ÚLOHY A PROBLÉMY

K problému č. 1 položenému JANEM MAŘÍKEM v Časopise pro pěstování matematiky roč. *84* (1959), str. 105:

Buď Y K-lineál, který je zároveň Banachovým (tj. úplným normovaným lineárním) prostorem s normou φ. *Předpokládejme, že*

$$\varphi(a) = \varphi(|a|) \tag{1}$$

pro každé $a \in Y$. *Rozhodněte, zda platí implikace*

$$a, b \in Y\,, \quad 0 \leqq a \leqq b \Rightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)\,. \tag{2}$$

Odpoveď na položenú otázku je záporná. Príklad: Nech Y je K-lineál, popísaný v prvom odseku na str. 41 knihy *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва-Ленинград 1950 (Y je množina všetkých dvojíc reálnych čísel a vzťah $(x, y) > 0$ platí práve vtedy, keď je alebo $x > 0$ alebo $x = 0$, $y > 0$). Pre $(x, y) \in Y$ položme $\varphi((x, y)) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Potom Y je Banachov priestor s normou φ. Pre Y platí vzťah (1) z citovaného problému, neplatí však (2), keďže je napr. pre $a = (0, 2)$, $b = (1, 0)$ $0 < a < b$, $\varphi(b) < \varphi(a)$.

Poznámka. Týmto príkladom nie je problém rozriešený pre archimedovské K-lineály.

Ján Jakubík, Košice

4. Řešte problém č. 1 pro archimedovské K-lineály (viz předcházející text).

Jan Mařík, Praha.

*

5. Buďte P, Q spojité funkce ve čtverci $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Nechť pro všechna $[x, y] \in (0, 1) \times (0, 1)$ existují konečné derivace $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ a jsou si rovny. Rozhodněte, zda potom platí

$$\int_0^1 (P(x, 1) - P(x, 0))\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (Q(1, y) - Q(0, y))\, \mathrm{d}y\,. \tag{*}$$

Poznámka. V práci Г. П. Толстов: О криволинейном и повторном интеграле, Труды мат. инст. В. А. Стеклова, *XXXV*, М. — Л. 1950, je dokázáno, že (*) platí, jestliže existují též konečné derivace $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

Jan Mařík, Praha.