(\alpha_1-i)!} + o(t^{\alpha_1-i})\right] + \frac{\mathrm{d}^{\alpha_2}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_2}}\left[\frac{t^{\alpha_2-i}}{(\alpha_2-i)!} + o(t^{\alpha_2-i})\right] + \\ + \ldots + \frac{\mathrm{d}^{\alpha_k}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_k}}\left[\frac{t^{\alpha_k-i}}{(\alpha_k-i)!} + o(t^{\alpha_k-i})\right] + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k-i})\,. \tag{2,7}$$

Přitom je třeba klásti $\dfrac{1}{(\alpha_r - s)!} = 0$, $o(t^{\alpha_r-s}) = o(1)$ *pro* $\alpha_r - s < 0$ a $0! = 1$.

Důkaz plyne ihned z rozvoje

$$\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{d^{\alpha_1}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_1}\alpha_1!}t^{\alpha_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}^{\alpha_2}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_2}\alpha_2!}t^{\alpha_2} + \ldots + \\ + \frac{\mathrm{d}^{\alpha_k}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_k}\alpha_k!}t^{\alpha_k} + \boldsymbol{o}(t^{\alpha_k})\,.$$

Každý z vytečkovaných členů je lineární kombinací předchozích napsaných členů. Dáme-li k sobě členy patřící k téže derivaci, dostaneme rozvoj (2,6). Odtud pak postupným derivováním plynou rozvoje (2,7). Přitom k může nabývat všech přirozených čísel od 1 do n.

Pro další účely je třeba najít hlavní členy rozvojů determinantů ${}^tD_k$ a ${}^t\boldsymbol{U}_k$. To je předmětem následujících dvou lemmat.

Označme písmenem S_k determinant

$$S_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}) \ldots (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}) \ldots (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \end{vmatrix}, \tag{2,8}$$

kde $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_i)}$ znamená $\dfrac{\mathrm{D}^{\alpha_i}\boldsymbol{M}(0)}{\mathrm{d}t^{\alpha_i}}$.

V_k budiž Vandermondův determinant $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Lemma 2.2. *Pro* ${}^tD_k$ *platí rozvoj*

$${}^tD_k = S_k \frac{V_k^2}{(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_k - 1)!^2} t^{2\varepsilon_k} + o(t^{2\varepsilon_k})\,, \tag{2,9}$$

kde

$$\varepsilon_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k - (1 + 2 + \ldots + k)\,. \tag{2,10}$$

Důkaz stačí provést pro Fermiho souřadný systém. Důkaz v obecné souřadné soustavě plyne pak z toho, že determinant ${}^tD_k$ se při transformaci souřadnic ve V_n nemění.

Pro jednoduchost položme

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_i)}\,, \quad c^{ij} = \frac{t^{\alpha_i-j}}{(\alpha_i - j)!} + o(t^{\alpha_i-j})\,. \tag{2,11}$$

Z (2,7) dostaneme tedy rozvoje

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\cdot}(t) &= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-1}) \,, \\ \boldsymbol{M}^{\cdot\cdot}(t) &= \sum_{i=1}^{k} a_i c^{i2} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-2}) \,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{M}^{(k)}(t) &= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}^i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-k}) \,. \end{aligned}\right\} \tag{2,12}$$

Dosazením do ${}^tD$ dostaneme

$${}^tD_k(t) = \begin{vmatrix} (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-1}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-1})) \dots & \dots (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-1}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-k})) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-k}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-1})) \dots & \dots (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-k}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k-k})) \end{vmatrix} .$$

Tento determinant můžeme psát jako součet 4^k determinantů, při čemž členy nejnižšího řádu budou zřejmě v determinantu

$$A_k = \begin{vmatrix} (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \dots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{jk}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \dots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{jk}) \end{vmatrix} . \tag{2,13}$$

Platí tedy

$${}^tD_k = A_k + \dots \tag{2,14}$$

Spočítejme determinant A_k. Zřejmě platí

$$A_k = |(\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i\lambda}, \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j c^{j\mu})| = |\sum_{i,j=1}^{k} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)\, c^{i\lambda} c^{j\mu}| \,.$$

Podle věty o násobení determinantů máme

$$A_k = S_k C_k^2 \,, \tag{2,15}$$

kde

$$C_k = \begin{vmatrix} c^{11} \dots c^{k1} \\ \dots\dots\dots \\ c^{1k} \dots c^{kk} \end{vmatrix} . \tag{2,16}$$

Spočtěme nyní ještě determinant C_k. Platí

$$C_k = \begin{vmatrix} \frac{t^{\alpha_1-1}}{(\alpha_1-1)!} + o(t^{\alpha_1-1}), \ldots, \frac{t^{\alpha_k-1}}{(\alpha_k-1)!} + o(t^{\alpha_k-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{t^{\alpha_1-k}}{(\alpha_1-k)!} + o(t^{\alpha_1-k}), \ldots, \frac{t^{\alpha_k-k}}{(\alpha_k-k)!} + o(t^{\alpha_k-k}) \end{vmatrix}.$$

Tento determinant můžeme psát jako součet 2^k determinantů. Členy nejnižšího řádu budou zřejmě v determinantu

$$B_k = \begin{vmatrix} \frac{t^{\alpha_1-1}}{(\alpha_1-1)!}, \ldots, \frac{t^{\alpha_k-1}}{(\alpha_k-1)!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{t^{\alpha_1-k}}{(\alpha_1-k)!}, \ldots, \frac{t^{\alpha_k-k}}{(\alpha_k-k)!} \end{vmatrix}. \tag{2,17}$$

Platí tedy

$$C_k = B_k + \ldots. \tag{2,18}$$

Z každého členu determinantu

$$B_k = \sum \pm \frac{t^{\alpha_1-i_1}}{(\alpha_1-i_1)!} \cdots \frac{t^{\alpha_k-i_k}}{(\alpha_k-i_k)!}$$

můžeme vytknout t^{ε_k}, kde

$$\varepsilon_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k - (1 + \ldots + k). \tag{2,10'}$$

Platí tedy

$$B_k = t^{\varepsilon_k} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_1-1)!}, \ldots, \frac{1}{(\alpha_k-1)!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{(\alpha_1-k)!}, \ldots, \frac{1}{(\alpha_k-k)!} \end{vmatrix}. \tag{2,19}$$

Vytkneme-li ještě z j-tého sloupce $\frac{1}{(\alpha_j-1)!}$, $1 \leqq j \leqq k$, dostaneme

$$B_k = \frac{t^{\varepsilon_k}}{(\alpha_1-1)! \ldots (\alpha_k-1)!} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & , \ldots, & 1 \\ (\alpha_1-1) & , \ldots, & (\alpha_k-1) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ (\alpha_1-1)\ldots(\alpha_1-k+1), & \ldots, & (\alpha_k-1)\ldots(\alpha_k-k+1) \end{vmatrix}.$$

Tento výsledek je zřejmě správný, i když některý z prvků determinantu ve (2,19) je roven nule. Jednoduchou úpravou zjistíme konečně, že platí

$$B_k = \frac{t^{\varepsilon_k}}{(\alpha_1-1)! \ldots (\alpha_k-1)!} V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \tag{2,20}$$

kde $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ je Vandermondův determinant, který je, jak známo, pro vzájemně různá čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ různý od nuly.

Nyní již plyne snadno tvrzení lemmatu ze vztahů (2,14) až (2,20).

Označme nyní ještě $\boldsymbol{T}_k$ determinant

$$\boldsymbol{T}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)} \end{vmatrix}. \tag{2,21}$$

Lemma 2.3. *Pro* ${}^t\boldsymbol{U}_k$ *platí rozvoj*

$${}^t\boldsymbol{U}_k = \frac{V_k V_{k-1} \boldsymbol{T}_k}{(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_{k-1} - 1)!^2 (\alpha_k - 1)!} t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}} + \mathbf{o}(t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}}). \tag{2,22}$$

Důkaz zase stačí provést pro Fermiho souřadný systém. Důkaz v obecné souřadné soustavě pak plyne z transformačního vzorce pro vektory. Použije se přitom vztahu $\dfrac{\partial \bar{x}^i(x(t))}{\partial x^k} = \dfrac{\partial \bar{x}^i(x(0))}{\partial x^k} + o_k^i(1)$.

Pomocí rozvojů (2,12), které pro druhé členy skalárních součinů vezmeme pouze od 1 do $k - 1$, dostaneme

$${}^t\boldsymbol{U}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}^{\cdot}, \boldsymbol{M}^{\cdot}), \ldots, (\boldsymbol{M}^{\cdot}, \boldsymbol{M}^{(k-1)}), \boldsymbol{M}^{\cdot} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}^{\cdot}), \ldots, (\boldsymbol{M}^{(k)}, \boldsymbol{M}^{(k-1)}), \boldsymbol{M}^{(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}), \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - 1})), \ldots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - k}), \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - 1})), \ldots, \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \ldots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}), \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j,k-1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - (k-1)})), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ldots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - k}), \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j,k-1} + \mathbf{o}(t^{\alpha_{k-1} - (k-1)})), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} + \mathbf{o}(t^{\alpha_k - 1}) \end{vmatrix}.$$

To se rovná součtu 2^{2k-1} determinantů, z nichž členy nejnižších řádů budou v determinantu $\boldsymbol{P}_k$, který dostaneme z ${}^t\boldsymbol{U}_k$, když v něm zanedbáme všechny symboly $\mathbf{o}$. Platí tedy

$${}^t\boldsymbol{U}_k = \begin{vmatrix} (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1}, \sum_{=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \ldots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1}, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j,k-1}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{i1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik}, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j1}), \ldots, (\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik}, \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{a}_j c^{j,k-1}), \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i c^{ik} \end{vmatrix} + \ldots \tag{2,23}$$

Počítejme dále determinant $\mathbf{P}_k$. Platí

$$\mathbf{P}_k = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1})\, c^{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j,k-1})\, c^{i1}, \sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{i1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1})\, c^{ik}, \dots, \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j,k-1})\, c^{ik}, \sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i c^{ik} \end{vmatrix}.$$

Podle věty o násobení determinantů dostaneme („řádky krát sloupce")

$$\mathbf{P}_k = \begin{vmatrix} c^{11}, \dots, c^{k1} \\ \dots\dots\dots \\ c^{1k}, \dots, c^{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1}), \dots, (\mathbf{a}_1, \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j\, c^{j,k-1}), \mathbf{a}_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k, \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{a}_j c^{j1}), \dots, (\mathbf{a}_k, \sum_{j=2}^{k-1} \mathbf{a}_j\, c^{j,k-1}), \mathbf{a}_k \end{vmatrix}. \tag{2,24}$$

Vytkneme-li v druhém determinantu sumační znamení před skalární součiny, dostaneme pak opět podle věty o násobení determinantů

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_j)\, c^{j1}, \dots, \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_j)\, c^{j,k-1}, \mathbf{a}_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j)\, c^{j1}, \dots, \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j)\, c^{j,k-1}, \mathbf{a}_k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1), \dots, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{k-1}), \mathbf{a}_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1), \dots, (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k-1}), \mathbf{a}_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c^{11}, \dots, c^{k-1,1}, & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ c^{1,k-1}, \dots, c^{k-1,k-1}, & 0 \\ 0, \quad \dots, 0, & 1 \end{vmatrix}. \tag{2,25}$$

(V posledním vztahu bylo provedeno násobení „po řádcích".)

Platí tedy celkem

$$^t\mathbf{U}_k(t) = C_k C_{k-1} \mathbf{T}_k + \dots \tag{2,26}$$

Odtud plyne tvrzení lemmatu podle (2,18) a (2,20).

Pomocí lemmat 2,2 a 2,3 můžeme již odvodit hledané vzorce pro křivosti a pro normály.

Věta 2,2. *Pro křivost $\varkappa_k$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$, platí v okolí bodu $t = 0$ rozvoj*

$$\varkappa_k(t) = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1) \dots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} |t^\beta| + o(t^\beta)\,, \tag{2,27}$$

kde

$$\beta = \alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1 \tag{2,28}$$

a S_k je dáno vzorcem (2,8). *Platí tedy*

$$\varkappa_k(0) = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!\, (\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1) \dots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} \lim_{t \to 0+} |t^\beta|\,. \tag{2,29}$$

D ů k a z. Ze vzorce (2,4) a z lemmatu 2,2 plyne

$$\varkappa_k(t) = \frac{\sqrt{{}^tD_{k-1}{}^tD_{k+1}}}{{}^tD_k\sqrt{{}^tD_1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}\, V_{k-1}V_{k+1}(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_{k+1} - 1)!^2(\alpha_k - 1)!^2(\alpha_1 - 1)!}{S_k\sqrt{S_1}V_k^2V_1(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_{k-1} - 1)!^2(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - 1)!} |t^\beta| + o(t^\beta), \tag{2,30}$$

kde $\beta = \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k+1} - 2\varepsilon_k - \varepsilon_1$. Ze vztahu (2,10) plyne

$$\begin{aligned} \beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1} - (1 + \ldots + (k-1)) + \\ + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k+1} - (1 + \ldots + k + 1) - \\ - 2(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) + 2(1 + \ldots + k) - \\ - \alpha_1 + 1 = \alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1, \quad \text{t. j. (2,28)}. \end{aligned}$$

Uvážíme-li ještě, že platí

$$V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, V_{k-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}),$$

dostaneme z (2,30) ihned vztah (2,27). (Při výpočtu jsme použili zřejmého vztahu $V_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0$ pro $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$.)

Z věty 2,2 plyne, že *k-tá křivost je v bodě $\boldsymbol{M}(0)$ konečná a různá od nuly v případě, že $\beta = \alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1 = 0$. Všechny křivosti konečné dostáváme v případě*

$$\alpha_2 - \alpha_1 \geqq \alpha_1, \quad \alpha_3 - \alpha_2 \geqq \alpha_1, \ldots, \alpha_n - \alpha_{n-1} \geqq \alpha_1.$$

V případě konečných a nenulových křivostí plyne odtud

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \quad \alpha_3 = 3\alpha_1, \ldots, \alpha_n = n\alpha_1. \tag{3,21}$$

Z věty 2,2 plyne speciálně pro $\varkappa_1, \varkappa_2$:

$$\varkappa_1(0) = \frac{\sqrt{S_2}(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{S_1^{3/2}(\alpha_2 - 1)!} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_2 - 2\alpha_1}|, \tag{2,32}$$

$$\varkappa_2(0) = \frac{\sqrt{S_3}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_2 - 1)!(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}{S_2(\alpha_3 - 1)!(\alpha_2 - \alpha_1)} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1}|. \tag{2,33}$$

V případě euklidovského prostoru E_3 dostaneme snadno

$$\varkappa_1(0) = \frac{|\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)} \times \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}|(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{|\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}|^3(\alpha_2 - 1)!} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_2 - 2\alpha_1}|, \tag{2,32'}$$

$$\varkappa_2(0) = \frac{[\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_3)}](\alpha_1 - 1)!(\alpha_2 - 1)!(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}{|\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)} \times \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}|^2(\alpha_3 - 1)!(\alpha_2 - \alpha_1)} \lim_{t\to 0+} |t^{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1}|. \tag{2,33'}$$

To jsou známé výsledky; viz na př. R. LILIENTHAL [4].

Věta 2,3. *Pro normály $\mathbf{e}_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, platí v okolí bodu $\boldsymbol{M}(0)$ rozvoje*

$$\mathbf{e}_{k-1}(t) = \varepsilon^{\alpha_k - k} \frac{\boldsymbol{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}} + \mathbf{o}(1), \tag{2,34}$$

kde $\mathbf{T}_k$ *je dáno vzorcem* (2,21), S_k *vzorcem* (2,8) *a* $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \textit{pro} \quad t \geqq 0, \\ -1 & \textit{pro} \quad t < 0. \end{cases}$
Odtud plyne, že v bodě $\mathbf{M}(0)$ *existují všechny normály, při čemž platí*

$$\mathbf{e}_{k-1}(0) = \frac{\mathbf{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2,35}$$

Důkaz. Ze vzorce (2,3) a lemmatu 2,2 a 2,3 plyne

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{{}^t\mathbf{U}_k}{\sqrt{{}^tD_{k-1}{}^tD_k}} =$$

$$= \frac{\dfrac{V_k V_{k-1} \mathbf{T}_k}{(\alpha_1 - 1)!^2 \ldots (\alpha_{k-1} - 1)!^2 (\alpha_k - 1)!} t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}} + \mathbf{o}(t^{\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}})}{\sqrt{\dfrac{S_{k-1} S_k V_{k-1}^2 V_k^2 t^{2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})}}{(\alpha_1 - 1)!^4 \ldots (\alpha_{k-1} - 1)!^4 (\alpha_k - 1)!^2} + o(t^{2(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})})}}.$$

Odtud plyne ihned dokazované tvrzení, uvědomíme-li si ještě, že platí

$$\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) - (1 + \ldots + k) + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) -$$
$$- (1 + \ldots + (k-1)) = 2((\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}) - (1 + \ldots + (k-1))) +$$
$$+ \alpha_k - k.$$

Ze vzorce (2,35) plyne, že podobně jako byly v obecném bodě definovány normály ortogonalisačním procesem E. Schmidta z vektorů $\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \ldots, \mathbf{M}^{(n)}$ lze definovat normály v bodě vyjímečném obdobným procesem z vektorů $\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}, \mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}, \ldots, \mathbf{M}_0^{(\alpha_n)}$. (Explicitní vzorce pro ortogonalisační proces viz G. Kowalewski [2].)

Z věty 2,3 plynou zajímavé důsledky pro orientaci normál a průvodních n-hranů. Zaveďme nejdříve následující definici:

Definice 2.2. *Jestliže normála* $\mathbf{e}_k$ *je v bodě* $t = 0$ *spojitá, říkáme, že nemění v tomto bodě orientaci. Jestliže platí* $\lim\limits_{t \to 0+} \mathbf{e}_k(t) = - \lim\limits_{t \to 0-} \mathbf{e}_k(t)$, *říkáme, že v tomto bodě mění orientaci. Jestliže mění orientaci lichý počet normál, říkáme, že průvodní n-hran mění orientaci. Jestliže mění orientaci sudý počet normál, říkáme, že průvodní n-hran orientaci nemění.*

Nyní platí

Věta 2,4. *K-tá normála* $\mathbf{e}_k$ *mění anebo nemění v bodě* $t = 0$ *orientaci podle toho, je-li číslo* $\alpha_k - k$ *liché anebo sudé. Průvodní n-hran mění anebo nemění v bodě orientaci podle toho, je-li číslo* $\varepsilon_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - (1 + \ldots + n)$ *liché anebo sudé.*

Důkaz plyne okamžitě z definice 2,2 a z vzorce (2,34) ve větě 2,3.

Důsledek věty 2.4. *Podívejme se ještě na případ, kdy všechny křivosti jsou konečné a nenulové. Protože platí* $\alpha_k = k\alpha_1$, *platí také*

$$\alpha_k - k = k(\alpha_1 - 1)\,, \quad \varepsilon_n = \binom{n+1}{2}(\alpha_1 - 1)\,. \tag{2,36}$$

Odtud potom plyne: *Jestliže je* α_1 *liché, nemění žádná z normál orientaci a tedy ani průvodní n-hran. V případě, že* α_1 *je sudá, mění anebo nemění k-tá normála orientaci podle toho, zda k je liché anebo sudé. Průvodní n-hran pak mění orientaci nebo nemění, podle toho, zda* $\binom{n+1}{2}$ *je liché anebo sudé, tj. zda n je tvaru* $n = 4k + 1$, $4k + 2$ *anebo* $n = 4k$, $4k + 3$.

Všimněme si nyní, co se děje s křivostmi a s normálami při změně orientace na křivce dané vztahem $^*t = -t$. Pro nový parametr $^*t$ máme ve Fermiho souřadném systému rozvoj

$$^*\mathbf{M}(^*t) = \frac{^*\mathbf{M}_0^{(\beta_1)}}{\beta_1!}\,{}^*t^{\beta_1} + \ldots + \frac{^*\mathbf{M}_0^{(\beta_2)}}{\beta_2!}\,{}^*t^{\beta_2} + \ldots + \frac{^*\mathbf{M}_0^{(\beta_k)}}{\beta_k!}\,{}^*t^{\beta_k} + \ldots\,,$$

který dostaneme, dosadíme-li do rozvoje pro $\mathbf{M}(t)$ $t = -{}^*t$, tj.

$$(-1)^{\alpha_1}\frac{\mathbf{M}_0^{(\alpha_1)}}{\alpha_1!}\,{}^*t^{\alpha_1} + \ldots + (-1)^{\alpha_2}\frac{\mathbf{M}_0^{(\alpha_2)}}{\alpha_2!}\,{}^*t^{\alpha_2} + \ldots + (-1)^{\alpha_k}\frac{\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}}{\alpha_k!}\,{}^*t^{\alpha_k}\ldots\,.$$

Snadno se nahlédne, že čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se při změně parametrů $^*t = -t$ nemění. Pro výpočet křivostí a normál můžeme tedy použít vektorů $^*\mathbf{M}^{(\alpha_1)}, \ldots, {}^*\mathbf{M}^{(\alpha_n)}$. Z hořejšího však plyne

$$^*\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)} = (-1)^{\alpha_k}\mathbf{M}_0^{(\alpha_k)}\,. \tag{2,39}$$

Ze vzorců (2,8) a (2,21) plyne snadno

$$^*S_k = S_k \quad \text{a} \quad {}^*\mathbf{T}_k = (-1)^{\alpha_k}\,\mathbf{T}_k\,. \tag{2,40}$$

Platí tedy

$$^*\varkappa_k(0) = \varkappa_k(0)\,, \quad {}^*\mathbf{e}_k(0) = (-1)^{\alpha_{k+1}}\,\mathbf{e}_k(0)\,. \tag{2,41}$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout ve větu:

Věta 2.5. *Při změně orientace na křivce se křivost v bodě* $\mathbf{M}(0)$ *nemění. Orientovaná k-normála* $\mathbf{e}_k$ *změní nebo nezmění orientaci podle toho, zda* α_{k+1} *je liché anebo sudé. Průvodní n-hran mění nebo nemění orientaci podle toho, zda* $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ *je liché anebo sudé.*

V případě konečných, nenulových křivostí platí, jak víme, $\alpha_{k+1} = (k+1)\,\alpha_1$, $\alpha = \alpha_1\binom{n+1}{2}$. Vidíme, že v *případě sudého* α_1 *nemění ani normály ani průvodní n-hran orientaci. V případě lichého* α_1 *mění v případě sudého k normály* $\mathbf{e}_k$ *orientaci, v případě k lichého nikoliv. Průvodní n-hran pak v případě lichého* α_1 *mění nebo nemění orientaci podle toho, zda* $\binom{n+1}{2}$ *je liché anebo sudé, tj. v případě čísel n tvaru* $n = 4k$, $4k + 3$ *nemění, v případě* $n = 4k + 1$, $4k + 2$ *mění orientaci.*

3. Frenetovy vzorce. Parametrisace pomocí oblouku

Pomocí vět 2,2 a 2,3 jsme ukázali, že i ve výjimečných bodech existují normály a $n - 1$ nezáporných křivostí, z nichž některé mohou být nulové, případně nekonečné. Normály $\mathbf{e}_k$ jsou přitom v bodě $t = 0$ zprava spojité. Křivosti $\varkappa_k$, pokud jsou konečné, jsou dokonce oboustranně spojité. Je zřejmě jedno, máme-li na mysli parametrisaci pomocí obecného parametru anebo pomocí oblouku. Ukážeme nyní, jak lze na výjimečné body rozšířit Frenetovy vzorce.

Věta 3.1. *Ve výjimečném bodě křivky, ve kterém jsou všechny křivosti konečné, platí Frenetovy vzorce*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_{0\pm}(0) &= \varkappa_1(0)\,\mathbf{e}_1(0)(\pm 1)^{\alpha_2-2}, \\ \mathbf{e}'_{1\pm}(0) &= -\varkappa_1(0)\,\mathbf{e}_0(0)(\pm 1)^{\alpha_1-1} + \varkappa_2(0)(\pm 1)^{\alpha_3-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}'_{(k-1)\pm}(0) &= -\varkappa_{k-1}(0)\,\mathbf{e}_{k-2}(0)(\pm 1)^{\alpha_{k-1}-k+1} + \varkappa_k(0)\,\mathbf{e}_k(0)(\pm 1)^{\alpha_{k+1}-k-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}'_{(n-1)\pm}(0) &= -\varkappa_{n-1}(0)\,\mathbf{e}_{n-2}(0)(\pm 1)^{\alpha_{n-1}-n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (3,1)$$

Přitom $\mathbf{e}'_{(k-1)+}(0)$ *znamenají absolutní derivace podle oblouku v bodě* $s = 0$ *zprava,* $\mathbf{e}'_{(k-1)-}(0)$ *znamenají limity absolutních derivací v bodě* $s = 0$ *zleva.*

Důkaz provedeme ve Fermiho souřadném systému, kdy absolutní derivace přejdou v obyčejné. Vzorce (3,1) pak plynou limitním přechodem z oboustranné spojitosti křivostí, pravostranné spojitosti normál, ze vzorců (1,16) a ze vztahů

$$\lim_{t\to 0-} \mathbf{e}_{k-1} = (-1)^{\alpha_k - k} \lim_{t\to 0+} \mathbf{e}_{k-1} = (-1)^{\alpha_k - k}\,\mathbf{e}_{k-1}(0),$$

které jsou důsledkem vzorce (2,34).

Důsledek věty 3,1. *V případě, že všechny křivosti jsou konečné, od nuly různé a* α_1 *je liché, existují oboustranné derivace normál a platí obvyklé Frenetovy vzorce.*

Důkaz tohoto tvrzení plyne okamžitě z věty 3,1, uvážíme-li, že v tomto případě jsou všechna čísla $\alpha_k - k = (\alpha_1 - 1)\,k$ sudá.

Uveďme nyní jednu zajímavou geometrickou interpretaci křivostí:

Věta 3,2. *Nechť všechny křivosti jsou konečné. Potom platí*

$$\varkappa_k = \lim_{s\to s_0} \frac{\omega_k}{s - s_0}, \quad (3,2)$$

kde ω_k *je ostrý úhel, který svírá k-tý oskulační prostor* $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}\}$ *v bodě* s_0 *s* $(k-1)$*-tou normálou* $\mathbf{e}_{k-1}$ *v bodě* s. *(Za* s_0 *připouštíme i výjimečný bod.)*

Důkaz. Úhel ω_k zmíněný ve znění věty je patrně úhel, který svírá k-tý oskulační prostor v bodě s_0 s vektorem $\mathbf{e}^*_{k-1}(s_0)$ v témže bodě, který vznikne paralelním posunutím vektoru $\mathbf{e}_{k-1}(s)$ do bodu s_0. Úhel ω_k je zřejmě doplňkovým úhlem k úhlu vektoru $\mathbf{e}^*_{k-1}(s)$ s k-tou normálou v bodě s_0. Platí tedy $\sin\omega_k = (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}^*_{k-1}(s_0))$. Místo podílu $\dfrac{\omega_k}{s - s_0}$ můžeme zřejmě vyšetřovat podíl $\dfrac{\sin\omega_k}{s - s_0}$. Zvolme v prostoru V_n Fermiho souřadný systém. V něm platí $\mathbf{e}^*_{k-1}(s_0) = \mathbf{e}_{k-1}(s)$, neboť paralelně posunovaný vektor nemění v použitém systému souřadném souřadnice. Máme tedy $\sin\omega_k = (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_{k-1}(s))$. Podle věty o střední hodnotě platí

$$\mathbf{e}_{k-1}(s) = \mathbf{e}_{k-1}(s_0) + (s - s_0)\,\mathbf{e}'_{k-1}(\sigma)\,, \quad s_0 < \sigma < s\,.$$

(Předpoklady věty o střední hodnotě jsou zřejmě i v případě výjimečného bodu splněny. Spojitost $\mathbf{e}_{k-1}$ zprava v bodě s_0 je zaručena, jak již bylo výše podotknuto. Existenci $\mathbf{e}_{k-1}$ v bodě s_0 věta o střední hodnotě, jak známo, nepředpokladá.)

Platí tedy

$$\sin\omega_k = (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}'_{k-1}(\sigma))(s - s_0)\,.$$

Z Frenetových vzorců (1,16) plyne

$$\mathbf{e}'_{k-1}(\sigma) = -\,\varkappa_{k-1}(\sigma)\,\mathbf{e}_{k-2}(\sigma) + \varkappa_k(\sigma)\,\mathbf{e}_k(\sigma)\,.$$

(V případě $k = 1$ je nutno položit $\varkappa_0 = 0$.) Odtud

$$\frac{\sin\omega_k}{s - s_0} = -\,(\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_{k-2}(\sigma))\,\varkappa_{k-1}(\sigma) + (\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_k(\sigma))\,\varkappa_k(\sigma)\,.$$

Odtud plyne limitním přechodem $s \to s_0 +$ vzhledem k spojitosti všech funkcí zprava v bodě s_0 a vztahům $(\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_{k-2}(s_0)) = 0$, $(\mathbf{e}_k(s_0), \mathbf{e}_k(s_0)) = 1$ dokazované tvrzení.

Obraťme se nyní ještě k parametrisaci křivky pomocí oblouku s. Zabývejme se přitom pouze Fermiho souřadnými systémy ve V_n. Platí

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}t\sqrt{(\mathbf{M}^{\cdot}, \mathbf{M}^{\cdot})} = \mathrm{d}t\varepsilon^{\alpha_1 - 1}t^{\alpha_1 - 1}\sqrt{\frac{(\mathbf{M}^{(\alpha_1)}(0), \mathbf{M}^{(\alpha_1)}(0)}{(\alpha_1 - 1)!^2} + \ldots}\,,$$

kde $\varepsilon = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geqq 0, \\ -1 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$ Odtud plyne rozvedením odmocniny v mocninnou řadu a integrací rozvoj pro oblouk

$$s = \varepsilon^{\alpha_1 - 1}t^{\alpha_1}\,\frac{|\mathbf{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}\,(1 + \ldots)\,. \tag{3,3}$$

Označíme-li

$$s_1 = \varepsilon^{\alpha_1 - 1}s \quad \text{a} \quad s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} = \varepsilon^{\alpha_1 - 1}\sqrt[\alpha_1]{s_1} \tag{3,4}$$

(sudou odmocninu bereme vždy kladně; platí tedy $\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} s_1^{\frac{1}{\alpha_1}}$), dostaneme

$$s_1 = \frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}\, t^{\alpha_1}(1 + \ldots)\,. \tag{3,5}$$

Odtud dostaneme

$$s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} = \sqrt[\alpha_1]{\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}}\, t\, \sqrt[\alpha_1]{1 + \ldots} = \sqrt[\alpha_1]{\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}}\, t(1 + \ldots)\,.$$

Přechodem k inversní funkci dostaneme, jak známo, rozvoj podle lomených mocnin $s_1^{\frac{1}{\alpha_1}}$

$$t = \sqrt[\alpha_1]{\frac{\alpha_1!}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}}\, s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots\,. \tag{3,6}$$

Dosazením tohoto rozvoje do rozvoje

$$\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{\alpha_1!}\, t^{\alpha_1} + \ldots$$

dostaneme rozvoj

$$\boldsymbol{M}(s) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}\, s_1 + \boldsymbol{N}_1 s_1^{\frac{\alpha_1+1}{\alpha_1}} + \ldots\,. \tag{3,7}$$

Najděme ještě první další nenulový člen v tomto rozvoji, který následuje po $\frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}\, s_1$. Nechť je to člen $\boldsymbol{N} s_1^{\frac{\delta}{\alpha_1}}$. Máme tedy

$$\boldsymbol{M}(s) = \boldsymbol{M}(0) + \frac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}\, s_1 + \boldsymbol{N} s_1^{\frac{\delta}{\alpha_1}} + \ldots\,, \tag{3,8}$$

kde $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{o}$. Derivujeme-li rozvoj (3,8) dvakrát podle oblouku, dostaneme

$$\boldsymbol{M}''(s) = \frac{\delta(\delta - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_1}\, \boldsymbol{N} s_1^{\frac{\delta - 2\alpha_1}{\alpha_1}} + \ldots\,. \tag{3,9}$$

Dosazením do tohoto rozvoje za s_1 z (3,5) dostaneme

$$\boldsymbol{M}''(s) = \frac{\delta(\delta - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_1}\, \boldsymbol{N} \left[\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}\right]^{\frac{\delta - 2\alpha_1}{\alpha_1}} t^{\delta - 2\alpha_1} + \ldots\,. \tag{3,10}$$

Abychom našli $\boldsymbol{N}$ a δ, najděme rozvoj pro $\boldsymbol{M}''(s)$ podle mocnin t jiným způsobem: Z prvního Frenetova vzorce (1,16) a ze vzorců (2,32) a (2,34) plyne

$$\boldsymbol{M}''(s) = \boldsymbol{e}_0' = \varkappa_1 \boldsymbol{e}_1 = \frac{\sqrt{S_2}(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{S_1^{3/2}(\alpha_2 - 1)!}\, \varepsilon^{\alpha_2 - 2\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2 - 2}\, \frac{\boldsymbol{T}_2 t^{\alpha_2 - 2\alpha_1}}{\sqrt{S_1 S_2}} + \ldots\,, \text{ tj.}$$

$$\boldsymbol{M}''(s) = \frac{\boldsymbol{T}_2(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{s_1^2(\alpha_1 - 1)!}\, t^{\alpha_2 - 2\alpha_1} + \ldots\,. \tag{3,11}$$

Porovnáním (3,10) a (3,11) dostaneme $\delta = \alpha_2$ a

$$\frac{\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1^2} \boldsymbol{N} \left[\frac{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}{\alpha_1!}\right]^{\frac{\alpha_2 - 2\alpha_1}{\alpha_1}} = \frac{T_2(\alpha_1 - 1)!^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{S_1^2(\alpha_2 - 1)!}, \quad \text{tj.}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{T_2\alpha_1!^2}{S_1^2\alpha_2!} \left[\frac{\alpha_1!}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}\right]^{\frac{\alpha_2 - 2\alpha_1}{\alpha_2}}. \tag{3,12}$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout do věty:

Věta 3,3. *Ve Fermiho souřadném systému platí rozvoj*

$$\boldsymbol{M}(s) = \boldsymbol{M}(0) + \boldsymbol{a}s_1 + \boldsymbol{N}s_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \ldots, \tag{3,13}$$

kde $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)}{|\boldsymbol{M}^{(\alpha_1)}(0)|}$, $\boldsymbol{N}$ *je dáno vzorcem* (3,12) *a* $s_1^{\frac{1}{\alpha_1}} = \varepsilon^{\alpha_1 - 1} \sqrt{\varepsilon^{\alpha_1 - 1}s}$.

Poznámka. Z věty 3,3 plyne, že *ve výjimečném bodě křivky existují vždy nenulové konečné první derivace podle oblouku zprava i zleva, které v případě lichého* α_1 *splynou, v případě sudého* α_1 *se liší znamením.*

Dále z ní snadno plyne (viz také (3,11)), že *v případě nenulové a konečné první křivosti má křivka ve výjimečném bodě druhou derivaci podle oblouku při jinak libovolných* α_1, α_2. *(Přesněji řečeno platí* $\lim_{s \to 0+} \boldsymbol{M}''(s) = \lim_{s \to 0-} \boldsymbol{M}''(s) < +\infty$.)

LITERATURA

[1] *W. Blaschke:* Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Mathematische Zeitschrift, *6*, B. 1920, 94–99.

[2] *G. Kowalewski:* Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909, 423–426.

[3] *F. Levi*: Die Singularitäten der Kurven in beliebigen affinzusammenhängenden Räumen. Berichte Leipzig, *77*, B. 1925, 80–84.

[4] *R. Lilienthal:* Vorlesungen über Diferentialgeometrie I. Leipzig 1908, 242–272.

Резюме

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ НА КРИВЫХ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

(Поступило в редакцию 15/X 1958 г.)

Работа ставит себе целью исследование исключительных точек на аналитических кривых $\boldsymbol{M}(t)$ в римановых пространствах. Исключительными являются такие точки, в которых абсолютные производные $\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^2}, \ldots,$

$\frac{\mathrm{D}^n \boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^n}$ линейно зависимы, как, напр., особые точки и точки перегиба кривой. Прежде всего определим и вычислим в явном виде кривизны и ориентированные нормали в исключительных точках.

Кривизны и нормали в исключительной точке определяются как правосторонние пределы обычных кривизн и нормалей.

Если $\boldsymbol{M}(t)$ — фиксированная параметризация кривой, то обозначим через $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}$ первую неисчезающую абсолютную производную в исключительной точке $t = 0$. Пусть $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}$ есть первая по порядку из дальнейших абсолютных производных, которая линейно не зависит от $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}$. Таким образом можно последовательно определить систему n векторов $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}, \ldots, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_n)}$ такую, что α_i — наименьшее число с тем свойством, что векторы $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \ldots, \ldots, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_i)}$, $1 \leqq i \leqq n$ линейно независимы.

Если обозначить через $\varkappa_1$ k-ю кривизну и через $\mathbf{e}_k$ k-ю нормаль в исключительной точке, то имеем

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1) \ldots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} \lim_{t \to 0+} t^{\alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1},$$

$$k = 1, \ldots, n - 1,$$

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{\boldsymbol{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{где}$$

$$S_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \end{vmatrix},$$

$$T_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)} \end{vmatrix}.$$

Эти формулы составляют главное содержание теорем 2,2 и 2,3. Второй параграф содержит еще теоремы 2,4 и 2,5. Первая из них исследует изменение ориентации нормалей и сопровождающих n-гранников в окрестности исключительной точки. Вторая же, наоборот, исследует изменение ориентации нормалей и сопровождающего n-гранника при изменении ориентации кривой.

Третий параграф содержит обобщенные формулы Френе для случая исключительной точки и конечных кривизн (теорема 3,1) и разложение уравнения кривой в окрестности исключительной точки по степеням $s^{\frac{1}{\alpha_1}}$, где s — дуга (теорема 3,3); здесь же в явном виде вычисляются первых два ненулевых члена этого разложения. Третий параграф содержит, кроме того, еще новое геометрическое истолкование кривизны в римановых пространствах, а именно имеет место равенство $\varkappa_k = \lim\limits_{s \to s_0 +} \dfrac{\omega_k}{s - s_0}$, где ω_k — угол между k-ым соприкасающимся пространством $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}\}$ в точке s_0 и $(k - 1)$-й нормалью $\mathbf{e}_{k-1}$ в точке s. Угол между векторами в двух различных точках кривой определяется при помощи параллельного переноса вдоль этой кривой.

Zusammenfassung

AUSSERGEWÖHNLICHE PUNKTE AUF KURVEN IN RIEMANNSCHEN RÄUMEN

ČESTMÍR VITNER, Praha

(Eingelangt am 15. Oktober 1958)

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von aussergewöhnlichen Punkten auf analytischen Kurven $\boldsymbol{M}(t)$ in Riemannschen Räumen. Aussergewöhnliche Punkte sind solche, in welchen die absoluten Ableitungen $\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^2}, \ldots \dfrac{\mathrm{D}^n\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^n}$ linear abhängig sind, also z. B. singuläre Punkte und Wendepunkte der Kurve. Vor allem geht es daraum die Krümmungen und orientierten Normalen in den aussergewöhnlichen Punkten zu definieren und explizit zu berechnen.

In den aussergewöhnlichen Punkten sind Krümmungen und Normalen definiert als rechtsseitiger Grenzwert der gewöhnlichen Krümmungen und Normalen.

Wenn $\boldsymbol{M}(t)$ eine feste Parameterdarstellung der Kurve bedeutet, so bezeichnen wir mit $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}$ die erste von Null verschiedene absolute Derivierte im aussergewöhnlichen Punkt $t = 0$. Es sei $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}$ in der Aufeinanderfolge die erste weitere absolute Derivierte, die von $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}$ linear unabhängig ist. Auf diese Weise fortschreitend können wir ein System von Vektoren definieren $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_2)}, \ldots, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_n)}$ derart, dass α_i die kleinste Zahl von der Beschaffenheit ist, dass die Vektoren $\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \ldots, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_i)}$), $1 \leqq i \leqq n$ linear unabhängig sind.

Bezeichnen wir mit $\varkappa_k$ die k-te Krümmung und mit $\mathbf{e}_k$ die k-te Normale im aussergewöhnlichen Punkt, so gilt:

$$\varkappa_k = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}(\alpha_1 - 1)!(\alpha_k - 1)!(\alpha_{k+1} - \alpha_1) \ldots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}(\alpha_{k+1} - 1)!(\alpha_k - \alpha_1) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} \lim_{t \to 0+} t^{\alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1},$$

$$k = 1, \ldots, n - 1,$$

$$\mathbf{e}_{k-1} = \frac{\boldsymbol{T}_k}{\sqrt{S_{k-1}S_k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \text{ wo}$$

$$S_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \\ \dotfill \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}) \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)} \\ \dotfill \\ (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_1)}), \ldots, (\boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)}, \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_{k-1})}), \boldsymbol{M}_0^{(\alpha_k)} \end{vmatrix} \quad \text{ist.}$$

Diese Formeln bilden im wesentlichen den Inhalt der Sätze 2,2 und 2,3. Der zweite Abschnitt (Paragraph) enthält noch die Sätze 2,4 und 2,5. Der erste von beiden untersucht die Änderung der Orientierung der Normalen und der begleitenden n-Kante in der Umgebung des aussergewöhnlichen Punktes. Der zweite dagegen untersucht die Änderung der Orientierung der Normalen und der begleitenden n-Kante bei Änderung der Orientierung der Kurve.

Der dritte Abschnitt enthält die verallgemeinerten Frenetschen Formeln für den Fall eines aussergewöhnlichen Punktes und endlicher Krümmungen (Satz 3,1) und die Entwicklung der Kurve in der Umgebung des aussergewöhnlichen Punktes nach Potenzen von $s^{\frac{1}{\alpha}}$, worin s den Bogen bedeutet (Satz 3,3); hier sind auch explizit die ersten zwei von Null verschiedenen Glieder dieser Entwicklung berechnet. Der dritte Abschnitt enthält noch eine neue Interpretation der Krümmungen in Riemannschen Räumen. Es gilt nämlich: $\varkappa_k = \lim\limits_{s \to s_0+} \dfrac{\omega_k}{{}_k s - s_0}$ worin ω_k den Winkel des k-ten osculierenden Raumes $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}\}$ im Punkte s_0 mit der $k-1$-ten Normalen $\mathbf{e}_{k-1}$ im Punkte s_0 bedeutet. Der Winkel der Vektoren in zwei verschiedenen Punkten der Kurve ist definiert durch Parallelübertragung längs der Kurve.