Ján Jakubík

Konvexe Ketten in l-gruppen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 1, 53--63

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117301`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

KONVEXE KETTEN IN l-GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Eingelangt am 22. November 1957) DT: 519.4:519.5

Es sei R eine konvexe und maximale Kette in einer l-Gruppe G. In dieser Arbeit untersuchen wir die gruppentheoretischen Eigenschaften der Menge R.

G sei eine l-Gruppe (siehe [1], Kap. XIV). Dann hat G gewisse verbandstheoretische Eigenschaften (die sich nur auf die Operationen $\cap$, $\cup$ beziehen) und gewisse gruppentheoretische Eigenschaften. Es ist bekannt, dass aus verbandstheoretischen Eigenschaften wichtige gruppentheoretische Eigenschaften folgen können. (Z. B.: Ist G ein relativ vollständiger Verband, dann ist G eine kommutative Gruppe.[1]))

In dieser Arbeit wollen wir folgende Frage untersuchen: Es sei R eine konvexe und maximale Kette in einer l-Gruppe G. Welche Gruppeneigenschaften hat dann die Menge R? Die Antwort ist in Satz 2 gegeben.

Wir erwähnen zuerst einige Grundbegriffe und Bezeichnungen (s. [1]). Es sei G eine Menge. Setzen wir voraus, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. G ist eine Gruppe (die Gruppenoperation und das Einselement der Gruppe G bezeichnen wir — auch in dem nicht-kommutativen Fall — mit den Symbolen $+$, 0),

2. G ist ein Verband (die verbandstheoretischen Operationen und die Relation der teilweisen Ordnung bezeichnen wir $\cap$, $\cup$, $\leqq$),

3. für beliebige Elemente $x, y, a, b \in G$ gilt

$$x \leqq y \Rightarrow a + x + b \leqq a + y + b\,.$$

Dann nennen wir G eine l-Gruppe.

(Wenn wir anstatt der Bedingung 2 die schwächere Bedingung

2'. G ist eine teilweise geordnete Menge (die Relation der teilweisen Ordnung bezeichnen wir mit $\leqq$) postulieren und wenn wir die Bedingungen 1, 3 der vorigen Definition in Gültigkeit lassen, so nennen wir G eine teilweise geordnete Gruppe.)

---

[1]) Diesen Satz hat Iwasawa bewiesen (Jap. Jour. Math. *18* (1943)). Siehe auch [1], S. 234.

Im weiteren Text bedeutet G immer eine l-Gruppe, die mehr als ein Element besitzt; kleine Buchstaben bezeichnen Elemente aus G.

In [1] sind folgende Behauptungen bewiesen: G ist ein distributiver Verband. Wenn $x \cap y = 0$, dann ist $x + y = x \cup y$. Es gilt

$$a + (x \cap y) + b = (a + x + b) \cap (a + y + b)$$

und dual.

Wenn die Elemente x, y unvergleichbar sind (d. h. x non $\leqq y$, y non $\leqq x$), dann schreiben wir $x \parallel y$.

Eine nichtleere Untermenge $R \subset G$ ist eine konvexe Kette in G, wenn die folgenden Bedingungen erfült sind:

a) jede zwei Elemente aus R sind vergleichbar,

b) wenn $x, y \in R$, $x < z < y$, dann ist $z \in R$.

Für jede Untermenge $A \subset G$ bezeichnen wir mit A^+ die Menge aller $x \in A$, $x \geqq 0$ und mit $-A$ die Menge aller Elemente $-x$ (wobei $x \in A$).

Es sei R_1 eine konvexe und von oben nicht begrenzte Kette in G, und es sei 0 das kleinste Element in R_1. Dann gelten die Behauptungen 1—5:

1. *Wenn $x, y \in R_1$, $x \leqq y$, dann ist $y - x \in R_1$, $-x + y \in R_1$.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt $0 \leqq y - x \leqq y$, und daher $y - x \in R_1$. Analog beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

2. *Wenn $x, y \in R_1$ ist, dann ist $x + y \in R_1$.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass $x + y \bar{\in} R_1$. Da die Kette R_1 von oben nicht begrenzt ist, existiert $z \in R_1$, z non $\leqq x + y$. Es ist klar, dass $x + y \geqq 0$; nach der Voraussetzung über die Konvexität der Kette R_1 kann also die Beziehung $z \geqq x + y$ nicht gelten, und daher ist

$$z \parallel x + y . \tag{1}$$

Offensichtlich ist $z \geqq y$, und demnach wegen 1 $z - y \in R_1$. Aus (1) ergibt sich $z - y \parallel x$, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind.

3. *Bezeichnen wir $R = R_1 \cup (-R_1)$. Dann ist R eine konvexe Kette in G.*

Beweis. Offensichtlich ist R eine Kette. Setzen wir voraus, dass $x, y \in R$, $x < a < y$, $a \bar{\in} R$. Dann wäre $x < 0 < y$ und gleichzeitig

$$0 \parallel a . \tag{2}$$

Bezeichnen wir $(-x) \cup y = z$. Aus (2) folgt $-z < a < z$,[2])

$$0 < a + z < 2z . \tag{3}$$

Da $z \in R_1$, gilt nach 2 $2z \in R_1$, also nach (3) $a + z \in R_1$. Aus der Beziehung (2) ergibt sich aber $z \parallel a + z$, was ein Widerspruch ist.

In den Absätzen 4, 5 verwenden wir dieselbe Bezeichnungen wie in 3.

---

[2]) Die Ungleichung auf der linken Seite folgt aus $-(a \cup b) = (-a) \cap (-b)$. Siehe [1], S. 215.

4. *Wenn $x, y \in R_1$, dann ist $x - y \in R$, $-y + x \in R$.*

Beweis. Da $-y \leqq x - y \leqq x$ ist, gilt nach 3 $x - y \in R$. Analog kann man die zweite Behauptung beweisen.

5. *Die Menge R ist eine Untergruppe der Gruppe G.*

Beweis. Im Hinblick auf die Konstruktion der Menge R genügt es zu zeigen: Wenn $u, v \in R$ ist, dann ist $u + v \in R$. Wenn $u, v \in R_1$ oder $u, v \in R_2$ ist, gilt dies nach 2; wenn das eine der Elemente u, v zu R_1 und das andere zu R_2 gehört, gilt die Behauptung nach 4.

6. *Es seien R_1, P_1 zwei verschiedene konvexe von oben nicht begrenzte Ketten in G und es sei 0 das kleinste Element in der Kette R_1 und in der Kette P_1. Dann gilt für beliebige Elemente $x \in R_1$, $y \in P_1$ die Beziehung $x \cap y = 0$.*

Beweis. Setzen wir voraus, es existieren Elemente $r \in R_1$, $p \in P_1$, für welche die Beziehung $r \cap p = z > 0$ gilt. Es sei R_1' (P_1') die Menge aller $x \in R_1$ ($y \in P_1$), für welche $x > z$ ($y > z$). R_1' und P_1' sind konvexe von oben nicht begrenzte Ketten. Man überzeugt sich leicht, dass keine von den Beziehungen $R_1' \subset P_1'$, $P_1' \subset R_1'$ gelten kann, und daher gibt es Elemente $r_1 \in R_1'$, $p_1 \in P_1'$, wobei r_1 nicht zu P_1' und p_1 nicht zu R_1' gehört. Die Elemente r_1, p_1 müssen dann unvergleichbar sein. Bezeichnen wir $z' = r_1 \cap p_1$, $r' = r_1 - z'$, $p' = p_1 - z'$. Da $0 < z' < r_1$, $z' < p_1$ ist, gilt $0 < r' < r_1$, $0 < p' < p_1$, und weiter

$$r' \cap p' = (r_1 - z') \cap (p_1 - z') = (r_1 \cap p_1) - z' = 0 . \qquad (4)$$

Wenn $r' \geqq z$, $p' \geqq z$ wäre, könnte die Gleichung (4) nicht erfüllt sein. Wenn $r' < z$ oder $p' < z$ ist, dann sind die Elemente r', p' vergleichbar und damit $r' \cap p' = \min(r', p') > 0$, was ein Widerspruch mit der Gleichung (4) ist.

7. Wir wollen eine Kette R aus G maximal (in G) nennen, wenn sie keine echte Untermenge einer Kette $R' \subset G$ ist. Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass eine maximale Kette in G von oben und von unten nicht begrenzt ist (da G (siehe [1], Kap. XIV) kein grösstes und kein kleinstes Element enthält).

R sei eine maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$. Dann ist $R = R^+ \cup (-R^+)$.

Beweis. Bezeichnen wir $R^+ = R_1$, $-R^- = R_2$. Es genügt zu zeigen, dass $R_1 = R_2$ ist. Setzen wir voraus, es wäre $R_1 \neq R_2$. Offensichtlich sind R_1, R_2 konvexe und von oben nicht begrenzte Ketten in G mit dem kleinsten Element 0 und daher ist wegen 6 für beliebige Elemente $x \in R_1$, $y \in R_2$ die Gleichung $x \cap y = 0$ erfüllt. Demnach enthalten auch die Ketten $-R_1$, $-R_2$ ein einziges gemeinsames Element, und zwar 0. Wählen wir Elemente $r \in R_1$, $p \in -R_2$, $p < 0 < r$. Bezeichnen wir jetzt $z = p + r$. Es gilt $p < z < r$, und daher $z \in R$, d. h. $z \in R_1$ oder $z \in -R_2$. Wenn $z \in R_1$, dann ist nach 1 $r - z \in R_1$. Da $r - z = -p$ ist, ist das ein Widerspruch zu der Voraussetzung $-p \in R_2$. Wenn $z \in -R_2$ ist, so ist nach 5 $-z + p \in R_2 \cup (-R_2)$. Da $-z + p = -r$ ist, sind wir zu einem Widerspruch zu der Voraussetzung $r \in R_1$, $-r \in -R_1$ gelangt.

8. *R sei eine maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$. Dann ist die Menge R eine Untergruppe in G.*

Der Beweis folgt aus 5 und 7.

Wir bezeichnen weiter mit R eine (feste) maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$.

9. Jedem Element $x \in G^+$ ordnen wir ein Element $x_1 \in R^+$ in der folgenden Weise zu:

a) Wenn $x \in R^+$ ist, setzen wir $x_1 = x$.

b) Es sei $x \bar{\in} R^+$. Dann kann das Element x nicht mit allen Elementen der Kette R^+ vergleichbar sein, also existiert $r_0 \in R^+$, $x \parallel r_0$. Wir setzen $x_1 = r_0 \cap x$.

Für jedes Element $r \in R^+$, $r > x_1$ gilt $r \cap x = x_1$. (Für $r \in \langle x_1, x_0 \rangle$ ist das klar. Es sei $r > r_0$, $r \cap x = x'$. Dann ist $x' \geqq x_1$; der Fall $x' \geqq r_0$ ist aber ausgeschlossen, denn dann wäre $x \geqq r_0$, und der Fall $x_1 < x' < r_0$ ist auch ausgeschlossen, denn es wäre $r_0 \cap x = x'$. Demnach muss die Gleichung $x' = x_1$ gelten.) Daraus folgt, dass das Element x_1 nur von x (und nicht von r_0) abhängt. Aus dem Verlauf der Überlegung folgt weiter

$$x_1 = \sup r(r \in R^+, r \leqq x)\,. \tag{5}$$

10. *Im folgenden Text hat das Symbol x_1 (für $x \in G^+$) dieselbe Bedeutung wie in 9. Bezeichnen wir mit x_2 das Element, für welches die Gleichung $x = x_1 + x_2$ gilt. Dann ist $x_1 \cap x_2 = 0$.*

Beweis. Bezeichnen wir $x_1 \cap x_2 = u$; offensichtlich ist $u \in R^+$. Dann gilt für ein bestimmtes Element $k \geqq 0$ die Gleichung $x_2 = u + k$, $x = (x_1 + u) + k$. Nach 2 ist $x_1 + u \in R^+$ und daher gilt $x_1 \leqq x_1 + u \leqq x$. Wegen (5) ist dann $u = 0$.

Aus der im Absatz 9 gemachten Überlegung folgt jetzt: Für jedes $r \in R^+$ gilt $r \cap x_2 = 0$.

11. Im folgenden Text hat das Symbol x_2 dieselbe Bedeutung wie in 10. Es sei Q die Menge aller x_2 $(x \in G^+)$. Nach 10 ist $Q \subset G^+$.

Wenn sich das Element $x \in G^+$ in der Form $x = y + z$, $y \in R^+$, $z \in Q$ darstellen lässt, dann ist $y = x_1$, $z = x_2$.

Beweis. Aus dem letzten Satz des Absatzes 10 folgt, dass der Durchschnitt eines beliebigen Elementes der Menge $M_1 = \{x_1, y\}$ mit einem beliebigen Element dei Menge $M_2 = \{x_2, z\}$ (die Möglichkeit $x_1 = y, x_2 = z$ ist nicht ausgeschlossen) gleich 0 ist, also gilt auch $(x_1 \cup y) \cap (x_2 \cup z) = 0$. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} x = x \cup x = (x_1 + x_2) \cup (y + z) = (x_1 \cup x_2) \cup (y \cup z) = \\ = (x_1 \cup y) \cup (x_2 \cup z) = (x_1 \cup y) + (x_2 \cup z)\,. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung dieses Ergebnisses mit den Gleichungen $x = x_1 + x_2 = y + z$ folgt offensichtlich $x_1 = y$, $x_2 = z$. (Wäre z. B. $x_1 \neq y$, dann müsste $x_1 \cup y > x_1$ oder $x_1 \cup y > y$ gelten, und damit $x > x$ sein.)

12. *Es gilt* $z \in Q$ *dann und nur dann, wenn für ein Element* $r_0 \in R$, $r_0 > 0$ *die Gleichung* $r_0 \cap z = 0$ *gilt.*

Beweis. Die Behauptung „nur dann" wurde im Absatz 10 bewiesen. Es sei $r_0 \in R^+$, $r_0 > 0$, $r_0 \cap z = 0$. Aus der im Absatz 9 gemachten Überlegung folgt, dass dann für jedes $r \in R^+$ die Bedingung $r \cap z = 0$ erfüllt ist. Wählen wir $r > r_0$, $r \in R^+$ und bezeichnen $x = r_0 + z = r_0 \cup z$. Dann gilt $r \cap x = r \cap (r_0 \cup z) = r_0$, und also $r_0 = x_1$, $z = x_2$, $z \in Q$.

13. *Wenn* $y, z \in Q$ *ist, dann ist* $y + z \in Q$, $y \cup z \in Q$, $y \cap z \in Q$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus dem Satze 6, [1], Kap. XIV. Die zweite Behauptung ist eine Folgerung der Distributivität des Verbandes G. Die dritte Behauptung ist klar.

14. Jetzt brauchen wir einige Hilfsbegriffe, die sich auf verbands-geordnete Halbgruppen beziehen. (Die Halbgruppenoperation wollen wir — ähnlich wie bei Gruppen — mit $+$ bezeichnen, auch in dem nicht-kommutativen Fall.)

M sei eine Menge. Setzen wir voraus, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. M ist eine Halbgruppe (in bezug auf die Operation $+$),

2. M ist ein Verband (die Verbandsoperationen und die Relation der teilweisen Ordnung bezeichnen wir mit $\cap$, $\cup$, $\leqq$),

3. es gilt die Bedingung 3 aus der Definition der l-Gruppe (wenn wir M anstatt G setzen).

Dann nennen wir M eine verbands-geordnete Halbgruppe.

Weiter setzen wir voraus, dass die Halbgruppe M ein solches Element 0 enthält, dass für jedes $x \in M$ die Gleichungen $0 + x = x + 0 = x$ gelten.

Eine Untermenge $M_1 \subset M$ wollen wir eine C-Menge in M nennen, wenn

a) $x, y \in M_1 \Rightarrow x + y \in M_1$,

b) M_1 ein Teilverband in M ist,

c) $0 \in M_1$.

Wir führen den Begriff des direkten Produktes ein. Es seien M_1, M_2 C-Mengen in M. M ist ein direktes Produkt von M_1, M_2, wenn sich jedes Element $x \in M$ eindeutig in der Gestalt $x = a + b$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ darstellen lässt und wenn dabei diese Bedingung gilt: für beliebige $x, y \in M$ folgt aus den Beziehungen

$$x^1 = a^1 + b^1 , \quad x^2 = a^2 + b^2 \quad (a^i \in M_1,\ b^i \in M_2,\ i = 1, 2)$$

die Gleichung

$$x^1 \circ x^2 = (a^1 \circ a^2) + (b^1 \circ b^2) ,$$

wobei $\circ$ beliebige aus den Operationen $+$, $\cap$, $\cup$ ist. M_1, M_2 sind direkte Faktoren in M. In Symbolen $M \cong M_1 \times\cdot M_2$.

Bemerkung. In der vorangehenden Erklärung ist als ein Sonderfall der Begriff des direkten Produktes für l-Gruppen enthalten. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Erklärung (für l-Gruppen) mit dei in [2], S. 153 gegebenen Definition übereinstimmt.

15. *Für $a \in G^+$ haben die Symbole a_1, a_2 im weiteren Text dieselbe Bedeutung wie in 9 und 10. Es seien $x, y \in G^+$. Bezeichnen wir $u = x \cap y$, $v = x \cup y$, $z = x + y$. Dann ist $u_i = x_i \cap y_i$, $v_i = x_i \cup y_i$, $z_i = x_i + y_i$ $(i = 1, 2)$.*

Beweis. a) $u = (x_1 \cup x_2) \cap (y_1 \cup y_2) = (x_1 \cap y_1) \cup (x_2 \cap y_2)$. Offensichtlich ist $x_1 \cap y_1 \in R^+$. Nach 13 gilt $x_2 \cap y_2 \in Q$. Wegen 12 ist $(x_1 \cap y_1) \cap (x_2 \cap y_2) = 0$. Es ist daher $u = (x_1 \cap y_1) + (x_2 \cap y_2)$. Die erste Behauptung folgt jetzt aus 11.

b) $v = (x_1 \cup x_2) \cup (y_1 \cup y_2) = (x_1 \cup y_1) \cup (x_2 \cup y_2)$. Weiter wie in a).

c) Da $y_1 \in R^+$, $x_2 \in Q$ ist, gilt $y_1 \cap x_2 = 0$ und daher $y_1 + x_2 = y_1 \cup x_2 = x_2 + y_1$ Daraus folgt $z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$.

16. Aus 9, 10, 11, 13 und 15 ergibt sich:

G^+ ist ein direktes Produkt ihrer C-Mengen R^+, Q

$$G^+ \cong R^+ \times Q. \tag{6}$$

17. *Jeder Produktzerlegung der verbands-geordneten Halbgruppe $G^+ \cong A_0 \times B_0$ entspricht eine Produktzerlegung der l-Gruppe G, $G \cong A \times B$, wobei A, B Untergruppen in G sind und die Gleichungen $A^+ = A_0$, $B^+ = B_0$ erfüllt sind.*

Beweis. Setzen wir voraus, die verbands-geordnete Halbgruppe G^+ lässt sich in der Gestallt $G^+ \cong A_0 \times B_0$ darstellen. Nach Lemma 2, § 5, [2] gibt es eine solche direkte Zerlegung der Gruppe G

$$G \cong A \times B, \tag{*}$$

dass $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ gilt. Dabei (siehe [2], S. 164) gilt die Beziehung (*) auch in Bezug auf die teilweise Ordnung, d. h. in Bezug auf die Operationen $\cap$, $\cup$.

Offensichtlich ist $A_0 \subset A^+$. Es sei $z \in A^+$. Nach der Voraussetzung und wegen 14 existieren Elemente $a \in A_0$, $b \in B_0$, für welche die Gleichung $z = a + b$ gilt. Wenn $b \neq 0$, ergibt sich (da $b \in B$) wegen (*) $z \bar{\in} A$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Demnach ist $b = 0$, d. h. $z = a$, $z \in A_0$. Damit haben wir die Beziehungen $A^+ \subset A_0$, $A^+ = A_0$ bewiesen. In analoger Weise gewinnt man die Gleichung $B^+ = B_0$.

Satz 1. *R sei eine maximale und konvexe Kette in G, $0 \in R$. Dann ist R ein direkter Faktor in G.*

Beweis. Konstruieren wir die Produktzerlegung der l-Gruppe G, welche der Produktzerlegung (6) von G^+ entspricht:

$$G \cong A \times B.$$

Es gilt $R^+ = A^+$. Wir wollen die Gleichung $A = R$ beweisen.

Es sei $x \in R$. Wenn $x \geqq 0$ ist, dann ist $x \in R^+ \subset A$. Wenn $x < 0$ ist, dann ist $-x \in R^+ \subset A$, also (da A eine Untergruppe in G ist) gilt $x \in A$.

Wenn $x \in A$, $x \geqq 0$ ist, dann ist $x \in A^+ \subset R$. Falls $x \in A$, $x < 0$ ist, gilt $-x \in R^+$, also ist nach 8 $x \in R$. Es sei jetzt x ein beliebiges Element aus A. Da A ein Teilverband in G ist, gilt $x \cap 0 \in A$, $x \cup 0 \in A$ und nach dem schon Bewiesenen $x \cap 0 \in R$, $x \cup 0 \in R$. Da die Kette R konvex ist, gilt $x \in R$.

17.1. Im Absatz 14 wurde die Produktzerlegung einer verbandsgeordneten Halbgruppe erklärt; diese Zerlegung hatte zwei Faktoren. In einer analogen Weise kann man eine Produktzerlegung mit n Faktoren definieren.

Wir erwähnen noch ohne Beweis folgende Behauptungen (die Beweise folgen durch eine einfache Überlegung aus Satz 1):

a) *$R_1, \ldots, R_n$ seien (miteinander verschiedene) maximale und konvexe Ketten in einer l-Gruppe G, $0 \in R_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann kann die l-Gruppe G in ein direktes Produkt*

$$G \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n \times Q$$

zerlegt werden.

b) *Setzen wir voraus, $R_1, \ldots, R_n$ haben dieselben Eigenschaften wie in* a). *Es sei G_1 ein von der Menge $R_1^+ \cup R_2^+ \cup \ldots \cup R_n^+$ erzeugter Teilverband in G. Wenn $G_0 = G^+$ ist, dann gilt*

$$G \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n \,.$$

17.2. *Es sei R_0 eine konvexe Kette mit dem kleinsten Element* 0 *und mit dem grössten Element r in einer l-Gruppe G. Dann ist das Intervall $\langle 0, 2r\rangle$ auch eine Kette.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass das Intervall $\langle 0, 2r\rangle$ keine Kette ist. Dann existiert ein Element $z \in G$, $0 < z < 2r$, $z \parallel r$. Bezeichnen wir $z \cap r = u$, $z \cup r = v$. Es seien p, q die Elemente, für welche die Gleichungen

$$u + p = z\,, \quad u + q = r \tag{6.1}$$

erfüllt sind. Nach dem Satz 4, Kap. XIV, [1] gilt dann

$$r + p = v\,. \tag{6.2}$$

Offensichtlich ist $p \geqq 0$, $q \geqq 0$. Aus $p = 0$ $(q = 0)$ ergibt sich $z < r$ $(z > r)$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also gilt $p > 0$, $q > 0$.

Nach der zweiten Gleichung (6.1) ist $q \leqq r$ und wegen (6.2) $r + p \leqq 2r$, also gilt $p \leqq r$. Da $\langle 0, r\rangle$ eine Kette ist, gilt $p \cap q = p$ oder $p \cap q = q$ und daher ist $p \cap q \neq 0$. Aber wegen (6.1) gilt

$$p \cap q = (-u + z) \cap (-u + r) = (-u) + (z \cap r) = 0\,.$$

Damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt und der Beweis ist erbracht.

Durch vollständige Induktion ergibt sich:

Die Menge $R_1 = \cup\, nR_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist eine konvexe Kette in G. (Dabei ist nR_0 die Menge aller Elemente der Gestalt nx, $x \in R_0$.)

Wenn die l-Gruppe G archimedisch ist, dann ist die Kette R_1 von oben nicht begrenzt. Im Hinblick auf Satz 1 folgt:

Satz 1′. *G sei eine archimedische l-Gruppe. Es sei $r \in G$, $r > 0$ und das Intervall $\langle 0, r\rangle = R_0$ sei eine Kette. Dann lässt sich die l-Gruppe G in ein direktes Produkt*

$$G \cong R \times Q$$

zerlegen, wobei R eine Kette ist und $R_0 \subset R$.

Bemerkung. An einem Beispiel kann man zeigen, dass eine analoge Behauptung für nicht-archimedische l-Gruppen im allgemeinen nicht gilt.

18. *Es sei $G^+ \cong A \times B$, $x \in G^+$, $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Dann gilt $a \cap b = 0$.*

Beweis. Aus den Gleichungen $x = a + b$, $0 = 0 + 0$ folgt nach der Definition des direkten Produktes (siehe 14)

$$x = x \cup x = (a \cup 0) + (b \cup 0)$$

und daher gilt $a \cup 0 = a$, $b \cup 0 = b$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Aus den Gleichungen $a = a + 0$, $b = 0 + b$ ergibt sich dann

$$a \cap b = (a \cap 0) + (b \cap 0) = 0\,.$$

19. Man kann die Frage stellen, ob man die durch Satz 1 beendete Überlegung in einer solchen Weise verallgemeinern kann, dass man als den Ausgangspunkt der Überlegung keine konvexe von oben unbegrenzte Kette R_1, sondern einen konvexen von oben nicht begrenzten Teilverband $S_0 \subset G$, $0 \in S_0$ wählt. Folgendes Beispiel zeigt, dass diese Voraussetzungen zu einer Möglichkeit der Verallgemeinerung nicht genügen:

G sei die l-Gruppe aller stettigen im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ definierten Funktionen (mit der gewöhnlichen teilweisen Ordnung, wobei als Gruppenoperation die Addition dient) und S_0 sei die Menge aller $f \in G^+$, für welche

$$x \in \langle 0, \tfrac{1}{2}\rangle \Rightarrow f(x) = 0 \text{ gilt}\,.$$

Die Menge S_0 genügt den oben gegebenen Bedingungen (ausserdem ist S_0 eine C-Menge in G). Setzen wir voraus, dass für eine gewisse C-Menge $S' \subset G^+$ die Beziehung $G^+ \cong S_0 \times S'$ gilt. Nach 18 ist dann für jedes $a \in S_0$, $b \in S'$

$$a \cap b = 0\,.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht, dass für jedes $b \in S'$ und jedes $x \in (\tfrac{1}{2}, 1\rangle$ $b(x) = 0$ ist. Aus der Stetigkeit folgt weiter $b(\tfrac{1}{2}) = 0$. Da nach der Voraussetzung jede Funktion $f \in G^+$ in der Form $f = a + b$, $a \in S_0$, $b \in S'$ darstellbar ist, gilt für jedes $f \in G^+$ $f(\tfrac{1}{2}) = a(\tfrac{1}{2}) + b(\tfrac{1}{2}) = 0$. Damit sind wir zum Widerspruch gelangt.

20. S sei ein Verband mit dem kleinsten Element 0. Setzen wir voraus, dass S_0, S' konvexe Teilverbände in S sind, $0 \in S_0$, $0 \in S'$. Weiter setzen wir voraus, dass sich jedes Element $x \in S$ eindeutig in der Form $x = a \cup b$, $a \in S_0$, $b \in S'$ darstellen lässt, und dass aus den Beziehungen

$$x = a_1 \cup b_1 , \quad y = a_2 \cup b_2 , \quad a_i \in S_0 , \quad b_i \in S' \quad (i = 1, 2)$$

die Gleichung

$$x \cap y = (a_1 \cap a_2) \cup (b_1 \cap b_2)$$

folgt. Dann wollen wir S ein *direktes Produkt* seiner Teilverbänden S_0, S' nennen. In Symbolen $S \cong S_0 \times S'$. S_0, S' sind direkte Faktoren in S.

Es ist leicht einzusehen, dass sich diese Erklärung (für Verbände, die ein kleinstes Element besitzen) nur förmlich von der in [1], Kap. II gegebenen Definition des direkten Produktes unterscheidet.

21. Anstatt der im Absatz 19 ausgesprochenen Vermutung, die sich als falsch erwiesen hat, beweisen wir den

Satz 3. *S_0 sei ein direkter Faktor in dem Verband G^+. Dann ist die Menge S_0 zugleich ein direkter Faktor in der verbands-geordneten Halbgruppe G^+.*

Beweis. Setzen wir voraus, der Verband G^+ ist in dem im Absatz 20 definierten Sinne in ein direktes Produkt $G^+ \cong S_0 \times S'$ zerlegt. Wenn $a \in S_0$, $b \in S'$ ist, ist nach 20

$$a \cap b = (a \cup 0) \cap (0 \cup b) = (a \cap 0) \cup (0 \cap b) = 0 .$$

Wenn weiter $x \in G^+$ ist und wenn für jedes $b \in S'$ die Gleichung $x \cap b = 0$ erfüllt ist, dann gilt $x \in S_0$. Wenn wir nämlich das Element x in der Form $x = a \cup b$, $a \in S_0$, $b \in S'$ darstellen, ist nach der Voraussetzung $b = 0$, also $x = a$.

Es seien a, a' Elemente aus S_0. Nach dem schon Bewiesenen und nach Satz 6, [1], Kap. XIV gilt $(a + a') \cap b = 0$ für jedes $b \in S'$. Daher folgt $a + a' \in S_0$, so dass S_0 eine C-Menge in G^+ ist. Jedes Element $x \in G^+$ ist eindeutig in der Form

$$x = a \cup b = a + b , \quad a \in S_0 , \quad b \in S'$$

darstellbar; wenn bei dieser Darstellung zugleich $x' = a' + b'$ ist, dann gilt (da $b \cap a' = 0$)

$$x + x' = (a + b) + (a' + b') = (a + a') + (b + b') .$$

Damit haben wir bewiesen, dass die verbands-geordnete Halbgruppe G^+ ein direktes Produkt ihrer C-Mengen S_0, S' ist.

Folgerung. Wenn der Verband G^+ in ein direktes Produkt $G^+ \cong S_0 \times S'$ zerlegbar ist, dann lässt sie die l-Gruppe G in das direkte Produkt $G \cong A \times B$ zerlegen, wobei $A^+ = S_0$, $B^+ = S'$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 3 und aus 17.

22. Wir wollen sagen, dass eine teilweise geordnete Gruppe G *eine einzige Komponente hat*, wenn für jedes Element $x \in G$ Elemente $u, v \in G$ existieren, für welche die Beziehungen $u \leqq 0$, $u \leqq x$, $v \geqq 0$, $v \geqq x$ gelten. (Siehe [2].)

Durch Beispiele zeigt man leicht, dass der Satz 3 im allgemeinen für teilweise geordnete Gruppen nich gilt.

Man kann die Frage stellen, ob die Sätze 1 und 3 für teilweise geordnete Gruppen mit einer einzigen Komponente gültig sind. Die positive Antwort scheint sehr wahrscheinlich.

LITERATUR

[1] *G. Birkhoff*: Lattice theory, revised ed., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications vol. XXV, New York 1948.

[2] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп, Матем. сборник *20* (1947), 145—178.

Výtah

KONVEXNÉ REŤAZCE VO SVÄZOVO USPORIADANÝCH GRUPÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Došlo dne 22. listopadu 1957)

Nech G je sväzovo usporiadaná grupa, obsahujúca viac ako jeden prvok. Používame rovnaké označenia ako v [1], kap. XIV. Množina $R \subset G$ je maximálny konvexný reťazec v G, ak R je reťazec, ktorý v G nie je zhora ani zdola ohraničený, a ak zo vzťahu $x, y \in R$, $z \in G$, $x < z < y$ vyplýva $z \in R$.

Veta 1. *Nech R je maximálny a konvexný reťazec v G, $0 \in R$. Potom R je priamy faktor vo sväzovo usporiadanej grupe G.*

Veta 2. *Nech R' je maximálny a konvexný reťazec v G. Potom R' má tvar $R' = x + R$, pričom $x \in R'$ a R je priamy faktor v G.*

Veta 1'. *Nech G je archimedovská sväzovo usporiadaná grupa. Nech $r \in G$, $r > 0$, nech interval $\langle 0, r \rangle = R_0$ je reťazcom. Potom sa G dá rozložiť na priamy súčin $G \cong R \times Q$, pričom R je reťazec a platí $R_0 \subset R$.*

V odseku 20 je definovaný pojem rozkladu na priamy súčin pre sväzy s najmenším prvkom; táto definícia sa len formálne líši od definície, uvedenej v [1], kap. II.

Veta 3. *Nech S_0 je priamy faktor vo sväze G^+. Potom je S_0 zároveň priamym faktorom vo svázovo usporiadanej pologrupe G^+.*

Dôsledok. Ak sa sväz G^+ dá rozložiť na priamy súčin $G^+ \cong S_0 \times S'$, potom sa svázovo usporiadaná grupa G dá rozložiť na priamy súčin $G \cong A \times B$, pričom $A^+ = S_0$, $B^+ = S'$.

Резюме

ВЫПУКЛЫЕ ЦЕПИ В l-ГРУППАХ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 22/XI 1957 г.)

Пусть G — l-группа, содержащая более одного элемента. Воспользуемся обозначениями из книги [1], гл. XIV. Множество $R \subset G$ будет максимальной и выпуклой цепью в G, если R сверху и снизу не органиченная цепь и если из соотношений $x, y \in R$, $z \in G$, $x < z < y$ вытекает $z \in R$.

Теорема 1. *Пусть R — максимальная и выпуклая цепь в G, $0 \in R$. Тогда R является прямым сомножителем в G.*

Теорема 2. *Пусть R — максимальная и выпуклая цепь в G. Тогда $R = x + R'$, причем $x \in R'$ и R' — прямый сомножитель в G.*

В абзаце 20 определяется понятие разложения в прямое произведение для структур, в которых существует наименьший элемент; наше определение только формально отличается от определения, данного в [1], гл. II.

Теорема 3. *Пусть S_0 — прямой сомножитель в структуре G^+. Тогда S_0 является тоже прямым сомножителем в структурно упорядоченной полугруппе G^+.*

Следствие. Если структуру G^+ можно разложить в прямое произведение $G^+ \cong S_0 \times S'$, то l-группа G разложима в прямое произведение $G \cong A \times B$, причем $A^+ = S_0$, $B^+ = S'$.