Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

O ROVNOVÁŽNE ORIENTOVANÝCH KONEČNÝCH GRAFOCH

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Došlo dne 13. listopadu 1957) DT: 519.51

V práci sa študujú niektoré vlastnosti takzvaných rovnovážne orientovaných grafov, pod čím sa rozumejú orientované grafy bez izolovaných uzlov, v ktorých počet hrán smerujúcich do ľubovoľného uzla rovná sa počtu hrán smerujúcich z tohoto uzla. Nadväzuje sa tu na známe vety o rozklade takýchto grafov na cykly, ďalej na niektoré vety o vlastnostiach eulerovských grafov a odvodzujú sa vety umožňujúce alebo usnadňujúce stanovenie počtu rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov daného orientovaného grafu. Poukazuje sa napokon na možnosť aplikácie získaných výsledkov pri riešení úlohy stanoviť počet rôznych lineárnych faktorov v danom párnom grafe.

1

V práci pod grafom rozumie sa vždy konečný graf. Ak v neorientovanom grafe G orientujeme každú z jeho hrán, dostaneme tak istý *orientovaný graf* $\vec{G}$. Rôznou orientáciou hrán toho istého neorientovaného grafu dostaneme prirodzene rôzne orientované grafy.

Ak hrana h v neorientovanom grafe je incidentná s uzlami u, v, vyjadrujeme sa obvykle tiež tak, že hrana h spojuje uzly u, v. Ak u je počiatočným uzlom v konečným uzlom orientovanej hrany h v grafe $\vec{G}$, hovoríme, že hrana h v grafe $\vec{G}$ *smeruje z uzla u do uzla v*. Pod *stupňom uzla* v grafe (orientovanom alebo neorientovanom) rozumie sa vždy počet hrán, s ktorými je uzol v grafe incidentný. Uzol u je *izolovaným uzlom* grafu, ak nie je incidentný so žiadnou hranou grafu. Graf je *eulerovským grafom*, ak neobsahuje izolované uzly a každý jeho uzol je párneho stupňa.

O uzle u orientovaného grafu $\vec{G}$ budeme hovoriť, že je *v rovnováhe*, alebo tiež, že je *rovnovážny*, ak nie je izolovaným uzlom a počet hrán z $\vec{G}$, ktoré smerujú do uzla u, rovná sa počtu hrán z $\vec{G}$ smerujúcich z uzla u. Orientovaný graf $\vec{G}$ nazveme *rovnovážne orientovaným grafom*, ak každý jeho uzol je rovnovážny.

Poznámka 1. Rovnovážne orientovaný graf, ktorý je súvislý, je špeciálnym prípadom takzvaného dobre orientovaného grafu, o ktorom pojednáva aj nedávno uverejnená práca [1].

Nech postupnosť $u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, u_{m-1}, h_{m-1,m}, u_m$ prvkov orientovaného grafu $\vec{G}$ (kde $m \geqq 2$, $h_{x,x+1}$ sú hrany, u_x sú uzly a hrana $h_{x,x+1}$ je incidentná s uzlami $u_x \neq u_{x+1}$) popisuje istý ťah T. Budeme hovoriť, že ťah T je *kontinuitne orientovaný*, ak pre všetky $x \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ buď platí: hrana $h_{x,x+1}$ smeruje v $\vec{G}$ z uzla u_x do uzla u_{x+1}, alebo pre všetky x platí: hrana $h_{x,x+1}$ smeruje z uzla u_{x+1} do uzla u_x. Ako je známe, kontinuitne orientovaná cesta nazýva sa *dráha* a kontinuitne orientovanej kružnici sa hovorí *cyklus*. Ľubovoľný cyklus je zrejme rovnovážne orientovaným grafom.

Pod *ohodnotením grafu* (orientovaného alebo neorientovaného) rozumie sa zobrazenie γ množiny hrán grafu do istej množiny čísel. Každej hrane grafu je v tomto zobrazení priradené číslo, ktoré sa nazýva *hodnotou hrany* v danom grafe. V práci budeme sa zaoberať len takými ohodnoteniami grafu, pri ktorých hrana grafu môže mať len hodnotu 1, 0, -1. Každému takémuto ohodnoteniu γ orientovaného grafu $\vec{G}$ možno priradiť orientovaný graf $\gamma(\vec{G})$ takto: Graf $\gamma(\vec{G})$ obsahuje práve tie hrany z $\vec{G}$, ktoré majú nenulovú hodnotu a obsahuje všetky uzly a len tie uzly z $\vec{G}$, ktoré sú s takýmito hranami incidentné, pričom hrany majúce v ohodnotení γ hodnotu 1 (resp. -1) majú tú istú (resp. opačnú) orientáciu v grafoch $\vec{G}$, $\gamma(\vec{G})$. Ak by platilo $\gamma(h) = 0$ pre všetky $h \in \vec{G}$, potom $\gamma(\vec{G})$ je nulový graf. Ak platí $\gamma(h) = 1$ pre všetky $h \in \vec{G}$, potom je $\vec{G} = \gamma(\vec{G})$; ak žiadna z hrán grafu $\vec{G}$ nemá hodnotu -1, potom $\gamma(\vec{G})$ je podgraf grafu $\vec{G}$.

Definujme si teraz násobenie ohodnotení γ_1, γ_2 takto: Ohodnotenie γ_3 grafu je súčinom ohodnotení γ_1, γ_2 (písané $\gamma_3 = \gamma_1 \cdot \gamma_2$), ak pre ľubovoľnú hranu h grafu platí: $\gamma_1(h) + \gamma_2(h) \equiv \gamma_3(h) \pmod 3$; $\gamma_3(h) \in \{-1, 0, 1\}$. Násobenie ohodnotení je zrejme komutatívne a asociatívne. Systém všetkých rôznych ohodnotení ľubovoľného nenulového grafu pri takto definovanom násobení je abelovská grupa o 3^m prvkoch (kde m je počet hrán grafu).

2

O rovnovážne orientovaných grafoch sú známe vety:[1])

Lemma 1. *V orientovanom grafe $\vec{G}$ existuje kontinuitne orientovaná eulerovská čiara práve vtedy, keď $\vec{G}$ je súvislý rovnovážne orientovaný graf.*

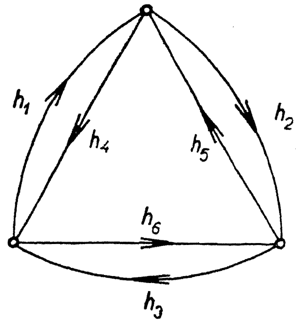
Lemma 2. *Pre orientovaný graf $\vec{G}$ existuje taký systém $\mathfrak{S} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_p\}$ jeho cyklov, že ľubovoľná hrana z $\vec{G}$ je hranou práve jedného cyklu systému $\mathfrak{S}$ práve vtedy, keď $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf.*

Poznámka 2. Dva rôzne systémy cyklov toho istého rovnovážne orientovaného grafu s vlastnosťami požadovanými v lemme 2 nemusia byť kvantitatívne ekvivalentné. Tak napr. v grafe znázornenom na obrázku 1 existujú systémy

[1]) Nasledujúce lemmy 1, 2, $\bar{1}$, $\bar{2}$, 3, na ktoré v práci nadväzujeme, sú uvedené napr. v Königovej knihe [2]. Uvádzame ich sústredene a v plnom znení v záujme prehľadnosti a pohodlia čitateľa, ako aj preto, že sa javilo potrebným preformulovať ich do našej terminologie.

$\mathfrak{S} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2\}$; $\mathfrak{S}^* = \{\vec{K}_1^*, \vec{K}_2^*, \vec{K}_3^*\}$ cyklov (kde $\vec{K}_1$ obsahuje hrany h_1, h_2, h_3; $\vec{K}_2$ hrany h_4, h_5, h_6 a kde hrany h_1, h_4 patria do $\vec{K}_1^*$, hrany h_2, h_5 do $\vec{K}_2^*$, hrany h_3, h_6 do $\vec{K}_3^*$), ktoré majú vlastnosti požadované lemmou 2, ale ktoré nemajú rovnaký počet prvkov.

Uvedené vety poukazujú na isté analogie medzi eulerovskými neorientovanými grafmi a rovnovážne orientovanými grafmi. Lemmám 1 a 2 odpovedajú totiž tieto známe vety o neorientovaných grafoch.



Obr. 1

Lemma $\bar{1}$. *V neorientovanom grafe G existuje eulerovská čiara práve vtedy, keď G je súvislý eulerovský graf.*

Lemma $\bar{2}$. *Pre neorientovaný graf G existuje taký systém $\mathfrak{S} = \{K_1, K_2, \ldots, K_p\}$ jeho kružníc, že ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednej kružnice systému $\mathfrak{S}$ práve vtedy, keď G je eulerovský graf.*

Úzky vzťah medzi eulerovskými neorientovanými grafmi a rovnovážne orientovanými grafmi zvýrazňuje aj táto známa veta (pozri [2], str. 30):

Lemma 3. *Hrany neorientovaného grafu G možno orientovať tak, aby z grafu G vznikol rovnovážne orientovaný graf $\vec{G}$ práve vtedy, keď G je eulerovský graf.*

V uvedenej lemme ba ani v celej práci [2] nerieši sa otázka, koľkými spôsobmi možno eulerovský graf orientovať tak, aby vznikol rovnovážne orientovaný graf.[2]) Zaveďme toto označenie: $\varrho(G)$ bude znamenať počet rôznych takých rovnovážne orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou všetkých hrán grafu G. Odvoďme si vety, ktoré sa týkajú nadhodenej otázky.

Veta 1. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $G_1, G_2, \ldots, G_k$ nech sú jednotlivé jeho komponenty; potom platí:*

$$\varrho(G) = \varrho(G_1) \cdot \varrho(G_2) \ldots \varrho(G_k)\,.$$

Dôkaz je zrejmý.

Veta 2. *Nech G je ľubovoľný súvislý eulerovský graf, $G_1, G_2, \ldots, G_c$ nech sú jeho jednotlivé členy; potom platí:*

$$\varrho(G) = \varrho(G_1) \cdot \varrho(G_2) \ldots \varrho(G_c)\,.$$

Dôkaz. Ak G obsahuje jediný člen (tj. ak je $c = 1$), netreba nič dokazovať. Predpokladajme, že $c > 1$, tj. že G obsahuje aspoň jednu artikuláciu. Nech u je ľubovoľná artikulácia grafu G a nech u patrí do týchto a len týchto členov $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_x}$ $(1 < b \leqq c)$ grafu G.

Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný taký rovnovážne orientovaný graf, ktorý vznikne orientáciou všetkých hrán grafu G (člen G_{i_x} z grafu G stane sa tak orientova-

[2]) Túto úlohu si totiž König v svojej práci ani nevytyčuje.

ným podgrafom $\vec{G}_{i_x}$ grafu $\vec{G}$). Tvrdím: Uzol u je rovnovážny v ľubovolnom z členov $\vec{G}_{i_x}$ ($i = 1, 2, \ldots, b$). Dokážme to. Pretože $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf, existuje podľa lemmy 2 taký systém $\mathfrak{S} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_p\}$ cyklov grafu $\vec{G}$, že ľubovoľná hrana z $\vec{G}$ je hranou práve jednoho cyklu z $\mathfrak{S}$. Také dve hrany ľubovoľného cyklu z $\mathfrak{S}$, ktoré sú incidentné s tým istým uzlom cyklu, patria zrejme do toho istého člena grafu $\vec{G}$. Teda množinu hrán incidentných s uzlom u a patriacich do $\vec{G}_{i_x}$ možno rozdeliť na istý počet t_x dvojíc hrán tak, že každá hrana množiny bude patriť práve do jednej dvojice a obe hrany dvojice patria do toho istého cyklu systému $\mathfrak{S}$. Z toho ihneď vyplýva, že práve t_x hrán množiny smeruje do uzla u a rovnaký počet hrán množiny smeruje v grafe $\vec{G}_{i_x}$ z uzla u. Preto u je rovnovážnym uzlom v $\vec{G}_{i_x}$. To však platí o ľubovoľnom uzle z $\vec{G}_{i_x}$, čiže: $\vec{G}_{i_x}$ je rovnovážne orientovaný graf, čo dokazuje naše tvrdenie.

V každom rovnovážne orientovanom grafe $\vec{G}$ má podľa predošlého rovnovážnu orientáciu každý jeho člen. Platí však zrejmě aj obrátene: ak v grafe $\vec{G}$ má každý z jeho členov rovnovážnu orientáciu, potom $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf. Z uvedeného vyplýva ihneď tvrdenie vety.

Veta 3. *Nech G_1, G_2 sú dva homoeomorfné súvislé eulerovské grafy, potom platí $\varrho(G_1) = \varrho(G_2)$.*

Dôkaz. Ak istú hranu h smerujúcu v rovnovážne orientovanom grafe $\vec{G}_1$ (ktorý vznikne z G_1 vhodnou orientáciou jeho hrán) z uzla u do uzla v „rozpolíme", tj. nahradíme ju hranami h', h'' a uzlom w (a to tak, že h' smeruje z uzla u do uzla w a hrana h'' smeruje z uzla w do uzla v), dostaneme istý graf $\vec{G}_1'$, ktorý je rovnovážne orientovaný, a príslušné neorientované grafy G_1, G_1' sú homoeomorfné. Je zrejmé, že graf G_1' je možné jediným spôsobom orientovať tak, že všetky hrany z G_1 až na rozpolenú hranu h majú tú istú orientáciu v $\vec{G}_1'$, ako v $\vec{G}_1$ a $\vec{G}_1'$ je pritom rovnovážne orientovaný graf. Obrátene: Ak dvojicu hrán h', h'' a uzol druhého stupňa w, ktorý je s nimi incidentný, máme nahradiť jedinou hranou tak, aby z rovnovážne orientovaného grafu vznikol opäť rovnovážne orientovaný graf (pričom orientácia spoločných hrán je v oboch grafoch rovnaká), je možné to urobiť jediným spôsobom. Možno preto každému rovnovážne orientovanému grafu $\vec{G}_1$ priradiť práve jeden rovnovážne orientovaný graf $\vec{G}_2$, pričom rôzne orientovaným grafom $\vec{G}_1(1)$, $\vec{G}_1(2)$ budú odpovedať rôzne orientované grafy $\vec{G}_2(1)$, $\vec{G}_2(2)$ a platí teda $\varrho(G_1) = \varrho(G_2)$, čo bolo treba dokázať.

Uveďme si ešte ďalšie dve vety týkajúce sa základných vlastností rovnovážne orientovaných grafov.

Veta 4. *Nech $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú dva iba orientáciou hrán sa líšiace rovnovážne orientované grafy, ktoré vzniknú orientáciou všetkých hrán istého eulerovského grafu G. Označme znakom $\vec{G}_3$ podgraf grafu $\vec{G}_1$, ktorý obsahuje tie hrany a len tie hrany z $\vec{G}_1$ (a v rovnakej orientácii ako v $\vec{G}_1$), ktoré majú inú orientáciu v $\vec{G}_2$ než v $\vec{G}_1$ a obsahuje okrem toho už len uzly z $\vec{G}_1$ incidentné s týmito hranami. O grafe $\vec{G}_3$ potom platí: $\vec{G}_3$ je rovnovážne orientovaný graf.*

Dôkaz. Pretože podľa predpokladu $\vec{G}_1 \neq \vec{G}_2$, je G_3 nenulový graf. Vzhľadom na spôsob, akým sme definovali $\vec{G}_3$, nemôže $\vec{G}_3$ obsahovať izolovaný uzol.

Nech u je ľubovoľný uzol z $\vec{G}_3$. Nech $2s$ je stupeň uzla u v grafe G a nech p (resp. q) je počet tých hrán incidentných s uzlom u, ktoré aj v grafe $\vec{G}_1$ aj v grafe $\vec{G}_2$ smerujú do uzla u (resp. z uzla u). Označme znakom $\bar{p}$ (resp. $\bar{q}$) počet tých hrán, ktoré v $\vec{G}_1$ (resp. v $\vec{G}_2$) smerujú do uzla u, ale v grafe $\vec{G}_2$ (resp. v grafe $\vec{G}_1$) smerujú z uzla u. Pretože oba grafy $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú podľa predpokladu rovnovážne orientované, platí: $p + \bar{p} = s$; $q + \bar{q} = s$; $p + \bar{q} = s$; $\bar{p} + q = s$. Z toho ihneď vyplýva, že je $\bar{p} = \bar{q}$, čo značí, že uzol u je v rovnováhe v grafe $\vec{G}_3$, a pretože u bol ľubovoľný uzol grafu $\vec{G}_3$, je $\vec{G}_3$ rovnovážne orientovaný graf. Dôkaz je vykonaný.

Veta 5. *Nech $\vec{G}_1$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný graf, $\vec{G}_0$ nech je ľubovoľný taký jeho podgraf, ktorý je tiež rovnovážne orientovaný. Ak zmeníme orientáciu hrán z $\vec{G}_0$ a orientáciu ostatných hrán z $\vec{G}_1$ ponecháme bez zmeny, vznikne tak z grafu $\vec{G}_1$ graf $\vec{G}_2$, ktorý je rovnovážne orientovaný.*

Dôkaz je zrejmý z dôkazu vety 4.

Prv než odvodíme ďalšie vety umožňujúce výpočet čísla $\varrho(G)$, definujme niektoré nové pojmy a zoznámime sa s niektorými ich vlastnosťami.

Nech G je ľubovoľný eulerovský graf a nech postupnosť $u_1, h_{1,2}, u_2, h_{2,3}, \ldots, u_m, h_{m,m+1}, u_{m+1}$ prvkov z G (kde u_x sú uzly, $h_{x,x+1}$ sú hrany a hrana $h_{x,x+1}$ spojuje uzly u_x, u_{x+1}) popisuje istý uzavretý ťah T (tj. platí $u_{m+1} = u_1$) v grafe G. Trojici prvkov $h_{x-1,x}, u_x, h_{x,x+1}$ (kde x je ľubovolné číslo z $\{1, 2, \ldots, m\}$; kladieme $h_{0,1} = h_{m,m+1}$) ťahu T budeme hovoriť *prechod ťahu T cez uhol u_x*. Poznamenajme, že prechodov cez istý uzol z G môže byť v ťahu T prípadne aj viac než jeden (v postupnosti popisujúcej ťah T môže byť $u_x = u_y$ aj keď $x \neq y$); je však zrejmé toto: Ak $\{h_{x-1,x}, u_x, h_{x,x+1}\}$, $\{h_{y-1,y}, u_y, h_{y,y+1}\}$ sú dva rôzne prechody cez ten istý uzol $u_x = u_y$ a to v tom istom ťahu T, potom tieto dva prechody nemajú spoločnú hranu (ináč by takáto spoločná hrana spojovala uzol u_x s uzlom u_y, kde $u_x = u_y$; čo nie je možné). Nech $\mathfrak{S} = \{T_1, T_2, \ldots T_m\}$ je ľubovoľný taký systém uzavretých ťahov, ktorý má túto vlastnosť: Ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednoho ťahu systému $\mathfrak{S}$. Nechť v je ľubovoľný uzol z G, h ľubovoľná hrana incidentná s uzlom v. Hrana h nech patrí do T_i. Podľa predošlého existuje práve jeden prechod v ťahu T_i cez uzol v, ktorý obsahuje hranu h; nech h' je druhá hrana, ktorá patrí do tohoto prechodu. Žiadna iná hrana než hrana h' sa nevyskytuje v prechode cez uzol v spolu s hranou h ani v ťahu T_i a prirodzene ani v žiadnom inom ťahu systému $\mathfrak{S}$. Preto systému $\mathfrak{S}$ odpovedá jednoznačne rozklad množiny hrán incidentných s uzlom v na také dvojice hrán, že hrany dvojice a len hrany dvojice patria do toho istého prechodu cez uhol v v ťahu z $\mathfrak{S}$. Uzol v bol ľubovoľný uzol grafu G. Preto systému $\mathfrak{S}$ odpovedá v horeuvedenom zmysle istý systém $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ rozkladov množín hrán incidentných s jednotlivými uzlami grafu G na také dvojice hrán, ktoré s príslušným uzlom tvoria prechod v ťahu systému $\mathfrak{S}$.

Nech $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je množina uzlov z G. Označme znakom H_i množinu hrán z G incidentných s uzlom v_i a znakom R_i ľubovoľný rozklad množiny H_i na triedy po dvoch hranách. Snadno sa presvedčíme, že systému $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ odpovedá práve jeden taký systém uzavretých ťahov $\mathfrak{S} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$, že platí $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ a $\mathfrak{S}$ má opäť tú vlastnosť, že ľubovoľná hrana z G je hranou práve jedného ťahu z $\mathfrak{S}$. Jednotlivé ťahy systému $\mathfrak{R}$ pri danom systéme $\overline{\mathfrak{R}} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ možno totiž najsť takto: Cestujme po prvkoch z G tak, že výjdeme z istého uzla w_1 po niektorej hrane $g_{1,2}$ s ním incidentnej; dostaneme sa tak do istého uzla ω_2. Ďalej cestujme po tej hrane (označme ju $g_{2,3}$), ktorá s hranou $g_{1,2}$ tvorí dvojicu v rozklade R_x zo systému $\overline{\mathfrak{R}}$. Dostaneme sa tak do istého uzla w_3. Pri tomto cestovaní po konečnom počte krokov dostaneme sa napokon do uzla w_1 tak, že by bolo treba — pri dodržaní pravidla, že z ľubovoľného uzla pokračujeme v ceste po tej hrane, ktorá s hranou po ktorej sme prišli do uvažovaného uzla tvorí dvojicu v príslušnom rozklade — pokračovať v cestovaní po hrane $g_{1,2}$. Je zrejmé, že postupnosť prvkov z G usporiadaných tak, ako sme pri cestovaní cez ne prechádzali, popisuje istý uzavretý ťah, ktorý má túto vlastnosť: Hrany ľubovoľného prechodu cez ľubovoľný uzol v_i tvoria dvojicu z R_i. Ak popísané cestovanie opakujeme s tým, že pri ďalšom cestovaní prvá precestovaná hrana nepatrí do žiadneho z ťahov, ktoré sme precestovali v predchádzajúcich cestovaniach, dostaneme napokon — pretože náš postup sa musí zastaviť tým, že už všetky hrany z G budú precestované — istý systém uzavretých ťahov $\mathfrak{S}$, ktorý má všetky požadované vlastnosti, a platí $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) = \overline{\mathfrak{R}}$.

Teda každému systému rozkladov $\overline{\mathfrak{R}}$ odpovedá práve jeden systém uzavretých ťahov $\mathfrak{S}$ a každému systému uzavretých ťahov $\mathfrak{S}$ odpovedá práve jeden systém $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ rozkladov množín hrán incidentných s jednotlivými uzlami grafu G na triedy po dvoch hranách. (Dva systémy uzavretých ťahov s požadovanými vlastnosťami považujeme pritom za rovnaké práve vtedy, keď systémy ich prechodov sú rovnaké.) Výsledky vykonaných úvah možno zhrnúť do tejto vety:

Veta 6. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ množina jeho uzlov a nech H_i je množina hrán z G incidentných s uzlom u_i. Označme znakom $\mu(G)$ počet rôznych systémov uzavretých ťahov grafu G, ktoré majú túto vlastnosť: Ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednoho uzavretého ťahu systému. Označme ďalej znakom $\nu(G)$ počet rôznych systémov $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, kde R_i je rozklad množiny H_i na triedy po dvoch hranách. Platí: $\mu(G) = \nu(G)$.*

Dôkaz je zrejmý z vykonaných úvah.

Počet $\mu(G)$ z vety 6 sa dá snadno určiť, ak poznáme stupeň každého z uzlov grafu G. O tom hovorí táto veta:

Veta 7. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ množina jeho uzlov a nech $2s_i$ je stupeň uzla u_i v grafe G. O počte $\mu(G)$ z predošlej vety platí*

$$\mu(G) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(2s_i)!}{s_i!\, 2^{s_i}} = \frac{1}{2^m} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2s_i)!}{s_i!}$$

(kde m je počet hrán grafu G).

Dôkaz. Nech u_i je ľubovoľný uzol z G a nech H_i je množina hrán z G incidentných s uzlom u_i; počet jej prvkov nech je $2s_i$. Rôznych rozkladov množiny H_i na triedy po dvoch hranách je zrejme

$$1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2s_i - 1) = \frac{(2s_i)!}{2^{s_i} \,.\, s_i!}\,.$$

Pretože rozklady $R_1, R_2, \ldots, R_n$ možno voliť nezávisle jeden od druhého, existuje celkom práve

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(2s_i)!}{2^{s_i} \,.\, s_i!}$$

rôznych možností pre systém $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ s požadovanými vlastnosťami. Pretože súčet stupňov všetkých uzlov grafu rovná sa vždy dvojnásobku počtu jeho hrán, je $\sum_{i=1}^{n} s_i = m$, z čoho ihneď vyplýva tvrdenie vety.

Definujme si pojem *rozštepenia uzla* podľa rozkladu množiny hrán s ním incidentných: Nech G je ľubovoľný graf, v ľubovoľný jeho uzol, $H(v)$ množina hrán z G incidentných s uzlom v a $R_v = \{H_1, H_2, \ldots, H_s\}$ ľubovoľný rozklad množiny $H(v)$. Budeme hovoriť, že graf G_{R_v} vznikne z grafu G *rozštepením uzla v podľa rozkladu R_v*, ak o grafe G_{R_v} platí: (1) G_{R_v} obsahuje všetky hrany a len hrany z G; (2) G_{R_v} obsahuje všetky uzly z G s výnimkou uzla v a okrem toho obsahuje už len isté uzly $v_1, v_2, \ldots, v_s$; (3) ľubovoľný uzol v_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ je incidentný s hranami a len s hranami množiny H_i rozkladu R_v; incidencia ostatných dvojíc prvkov (rôzneho rozmeru) grafu G zostáva nezmenená aj v grafe G_{R_v}.

Veta 8. *Nech $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je množina uzlov ľubovoľného eulerovského grafu G; R_i nech je ľubovoľný rozklad množiny hrán incidentných s uzlom $u_i \in U$ na triedy po dvoch hranách. Nech ďalej $\mathfrak{S} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ je systému $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ odpovedajúci systém uzavretých ťahov grafu G, o ktorom platí: ľubovoľná hrana z G patrí práve do jednoho ťahu z $\mathfrak{S}$. Utvorme postupnosť grafov $G_1, G_2, \ldots, G_n$ takto: Graf G_i vznikne z grafu G_{i-1} rozštepením uzla u_i podľa rozkladu $R_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n$; kladieme $G_0 = G)$. O grafe G_n potom platí:*

(a) *graf G_n obsahuje práve m komponent;*

(b) *ľubovoľná komponenta grafu G_n je kružnica;*

(c) *ľubovoľná komponenta z G_n obsahuje všetky hrany a len hrany patriace do istého ťahu z $\mathfrak{S}$ a ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednej komponenty grafu G_n.*

Dôkaz. Ak rozštepíme všetky uzly grafu G (aby tak vznikol graf G_n), ľubovoľný prechod cez ľubovoľný uzol v ľubovoľnom ťahu z $\mathfrak{S}$ zmení sa len tak, že pôvodný uzol z G je nahradený istým uzlom druhého stupňa v grafe G_n. Preto dve hrany z G patriace do toho istého ťahu $T_i \in \mathfrak{S}$ sú hranami tej istej komponenty (označme ju K_i) grafu G_n. Potom ale K_i je súvislým pravidelným grafom druhého stupňa, čiže K_i je kružnica a to taká kružnica, ktorá obsahuje všetky hrany a len hrany ťahu T_i. Z toho ihneď vyplýva správnosť všetkých tvrdení vety.

Veta 9. *Nech G je ľubovoľný eulerovský graf, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = U$ množina jeho uzlov a nech uzol u_i je uzlom $2s_i$-teho stupňa v grafe G. Nech $\overline{\mathfrak{S}} = \{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{\mu(G)}\}$ je množina všetkých takých systémov uzavretých ťahov grafu G, ktoré majú túto vlastnosť: ľubovoľná hrana z G je hranou práve jednoho ťahu systému. Označme znakom τ_j ($j = 1, 2, \ldots, \mu(G)$) počet ťahov systému $\mathfrak{S}_j$. O počte $\varrho(G)$ rôznych takých orientácií hrán grafu G, pri ktorých vznikne z grafu G rovnovážne orientovaný graf, platí*

$$\varrho(G) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (s_i!)} \cdot \sum_{j=1}^{\mu(G)} 2^{\tau_j} .$$

Dôkaz. Označme znakom $\delta(G)$ počet tých uzlov z G, ktoré sú vyššieho stupňa než druhého stupňa. Ak G obsahuje $\varkappa$ komponent a každá z komponent je kružnicou (a teda uzavretým ťahom), tj. ak je $\delta(G) = 0$, potom zrejme platí $\mu(G) = 1$, čiže potom existuje jediný systém $\mathfrak{S}_1 \in \overline{\mathfrak{S}}$ s $\varkappa = \tau_1$ ťahmi. Pretože ľubovoľnú kružnicu možno práve dvoma spôsobmi orientovať tak, aby vznikol rovnovážne orientovaný graf (cyklus), možno graf G orientovať práve $2^\varkappa$ rôznymi spôsobmi tak, že vznikne rovnovážne orientovaný graf. Čiže v uvažovanom prípade je $\varrho(G) = 2^\varkappa$. Je pritom zrejme $s_i = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ a teda $2^\varkappa = \varrho(G) = 2^{\tau_1}$. Ak teda je $\delta(G) = 0$, veta platí.

Predpokladajme, že veta platí pre všetky také eulerovské grafy G', v ktorých je $\delta(G') \leqq k$ (kde k je isté celé nezáporné číslo), a predpokladajme, že je $\delta(G) = k + 1$. Potom G obsahuje aspoň jeden uzol u_x taký, že je $s_x > 1$. Počet rôznych rozkladov množiny hrán H_x incidentných s uzlom u_x na triedy po dvoch hranách je $1 . 3 . 5 \ldots (2s_x - 1) = p$. Nech $\mathfrak{R}_x = \{R_x(1), R_x(2), \ldots, R_x(p)\}$ je systém všetkých takýchto rozkladov. Označme znakom $G_x(y)$ graf, ktorý vznikne z grafu G rozštepením uzla u_x podľa rozkladu $R_x(y)$ ($y \in \{1, 2, \ldots, p\}$). O ľubovoľnom z grafov $G_x(y)$ platí zrejme $\delta(G_x(y)) = k$.

Označme znakom $\overline{\mathfrak{S}}_x(y)$ tú podmnožinu množiny $\overline{\mathfrak{S}}$, ktorá odpovedá systému takých rozkladov $\{R_1, R_2, \ldots, R_{x-1}, R_x(y), R_{x+1}, \ldots, R_n\}$, kde R_i pri $i \neq x$ je ľubovoľný rozklad množiny hrán incidentných s uzlom u_i na triedy hrán po dvoch hranách, avšak rozklad $R_x(y)$ je pevný; je to rozklad, podľa ktorého sme previedli rozštepenie uzla u_x, aby tak vznikol graf $G_x(y)$. Množiny $\overline{\mathfrak{S}}_x(y_1)$, $\overline{\mathfrak{S}}_x(y_2)$ sú pri rôznych y_1, y_2 zrejme disjunktné. Označme znakom A_y množinu tých indexov z $\{1, 2, \ldots, \mu(G)\}$, ktoré patria tým systémom uzavretých ťahov množiny $\overline{\mathfrak{S}}$; ktoré sú tiež prvkami množiny $\overline{\mathfrak{S}}_x(y)$. Podľa predpokladu (pretože je $\delta(G_x(y)) = k$ a uzly, ktoré vzniknú rozštepením uzla u_x, sú všetky druhého stupňa) platí

$$\varrho(G_x(y)) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq x}} (s_i!)} \cdot \sum_{j \in A} 2^{\tau_j} .$$

Máme teda dokázať, že za prijatých predpokladov platí

$$\varrho(G) = \frac{1}{s_x!} [\varrho(G_x(1)) + \varrho(G_x(2)) + \ldots + \varrho(G_x(p))] .$$

Je zrejmé toto: Nech y je ľubovoľné číslo $\epsilon \{1, 2, \ldots, p\}$ a $\vec{G}_x(y)$ nech je ľubovoľný rovnovážne orientovaný graf, ktorý vznikne orientáciou hrán grafu $G_x(y)$; ak graf $\vec{G}$ vznikne z grafu G takou orientáciou hrán z G, akú majú tieto hrany v grafe $\vec{G}_x(y)$, potom $\vec{G}$ je rovnovážne orientovaný graf.

Nech teraz $\mathfrak{G}$ je množina všetkých rovnovážne orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou hrán grafu G. Rozložme množinu $\mathfrak{G}$ na triedy $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots,$ $_r$ $\left(\text{kde } r = \binom{2s_x}{s_x}\right)$ takto: Do tej istej triedy $\mathfrak{G}_i$ patria dva orientované grafy z $\mathfrak{G}$ práve vtedy, keď množina tých hrán, ktoré smerujú do uzla u_x, je v oboch grafoch rovnaká. Označme znakom γ_i počet prvkov triedy $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

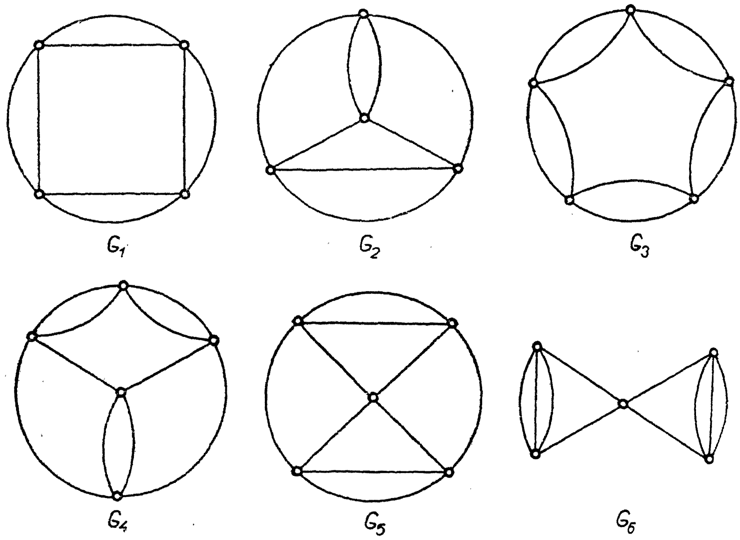
O čísle $\varrho(G_x(j))$ platí $\varrho(G_x(j)) = \sum\limits_{i \in M_j} \gamma_i$, pričom M_j je množina tých indexov z $\{1, 2, \ldots, r\}$, pre ktoré má trieda $\mathfrak{G}_j$ túto vlastnosť: Z každej dvojice hrán rozkladu $R_x(y) \in \mathfrak{R}_x$ práve jedna hrana v ľubovoľnom grafe z $\mathfrak{G}_j$ smeruje do uzla u_x. Počet prvkov množiny M_j je zrejme práve 2^{s_x}, lebo z s_x dvojíc možno previesť výber po jednej hrane práve 2^{s_x} rôznymi spôsobmi. Na druhej strane ľubovoľný index $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ má túto vlastnosť: Index i patrí do práve $s_x!$ rôznych množín M_j (to vyplýva z toho, že pri danom rozklade množiny H_x na triedu hrán smerujúcich do uzla u_x resp. smerujúcich z uzla u_x možno previesť rozklad množiny H_x na triedy po dvoch hranách — tak, aby jedna hrana dvojice smerovala do uzla u_x a druhá hrana dvojice z uzla u_x — práve $s_x!$ rôznymi spôsobmi. Z uvedeného vyplýva ihneď toto:

$$\sum_{j=1}^{p} \varrho(G_x(j)) = s_x! \, \varrho(G) ,$$

čo bolo potrebné dokázať. Ak teda veta platí pre $\delta(G) \leqq k$, platí aj pre $\delta(G) = k + 1$, a pretože platí pro $\delta(G) = 0$, platí pre všetky prirodzené k. Tým je dôkaz vety vykonaný.

Poznámka 3. Vo vete 9 sme sa neobmedzili jen na grafy súvislé resp. len na grafy bez artikulácií, k čomu by nás skutočnosť, že máme už odvodené vety 1, 2, 3, oprávňovala. Význam týchto viet sa odvodením vety 9 nezmenšuje, lebo pri konkrétnom výpočte čísla $\varrho(G)$ dávajú uvedené vety možnosť postup výpočtu podstatne skrátiť.

Poznámka 4. Čísla $\varrho(G_1)$, $\varrho(G_2)$ môžu byť rôzne aj vtedy, keď eulerovské grafy G_1, G_2 sú oba súvislé pravidelné grafy toho istého (párneho) stupňa a majú rovnaký počet uzlov.



Obr. 2

Tak napr. o grafoch G_1, G_2 znázornených na obr. 2 platí: $\varrho(G_1) = 18$; $\varrho(G_2) = 16$, ačkoľvek oba tieto grafy sú súvislé pravidelné grafy štvrtého stupňa so štyrmi uzlami. Podobne je: $\varrho(G_3) = 34$; $\varrho(G_4) = 28$; $\varrho(G_5) = 26$; $\varrho(G_6) = 36$, ačkoľvek grafy G_3, G_4, G_5, G_6 sú všetky súvislé pravidelné grafy štvrtého stupňa s piatimi uzlami.

3

Položme si teraz túto otázku: Koľko rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov existuje v danom rovnovážne orientovanom grafe? Na túto otázku, ktorá — ako ukážeme — s predošlými otázkami úzko súvisí, odpovedá nasledujúca veta:

Veta 10. *Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný graf, ktorý vznikne orientáciou hrán istého eulerovského grafu G. Počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ rovná sa $\varrho(G) - 1$.*

Dôkaz. Nech $\mathfrak{G} = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_n\}$ je systém obsahujúci okrem všetkých rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ už len nulový graf $\vec{G}_1 = N$

a nech $\mathfrak{F} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m\}$ je systém všetkých rovnovážne orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou hrán grafu G. Pre isté $x \in \{2, 3, \ldots, n\}$ platí $\vec{G}_x = G$. Podľa viet 4 a 5 možno každému grafu $\vec{G}_y \in \mathfrak{S}$ priradiť práve jeden graf $\in \mathfrak{F}$ takto: Grafu $\vec{G}_y$ priraďme ten graf $\in \mathfrak{F}$, ktorý vznikne z grafu $\vec{G}_x$, ak v ňom zmeníme orientáciu hrán patriacich do $\vec{G}_y$ a orientáciu ostatných jeho hrán ponecháme nezmenenú (grafu $\vec{G}_1 = N$ a len tomuto grafu odpovedá potom v tomto priradení graf $\vec{G}_x = \vec{G}_z \in \mathfrak{F}$). Obrátene: Ľubovoľnému grafu z $\mathfrak{F}$ možno priradiť práve jeden graf z $\mathfrak{S}$ takto: Grafu $\vec{F}_t \in \mathfrak{F}$ priradíme podgraf grafu $\vec{G}_x = \vec{F}_z$, ktorý pozostáva práve z tých hrán, ktoré majú rôznu orientáciu v grafoch $\vec{F}_t$, $\vec{F}_z$ a z tých uzlov, ktoré sú s takýmito hranami incidentné. Z toho vyplýva, že systémy $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ sú kvantitatívne ekvivalentné, čiže je $m = n$. Pretože do $\mathfrak{S}$ sme zahrnuli aj nulový graf a je $n = m = \varrho(G)$, počet nenulových rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ rovná sa $\varrho(G) - 1$. Dôkaz vety je vykonaný.

Poznámka 5. Ak by sme nulový graf N považovali za rovnovážne orientovaný podgraf ľubovoľného orientovaného grafu, potom by číslo $\varrho(G)$ udávalo priamo počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$.

Rovnovážne orientované podgrafy môžu prirodzene existovať aj v takom orientovanom grafe, ktorý nie je rovnovážne orientovaný. Pri skúmaní takýchto orientovaných grafov môžu byť užitočné nasledujúce vety.

Veta 11. *Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný taký orientovaný graf, v ktorom existujú aspoň dva rozne rovnovážne orientované podgrafy $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$. Označme znakom γ_1 (resp. γ_2) také ohodnotenie grafu $\vec{G}$, že platí $\gamma_1(\vec{G}) = \vec{G}_1$ (resp. $\gamma_2(\vec{G}) = \vec{G}_2$), a položme $\gamma_3 = \gamma_1^2 \cdot \gamma_2$; $\gamma_4 = \gamma_1 \cdot \gamma_2^2$. Platí: Grafy $\gamma_3(\vec{G})$, $\gamma_4(\vec{G})$ sú rovnovážne orientované grafy.*

Dôkaz. Nech h je ľubovoľná hrana z $\vec{G}$. Ak h nepatrí ani do $\vec{G}_1$ ani do $\vec{G}_2$, je $\gamma_1(h) = 0$, $\gamma_2(h) = 0$ a je tiež $\gamma_3(h) = \gamma_4(h) = 0$, tj. hrana h nepatrí ani do $\gamma_3(\vec{G})$ ani do $\gamma_4(\vec{G})$. Ak hrana h patrí do oboch grafov $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, potom je $\gamma_1(h) = \gamma_2(h)$, a pretože je nutne $\gamma_1^3(h) = 0$ pre ľubovoľné h, platí: $\gamma_3(h) = \gamma_4(h) = 0$; teda h aj v tomto prípade nepatrí ani do $\gamma_3(\vec{G})$ ani do $\gamma_4(\vec{G})$. Ak napokon h patrí do $\vec{G}_1$ a nepatrí do $\vec{G}_2$ (resp. ak h nepatrí do $\vec{G}_1$ a patrí do $\vec{G}_2$), potom je $\gamma_3(h) = -\gamma_1(h) \neq 0$; $\gamma_4(h) = \gamma_1(h) \neq 0$ (resp. $\gamma_3(h) = \gamma_1(h) \neq 0$; $\gamma_4(h) = -\gamma_1(h) \neq 0$). Pretože $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú podľa predpokladu dva rôzne podgrafy grafu $\vec{G}$, je aj graf $\gamma_3(\vec{G})$ aj graf $\gamma_4(\vec{G})$ nenulovým grafom a podľa predošlého obsahujú oba tieto grafy rovnaké prvky. Ľubovoľná ich hrana má však opačnú orientáciu v $\gamma_4(\vec{G})$ než v $\gamma_3(\vec{G})$. Ak preto vykonáme dôkaz, že $\gamma_3(\vec{G})$ je rovnovážne orientovaný graf, bude tým súčasne dokázané, že $\gamma_4(\vec{G})$ je rovnovážne orientovaný graf.

Vykonajme tento dôkaz: Nech u je ľubovoľný uzol z $\gamma_3(\vec{G})$. Označme znakom $\mu_1(u)$ (resp. $\mu_2(u)$ resp. $\mu_{1,2}(u)$) počet tých hrán z $\vec{G}$ smerujúcich do uzla u, ktoré patria do $\vec{G}_1$ a nepatria do $\vec{G}_2$ (resp. patria do $\vec{G}_2$ a nepatria do $\vec{G}_1$ resp.

patria aj do $\vec{G}_1$ aj do $\vec{G}_2$) a znakom $\nu_1(u)$ (resp. $\nu_2(u)$ resp. $\nu_{1,2}(u)$) označme obdobne počet hrán smerujúcich z uzla u. Pretože $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ sú podľa predpokladu rovnovážne orientované grafy, platí nutne

$$\mu_1(u) + \mu_{1,2}(u) = \nu_1(u) + \nu_{1,2}(u)\,, \quad \mu_2(u) + \mu_{1,2}(u) = \nu_2(u) + \nu_{1,2}(u)\,,$$

a teda

$$\mu_1(u) - \mu_2(u) = \nu_1(u) - \nu_2(u)\,.$$

V grafe $\gamma_3(\vec{G})$ smerujú do uzla u tie hrany a len tie hrany, ktoré v grafe $\vec{G}_1$ smerujú z uzla u a nepatria do $\vec{G}_2$, a tie hrany, ktoré v $\vec{G}_2$ smerujú do uzla u a nepatria do $\vec{G}_1$ (počet takých hrán, ktoré smerujú v $\gamma_3(\vec{G})$ do uzla u je spolu $\nu_1(u) + \mu_2(u)$ a z uzla u smerujú v grafe $\gamma_3(\vec{G})$ tie hrany a len tie hrany, ktoré v $\vec{G}_1$ smerujú do u a nepatria do $\vec{G}_2$ a tie hrany, ktoré v $\vec{G}_2$ smerujú z uzla u a nepatria do $\vec{G}_1$ (počet hrán smerujúcich v grafe $\gamma_3(\vec{G})$ z uzla u je teda $\mu_1(u) + \nu_2(u)$). Z uvedenej rovnice vyplýva ihneď, že u je rovnovážny uzol v grafe $\gamma_3(\vec{G})$. Pretože u bol ľubovoľný uzol grafu $\gamma_3(\vec{G})$, je tento graf (a tiež graf $\gamma_4(\vec{G})$) rovnovážne orientovaný graf. Dôkaz je vykonaný.

Veta 12. *Nech $\vec{G}_1$ je ľubovoľný orientovaný graf a nech $\vec{G}_0$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}_1$. Označme znakom $\vec{G}_2$ graf, ktorý vznikne z grafu $\vec{G}_1$, ak v ňom zmeníme orientáciu všetkých hrán z $\vec{G}_0$ v orientáciu opačnú a orientáciu ostatných hrán ponecháme bez zmeny. Platí: Počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}_2$ rovná sa počtu rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}_1$.*

Dôkaz. Nech $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\}$ je množina všetkých tých ohodnotení grafu $\vec{G}_1$, ktoré prislúchajú jednotlivým rovnovážne orientovaným podgrafom grafu $\vec{G}_1$. Pre isté $x \in \{1, 2, \ldots, p\}$ platí $\gamma_x(\vec{G}_1) = \vec{G}_0$. Označme znakom γ_0 to ohodnotenie grafu $\vec{G}_1$, pri ktorom platí $\gamma_0(h) = 0$ pre všetky hrany z $\vec{G}_1$.

Tvrdím: Pre ľubovoľné $i \neq x$; $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ platí: Graf $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$ je rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}_2$ (počet takýchto podgrafov je zrejme $p - 1$). Dokážeme to.

Že graf $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$ je rovnovážne orientovaný, vyplýva z vety 11; treba už len dokázať, že uvažovaný graf je podgrafom grafu $\vec{G}_2$ resp. že ľubovoľná hrana z $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$ má v tomto grafe takú istú orientáciu ako v grafe $\vec{G}_2$. Nech h je ľubovoľná hrana z $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$. Sú len dve možnosti (pozri dôkaz predošlej vety): Buď h patrí do $\gamma_i(\vec{G}_1)$ a nepatrí do $\gamma_x(\vec{G}_1) = \vec{G}_0$, alebo h nepatrí do $\gamma_i(\vec{G}_1)$ a patrí do $\gamma_x(\vec{G}_1)$. V prvom prípade má h tú istú orientáciu v každom z týchto grafov $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$. V druhom prípade má h inú orientáciu v $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$ než v grafe $\vec{G}_1$, a pretože h patrí do $\vec{G}_0$, má h inú orientáciu v grafe $\vec{G}_2$ než v grafe $\vec{G}_1$. Teda opäť h má rovnakú orientáciu v grafoch $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$, $\vec{G}_2$. Z toho ihneď vyplýva, že $\gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$ je podgrafom grafu $\vec{G}_2$. Obrátene zrejme platí: Ak $\vec{G}^*$ je ľubovoľný podgraf grafu $\vec{G}_2$ iný než $\gamma_x^2(\vec{G}_1)$, potom existuje práve jedno ohodnotenie γ_i v Γ také, že je $\vec{G}^* = \gamma_i\,\gamma_x^2(\vec{G}_1)$. Graf, ktorý vznikne z grafu $\gamma_x(\vec{G}_1) = \vec{G}_0$

zmenou orientácie všetkých jeho hrán, je identický s grafom $\gamma_0 \gamma_x^2(\vec{G}_1)$ a je rovnovážne orientovaný podgrafom grafu $\vec{G}_2$. Preto počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}_2$ rovná sa taktiež p, čo bolo potrebné dokázať.

Poznámka 6. Otázka koľko rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov existuje v ľubovoľnom orientovanom grafe $\vec{G}_1$ zostáva pravda naďalej otvorená. Veta 12 iba usnadňuje zistenie počtu rovnovážne orientovaných podgrafov v orientovanom grafe $\vec{G}_1$, ak poznáme tento počet aspoň v jednom takom orientovanom grade, ktorý možno z $\vec{G}_1$ utvoriť zmenou orientácie hrán ľubovoľného jeho rovnovážne orientovaného podgrafu.

4

Určenie počtu rovnovážne orientovaných podgrafov daného orientovaného grafu (ku ktorému sme si našli niektoré pomocné prostriedky) má — ako v ďalšom ukážeme — osobitný význam pri skúmaní otázky, koľko rôznych lineárnych faktorov existuje v danom párnom neorientovanom grafe G.[3])

O istej vlastnosti párneho grafu s lineárnym faktorom hovorí táto veta:

Lemma 4. *Nech G je ľubovoľný párny graf, v ktorom existuje aspoň jeden lineárny faktor L a nech rozklad $\mathfrak{R} = \{U_1, U_2\}$ je ľubovoľný taký rozklad jeho množiny uzlov na dve triedy, že ľubovoľná hrana z G spojuje uzly z rôznych tried, potom triedy U_1, U_2 majú rovnaký počet prvkov.*

Dôkaz. Ľubovoľná hrana z L je incidentná práve s jedným uzlom z U_1 a práve s jedným uzlom z U_2, a pretože ľubovoľný uzol z G je incidentný práve s jednou hranou z L, je platnosť lemmy zrejmá.

Veta 13. *Nech G je ľubovoľný párny graf, v ktorom existuje aspoň jeden lineárny faktor L, a nech $\mathfrak{R} = \{U_1, U_2\}$ je ľubovoľný taký rozklad množiny uzlov z G na dve triedy, že ľubovoľná hrana z G spojuje uzly z rôznych tried. Označme znakom $\vec{G}$ graf, ktorý vznikne z grafu G, ak jeho hrany orientujeme takto:*

(1) *ľubovoľná hrana z L smeruje z uzla triedy U_2 do uzla triedy U_1;*

(2) *ľubovoľná hrana nepatriaca do L smeruje v $\vec{G}$ z uzla triedy U_1 do uzla triedy U_2. Platí toto: Počet rôznych rovnovážne orientovaných podgrafov grafu G rovná sa počtu rôznych lineárnych faktorov grafu G iných než L.*

Dôkaz. Pretože z ľubovoľného uzla z U_2 a tiež do ľubovoľného uzla z U_1 v grafe $\vec{G}$ smeruje práve jedna hrana, platí toto: Ľubovoľný rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}$ (ak taký existuje) je pravidelným grafom druhého stupňa a teda ľubovoľná komponenta takéhoto podgrafu je cyklus.

---

[3]) Definície pojmov: lineárny faktor grafu, párny graf, najde čitateľ napr. v citovanej Königovej knihe; v našej literatúre napr. v práci [3] alebo [4].

Tvrdím: Ak v G existuje aspoň jeden lineárny faktor L_1 iný než L, potom v $\vec{G}$ existuje cyklus, a obrátene: Ak v $\vec{G}$ existuje cyklus, potom v G existuje lineárny faktor iný než L. Dokážme to.

Nech L_1 (kde $L_1 \neq L$) je ľubovoľný lineárny faktor grafu G. Kompozícia $L_1 \times L$ obsahuje aspoň jednu kružnicu K_1. Hrany kružnice K_1 (v ktorej sa striedajú hrany z L a hrany nepatriace do L_1, ak obiehame po jej hranách) sú v grafe $\vec{G}$ zrejme orientované kontinuitne, čiže podgraf $\vec{K}_1$ grafu $\vec{G}$ pozostávajúci z prvkov kružnice K_1 je cyklus. Obrátene: Nech $\vec{K}_2$ je ľubovoľný cyklus grafu $\vec{G}$. Kompozícia $K_2 \times L = L_2$ (kde K_2 je kružnica z G, ktorá pozostáva z prvkov cyklu $\vec{K}_2$ grafu $\vec{G}_2$) má zrejme túto vlastnosť: Ľubovoľný uzol z G je incidentný práve s jednou hranou z L_2; čiže L_2 je lineárny faktor grafu G a pritom iný než L. Dôkaz tvrdenia sme vykonali.

Z dokázaného ihneď vyplýva toto: Graf G má jediný lineárny faktor L práve vtedy, keď graf $\vec{G}$ neobsahuje žiadny cyklus.

Predpokladajme teraz, že okrem lineárneho faktora L existuje v grafe G ešte aspoň jeden lineárny faktor. Nech $L = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ je systém všetkých lineárnych faktorov grafu G iných než L. Označme znakom K_i kompozíciu $L \times L_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a znakom $\vec{K}_i$ podgraf grafu $\vec{G}$ obsahujúci prvky a len prvky kompozície K_i. Podľa už uvedeného je ľubovoľná komponenta grafu $\vec{K}_i$ cyklus a teda $\vec{K}_i$ je rovnovážne orientovaným podgrafom grafu $\vec{G}$. Pretože pre rôzne i, j, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, platí $\vec{K}_i \neq \vec{K}_j$, počet rovnovážne orientovaných podgrafov grafu $\vec{G}$ je väčší, alebo sa rovná n. Z podaného dôkazu tvrdenia je však zrejmé aj toto: Ak $\vec{G}_x$ je ľubovoľný rovnovážne orientovaný podgraf grafu $\vec{G}$, všetky jeho komponenty sú potom cykly, a ak G_x je podgraf grafu G obsahujúci všetky prvky a len prvky z $\vec{G}_x$, potom kompozícia $G_x \times L$ je lineárny faktor grafu G. Preto systém $\{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_n\}$ obsahuje všetky rovnovážne orientované podgrafy grafu $\vec{G}$ a platnosť tvrdení vety je zrejmá.

LITERATÚRA

[1] *J. Sedláček:* O konečných orientovaných grafech, Časopis pro pěstování matematiky, *82*, 1957, 195—215.

[2] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[3] *A. Kotzig:* Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov, Bratislava, 1956.

[4] *A. Kotzig:* O istých rozkladoch konečných grafov, Mat. a fyz. čas. SAV, *5*, 1955.

Резюме

ОБ УРАВНОВЕШЕННО ОРИЕНТИРОВАННЫХ КОНЕЧНЫХ ГРАФАХ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 13/XI 1957 г.)

В статье исследуются некоторые свойства т. наз. уравновешенно ориентированных графов (граф, не содержащий изолированных вершин, называется уравновешенно ориентированным, если каждая его вершина является начальной и концевой вершиной для одного и того же количества ребер). При этом автор исходит из известных теорем о разложениях этих графов на циклы и о некоторых свойствах графов эйлеровского типа. Доказываются некоторые теоремы, позволяющие определить число уравновешенно ориентированных подграфов данного ориентированного графа. Наконец показано, как полученные результаты могут быть использованы для решения задачи: определить число различных факторов первой степени в данном четном графе.

Zusammenfassung

ÜBER DIE IM GLEICHGEWICHT GERICHTETEN ENDLICHEN GRAPHEN

ANTON KOTZIG, Bratislava

(Eingelangt am 13. November 1957)

In der Arbeit studiert man einige Eigenschaften der sogenannten im Gleichgewicht gerichteten Graphen (ein Graph — der keine isolierten Knotenpunkte besitzt — wird im Gleichgewicht gerichteter Graph genannt, wenn jeder sein Knotenpunkt ebensooft als Anfangspunkt wie als Schlusspunkt einer Kante erscheint). Dabei wird an bekannte Sätze über die Zerlegungen dieser Graphen in Zyklen und über einige Eigenschaften der Eulerschen Graphen angeknüpft. Man beweist einige Sätze, die die Berechnung der Anzahl von den im Gleichgewicht gerichteten Teilgraphen des gegebenen gerichteten Graphen ermöglichen oder erleichtern. Schliesslich zeigt man auf die Benützung der gewonnenen Resultate bei der Lösung der Aufgabe die Anzahl von verschiedenen Faktoren ersten Grades in dem gegebenen paaren Graphen zu bestimmen.