Recense

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 84 (1959), No. 1, 111--122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117294

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

# RECENSE

*Jozef Garaj*, **Základy vektorového počtu**, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1957, I. vyd., náklad 3200 výt., str. 212, obr. 101, cena Kčs 10,80 brož.

V této knize se používá výhradně vektorové symboliky, při níž nejsou tedy východiskem transformační vztahy mezi složkami v různých systémech souřadnic, ale pojem vektoru a tensoru se zavádí invariantně, jak se tomu většinou děje v přednáškách na technických vysokých školách. Proto v první části je vyložena *vektorová algebra* způsobem obvyklým v knihách, věnovaných vektorovému počtu v trojrozměrném euklidovském prostoru. Jsou proto nejdříve uvedeny základní početní operace s vektory (skalární násobení vektoru, sčítání vektorů a zákony pro sčítání, skalární součin dvou vektorů, rozklad vektoru do složek, speciálně pro pravoúhlý systém základních vektorů, vektorový součin dvou vektorů, složené součiny vektorů a vektorové rovnice). Tato první část, v níž jsou v propočtených příkladech provedeny vektorově některé úlohy z analytické geometrie a kde je ukázáno též použití skalárního příp. vektorového součinu v geometrii a ve fysice, je zakončena vztahy pro transformaci souřadnic vektoru a vyjádřením směrových kosinů pravoúhlého systému jednotkových vektorů vzhledem k jinému takovému systému (Eulerovy úhly).

V druhé části (*tensorová algebra*) je nejdříve definována diáda a diadický součin vektorů a podány nejjednodušší vlastnosti diád (skalární součin vektoru a diády, rovnost dvou diád). Na definici souboru $n$ diád je založen pojem tensoru druhého stupně, jehož vlastnosti jsou pak dokazovány pomocí dříve vyložených vlastností diád. Zvláště důležitým vztahem je vyjádření tensoru součtem tří diád, které umožňují zavedení vektorových souřadnic (pravých příp. levých) tensoru vzhledem ke zvolenému nekomplanárnímu systému. Speciálně v pravoúhlém systému jsou získány tzv. ortogonální složky daného tensoru. Potom lze dokázat existenci tří hlavních směrů definovaných násobením zprava příp. zleva. Pro další výklad je podána definice symetrického a antisymetrického tensoru na základě pojmu tensoru sdruženého k danému tensoru a je proveden rozklad tensoru na symetrickou a antisymetrickou část. Důležité je to, že tensor má obecně 9 různých souřadnic, symetrický tensor 6 souřadnic a antisymetrický tensor jen 3 souřadnice. Proto lze tensoru jednoznačně přiřadit kvadratickou plochu a toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, je-li daný tensor symetrický. Tato kvadratická plocha je obrazem symetrického tensoru, kdežto antisymetrický tensor má za obraz určitý vektor, takže obrazem obecného tensoru je pak kvadratická plocha a vektor. Pro vektorový součin vektoru a tensoru se rozlišuje opět pravý příp. levý součin, který je zase tensorem, jako je tensorem druhého stupně i skalární součin dvou tensorů. Speciálně zavedený tensor identity umožňuje určení reciprokého tensoru. Po stanovení tří skalárů tensoru jsou v závěru této části podány transformační vztahy pro ortogonální souřadnice tensoru a ukázáno zcela krátce, jak lze sestrojit tensory vyšších stupňů.

Třetí část (*vektorová analysa*) je po uvedení pojmu vektorové funkce skalárního argumentu, definice její limity, spojitosti, derivace s jejími vlastnostmi (včetně Taylorova vzorce), neurčitého a určitého integrálu, věnována základům diferenciální geometrie křivek a pohybu tuhého tělesa.

Nejdůležitější částí celé knihy je pak čtvrtá část, která se zabývá *teorií polí*. V této části také nevystačí čtenář pouze se základními pojmy z algebry a se znalostí pojmu derivace a integrace funkce, jako tomu bylo v předcházejících částech, je tu třeba znát poněkud více, jak to vyžadují závěrečné odstavce této části. V úvodu části o teorii polí je nejdříve pojem vysvětlen a po výkladu o zobrazení skalárního pole je zaveden gradient skalárního pole a s ním souvisící Hamiltonův operátor. Pomocí tohoto operátoru jsou pak definovány další pojmy teorie polí (divergence vektoru, rotace vektoru a gradient vektoru a obdobně pro tensor). Pak jsou dokazovány různé vztahy pro tyto pojmy (v běžném textu v příkladech i v úlohách) a zvláště je ukázáno stanovení Laplaceova operátoru. Na výklad o pojmu vektorového pole navazuje definice vektorové čáry a odvození její diferenciální rovnice. Dále je vyloženo, kdy se vektorové pole nazývá potenciálovým (bezvírovým), pro kterýžto pojem jsou uvedeny nutné a postačující podmínky. S vektorovým polem souvisí cirkulace vektorového pole (křivkový integrál) a tok vektoru uzavřenou plochou (plošný integrál), který za určitých předpokladů lze převést na objemový integrál (Gaussova věta), jehož pomocí lze vyložit též fysikální význam divergence vektoru. Při zvolených předpokladech pro čáru, podél níž je integrováno, je obdobně vyložen též fysikální význam rotace vektoru. Závěr knihy tvoří převedení křivkového integrálu cirkulace vektorového pole na plošný integrál (Stokesova věta) a výklady na použití ve fysice kniha končí.

Uvedená kniha je napsána pro čtenáře, který má jisté předběžné znalosti základních matematických disciplin, které však (s výjimkou čtvrté části) nepřesahují minimální požadavky. Přímo v textu je řešeno mnoho příkladů, které by bylo možno uvést běžně jako věty a řešení příkladů jako jejich důkazy Mezi jinými příklady jsou propočteny základní úlohy o lineárních útvarech z analytické geometrie v rovině a v prostoru Výsledků propočtených příkladů se dále v průběhu výkladu používá, proto tyto příklady prohlubují do značné míry vyloženou látku a je tedy třeba si je propočítat. Tím též čtenář získá určitou praxi v užívání naučených definic a vět a vidí, jakým způsobem se při řešení jednotlivých příkladů dostane k příslušným výsledkům. Výborným doplňkem knihy, který nebývá vždy v pomocných učebnicích tohoto druhu, je řada úloh, které jsou čtenáři předloženy k samostatnému řešení a u nichž jsou vždy uvedeny výsledky příp. u složitějších úloh i návod k řešení. Tato učebnice sice připomíná knihu: D. Ilkovič, Vektorový počet, výklad látky je však poměrně užší a svým způsobem bude dobrou učebnicí pro studenty některých technických fakult a také pro každého, kdo potřebuje se rychle seznámit se základy vektorového počtu.

Provedení tisku knihy vykazuje řadu nedostatků, zejména v tisku obrázků, kde by byl lepší popis šablonou a nikoliv tiskem, protože v tomto případě jsou indexy většinou nečitelné (a někdy i ostatní písmena), a potom v dosti značném počtu (sice celkem) nepodstatných chyb, které nebyly korekturou postihnuty. Tisk obrázků samých neodpovídá významu knihy a nedosahuje úrovně obrázků z jiných našich knih a učebnic, např. vydávaných v SNTL. Při tom popis v obr. 38 nesouhlasí s textem, v obr. 76a chybí u nábojů označení, v obr. 65b netvoří kružnice svazek a názorné obrázky, pracované zřejmě v pravoúhlé axonometrii, působí většinou pohledově nepříznivě vlivem volby obrazu os, který určuje průmět vodorovné roviny. Je třeba rovněž připomenout, že v limitních vztazích se dnes používá výhradně šipky pro vyznačení konvergence a že se upustilo od používání rovnítka. Tečný vektor křivky by měl být označen **t**, jak je zvykem v učebnicích diferenciální geometrie, stejně jako snad mělo být upuštěno od označení vektorů (s výjimkou úhlových rychlostí) řeckými písmeny, protože rozlišení tloušťkou od skaláru není dost patrné. Protože uvedená literatura má být snadno dosažitelná, je nutno upozornit, že knihy: Craig, Vector and Tensor analysis (1943) a И. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, část I (1933), nejsou snadno dostupné; ostatní doporučovanou literaturu lze však v podstatě běžně studovat.

*Karel Drábek*, Praha

*И. В. Проскуряков*, **Сборник задач по линейной алгебре.** (I. V. Proskurňjakov, Sbírka úloh z lineární algebry), Moskva 1957, 368 stran.

Podám nejprve obsah spisu aspoň v hlavních rysech:

Odd. 1. *Determinanty*, § 1—8, úloha 1—553.

Odd. 2. *Soustavy lineárních rovnic*, § 9—11, úl. 554—787.

Odd. 3. *Matice a kvadratické formy*, úl. 788—1276. § 12. Výkony s maticemi. § 13. Mnohočlenové matice. § 14. Podobné matice. Charakteristické a minimální mnohočleny. Jordanova a diagonální forma matice. Maticové funkce. § 15. Kvadratické formy.

Odd. 4. *Vektorové prostory a jejich lineární zobrazení*, úl. 1227—1633. § 16. Afinní vektorové prostory. § 17. Euklidovy a unitární prostory. § 18. Lineární zobrazení libovolných vektorových prostorů. § 19. Lineární zobrazení Euklidových a unitárních vektorových prostorů.

*Doplněk*. Grupy, okruhy a tělesa, úl. 1634—1753.

Jak je patrné, jde o sbírku úloh velmi obsáhlou. Autor se snažil při sestavování této pomůcky podat v prvé řadě dostatečné množství látky k procvičení základních úloh (např. výpočtu determinantů s číselnými prvky, řešení soustav lineárních rovnic s číselnými koeficienty atp.), za druhé, podat úlohy objasňující základní pojmy a jejich vztahy (např. vztah vlastností matic a vlastností kvadratických forem na jedné straně a lineárních zobrazení na straně druhé), za třetí, podat úlohy doplňující učební běh a přispívající k rozšíření matematického obzoru (např. vlastnosti Pfaffova agregátu příslušného ke kososymetrickému determinantu).

Velmi často se ve sbírce vyskytují úlohy dokázat věty, které lze najít i v učebnicích. Autor zařadil takové úlohy vycházeje z té okolnosti, že při přednáškách pro nedostatek času je mnohdy nutno odkazovat posluchače na příslušnou literaturu. A tu může sbírka příkladů prokázat dobrou službu, ježto jsou v ní podány také návody pomáhající provést samostatně důkazy, což přispívá k pronikavějšímu vniknutí do učebního postupu. Ježto se autor snažil sestavit sbírku příkladů tak, aby mohla sloužit bez obtíží jako pomocná kniha při přednáškách, stává se, že se v ní látka opakuje, třeba v málo odlišné stylisaci. Tak je podáno v podstatě totéž v odstavci o kvadratických formách a později v odstavci o lineárním zobrazení. Některé úlohy jsou formulovány tak, že je možno je řešit jak pro případ reálného prostoru Euklidova, tak pro případ komplexního prostoru unitárního. Autor je toho mínění, že tento postup je při sbírce příkladů vhodný, ježto takto je dána větší přizpůsobivost při použití.

Na začátku některých paragrafů je uveden návod. Ten obsahuje také krátký nástin terminologie a označení v těch případech, kdy v učebnicích není úplné jednoty v tomto směru. Výjimečné postavení zaujímá úvod k § 5, kde jsou podány hlavní metody k výpočtu determinantů libovolného řádu a uvedeny příklady na každou metodu. Je to jistě pokrok proti postupu dosud všeobecně používanému v učebnicích i ve sbírkách příkladů, kdy bývají uvedeny jen různé příklady na výpočet determinantů, není však podána stylizace příslušného návodu, takže se studující setkávají se značnými obtížemi.

U řadových čísel úloh, kde je ve výsledku uvedeno řešení nebo návod k němu, je připojena hvězdička. Řešení je uvedeno jen u malého počtu úloh. Jsou to buď úlohy obsahující obecné metody, kterých možno použít při řadě dalších úloh (např. úloha 1151 udávající postup při vyčíslení maticové funkce a úloha 1529 obsahující sestrojení báze, při níž matice lineárního zobrazení je v Jordanově tvaru), nebo úlohy zvláště nesnadné (např. úlohy 1433, 1714, 1617). Návody obsahují zpravidla pouze základní myšlénky nebo metodu řešení a provedení samotného řešení přenechávají čtenáři. Jen pro nesnadnější úlohy obsahuje návod také krátký nástin řešení (např. u úloh 546, 1492, 1632).

Při srovnání s dosavadními sbírkami (nehledíme-li k podrobnostem) je novinkou zařazení úloh na mnohočlenové matice (§ 13), na lineární zobrazení afinních a metrických prostorů (§ 18, § 19). Trochu stranou výkladům o lineární algebře leží doplňky věnované grupám, okruhům a tělesům.

Nebylo dosud zvykem připojovat ke sbírkám příkladů rejstřík. Jistě by se však zvýšila přehlednost a používatelnost sbírky, kdyby se tento zvyk vžil i u sbírek příkladů.

*Karel Rychlík*, Praha

*Claude Chevalley*, **The construction and study of certain important algebras.** Publications of the Mathematical society of Japan, sv. 1, 1955, str. VI + 64.

Spis přináší obsah přednášek o některých důležitých pojmech multilineární algebry, které konal autor r. 1954 v Japonsku. O této látce je však pojednáváno z hlediska zcela neobvyklého, což bylo možno uskutečnit teprve v posledních létech, hlavně v důsledku nových prací o homologii a Lieově teorii. Práce má v prvé řadě význam jako úvod do těchto nových metod. K jejímu porozumění stačí znát základní pojmy moderní algebry. Při tom však nechci tvrdit, že by její studium bylo zcela snadné. Jen zařazením pod vhodně zvolené pojmy bylo umožněno shrnout na místě tak omezeném tolik látky. Je to přesvědčující příklad pro účelnost těchto pojmů nové algebry. Tenzorové a vnější násobení mají velký význam i mimo algebru: může tedy spis zajímat pracovníky i z jiných oborů matematiky.

Slovem *okruh* se vždy rozumí okruh s jednotkou 1. Jako homomorfismy tohoto okruhu $A$ se uvažují homomorfismy zobrazující jednotku na jednotku. Okruh $A$ může být v kap. I i nekomutativní, v dalším je vždy komutativní. Modul $M$ nad $A$ (základním okruhem, okruhem skalárů) bude vždy modul unitární ($AM = M$); $\alpha x$ s $\alpha \in A$, $x \in M$ se nazývá skalárním násobkem prvku $x$. Zobrazení modulu nad $A$ do modulu nad $A$ se nazývá lineární, je-li to homomorfismus příslušné aditivní grupy, který komutuje s každým skalárním násobením pro každý prvek z $A$. Pod slovem algebra $E$ nad $A$ se rozumí modul nad $A$ s asociativním násobením. $E$ je nadto okruh, pro který ještě platí

$$\alpha(xy) = (\alpha x)\, y = x(\alpha y) \quad (x, y \in E;\ \alpha \in A)\,.$$

Homomorfismem algeber se myslí okruhový homomorfismus zobrazující jednotku na jednotku. Podmnožina $S$ algebry $E$ se nazývá množinou generátorů pro $E$, je-li $E$ nejmenší podalgebra obsahující $S$ a jednotku 1 algebry $E$.

Kap. I: *Graduované* (graded) *algebry*. Nejprve pojednáno o volných algebrách. K tomu je definován ostřejší pojem universální algebry. Pro tyto algebry je prokázána existence a unicita a tím provedeny tyto důkazy i pro algebry volné. Pro aditivní grupu $\Gamma$ je $\Gamma$-graduovaná algebra $E$ definována jako algebra nad $A$, která jako modul nad $A$ má rozklad v direktní součet $E = \sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$. Přitom pro podmoduly $E_\gamma$, $E_{\gamma'}$ platí $E_\gamma E_{\gamma'} \leqq E_{\gamma+\gamma'}$ (tj. $x \in E_\gamma$ a $x' \in E_{\gamma'} \Rightarrow xx' \in E_{\gamma+\gamma'}$). Zvláštní případy $\Gamma$-graduovaných algeber jsou algebry graduované a polograduované. Při nich je $\Gamma$ grupa celých čísel, popřípadě celých čísel mod 2. Konečně je definována zobecněná derivace.

Kap. II: *Tenzorové algebry*. Tenzor se obvykle označuje písmenem s indexy horními a dolními. To proto, že se užívá báze. Autor se takovému vyjádření vyhýbá; při jeho definici není třeba báze užívat. Definuje pojem tenzorové algebry $T$ nad modulem $M$ (což je modul nad komutativním okruhem $A$), jako algebru nad $A$ vytvořenou $M$ a 1; každé lineární zobrazení $M$ do libovolné algebry $E$ nad $A$ lze rozšířit na homomorfismus $T$ v $E$. Dokazuje pak existenci a unicitu $T$. Charakterisuje $T$ také jako graduovanou algebru, při čemž komponenty se zápornými indexy jsou vesměs rovny 0. Tenzorový součin dvou modulů nad $A$ je utvořen jako podmodul tenzorové algebry nad direktním součtem oněch dvou modulů nad $A$. Je ukázáno, jak lze derivaci definovat jako tenzorovou algebru a konečně je definován „kosý" tenzorový součin dvou pologradupovaných algeber.

Kap. III. *Cliffordovy algebry.* Cliffordova algebra je přidružena ke kvadratické formě $f(x)$ a zhruba řečeno vyhovuje vztahu $x^2 = f(x) \, . \, 1$. Autor nejprve definuje kvadratickou formu bez užití báze modulu $M$ nad okruhem $A$. Přitom definuje zároveň příslušnou bilineární formu modulu $M \times M$ nad $A$. Cliffordova algebra $C$ kvadratické formy $f$ je definována jako $C = T/I$, kde $T$ je tenzorová algebra nad $M$ a $I$ je ideál z $T$ vytvořený všemi prvky tvaru $x^2 - f(x) \, . \, 1$, $x \in M$. Speciálními případy Cliffordovy algebry jsou kvaternionové algebry ($A$ je těleso charakteristiky $\neq 2$, $M$ má hodnost 2 nad $A$) a vnější algebra $E$ nad $M$, což je Cliffordova algebra pro $f = 0$. $C$ je polograduovaná algebra a $E$ graduovaná algebra. Spinory jsou zavedeny pomocí Cliffordovy algebry nad tělesem.

Kap. IV: *Některá použití vnějších algeber.* Tu pojednáno o Plückerových souřadnicích, pak o Pfaffových invariantech (pomocí exponenciální funkce ve vnější algebře) a o determinantech. Konečně uvedeno použití v kombinatorické topologii.

*

Jako sv. 2 sbírky Publications of the Mathematical society of Japan vyšel spis: *Katsumi Nomizu,* **Lie groups and differential geometry.** 1956, str. XIV + 80.

Autor dává zcela moderní úvod do diferenciální geometrie ve velkém z hlediska vláknových svazků a teorie Lieových grup. Základem knihy je rukopis přednášky o teorii souvislostí, kterou autor konal na universitě v Nagoya v zimě r. 1955.

Obsah (zkrácený): Kap. I. Diferenciální variety. Kap. II. Souvislost ve vláknových svazcích. Kap. III. Lineární souvislost.

*

Jako sv. 3 této sbírky vyšla kniha: *Paul R. Halmos,* **Lectures on ergodic theory.** 1956, str. VIII + 100.

Autor spisu, od něhož pocházejí knihy „Measure theory", 1950 a „Introduction to Hilbert space", 1951 (první z nich je přeložena i do ruštiny: П. Халмош, Теория меры 1953) podává obsah své přednášky o ergodické teorii konané na universitě v Chicagu v létě r. 1955. Není to tedy monografie vyčerpávající látku. V úvodu žádá autor čtenáře, aby si představil, že poslouchá řadu hovorů, které mají oživit zájem o užitečný, ne však zcela běžný obor matematiky. Autorův záměr bude více než splněn, docílí-li kniha toho, že se čtenář pokusí o řešení některých pozoruhodných otevřených problémů z ergodické teorie a popřípadě je skutečně rozřeší.

Výňatek z obsahu: Rekurence. Průměrná konvergence. Bodová konvergence. Ergodičnost. Míšení. Algebra míry. Diskrétní spektrum. Automorfismy kompaktních grup. Zobecněné vlastní hodnoty. Slabá aproximace. Stejnoměrná aproximace. Kategorie. Invariantní míry. Zobecněné ergodické věty. Neřešené úlohy (deset).

*Karel Rychlík,* Praha

*R. Kochendörffer,* **Determinanten und Matrizen.** B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957, 144 stran.

Kniha R. Kochendörffera je určena posluchačům, kteří začínají studium matematiky na vysoké škole. Autor, který je sám universitním profesorem, navazuje tu nejprve bezprostředně na středoškolskou matematiku, takže první část spisu mohou číst bez obtíží i studenti středoškolští. Druhá polovina knihy má ovšem už rychlejší tempo, čímž se autoru podařilo podat v knížce nepříliš rozsáhlé látku dosti obsáhlou.[1]) I v druhé části knihy se však přibliží k školským znalostem čtenářovým, výklad se namnoze konfrontuje se středoškolskou matematikou a pedagogické záměry autorovy dokresluje též 33 cvičení, jež jsou připojena k některým paragrafům a jejichž řešení (nebo aspoň výsledky) najdeme v závěru knížky. Jen některá z těchto cvičení jsou počtářske úkoly; většinou se i ve cvičeních čtenář seznamuje s novými vlastnostmi zaváděných pojmů, při čemž si může dobře prověřit, zda těmto pojmům porozuměl.[2])

Kochendörfferova knížka je rozdělena do devíti kapitol nestejného rozsahu i nestejné náročnosti, jejichž náplně si nyní všimněme podrobněji.

První kapitola má připravený charakter. Čtenář se tu seznámí se symboly $\sum_{i=1}^{m} a_i$, $\prod_{i=1}^{m} a_i$ a s matematickou indukcí a v paragrafu o polynomech je bez důkazu uvedena základní věta algebry a několik vlastností mnohočlenů. V závěru první kapitoly se středoškolským způsobem zavádí pojem permutace.

Středoškolský charakter má rovněž počátek druhé kapitoly, v němž se na soustavách lineárních rovnic o dvou a o třech neznámých ukazuje užitečnost pojmu (čtvercové) matice a jejího determinantu. Od determinantů 2. a 3. stupně se pak přechází k obecné definici determinantu $n$-tého stupně ($n \geqq 2$).

Nejdůležitější vlastnosti determinantů jsou vyloženy ve třetí kapitole. Vedle vlastností základních uváděných v každé elementární učebnici nalezneme tu též Weierstrassovu charakterisaci determinantu čtvercové matice (podle níž je determinant matice $A$ polynomem homogenním a lineárním v prvcích každé řady matice $A$, který výměnou dvou řad matice $A$ mění znaménko a jenž je pro jednotkovou matici roven 1). Je definována matice transponovaná (označení $A'$), zkoumán její determinant a jsou probrány metody pro výpočet daného determinantu — rozvoj determinantu — podle prvků jisté řady a pravidlo Sarrusovo. Odvození Cramerova pravidla navazuje na druhou část knížky a konečně závěr této třetí kapitoly pojednává o násobení determinantů.

Čtvrtá kapitola má už abstraktnější náplň, neboť se v ní čtenář seznámí s pojmem grupy — totiž — s grupou regulárních matic. K tomu je zapotřebí uvést definici součinu dvou matic (ne už jen čtvercových, nýbrž i obdélníkových), pojem regulární matice a definici matice $A^{-1}$ inversní k dané matici regulární $A$. V závěru seznamuje autor čtenáře též se sčítáním a odčítáním matic.

Důležite pojmy lineární algebry, probírané v páté kapitole, kladou opět zvýšený požadavek na čtenáře, který ke studiu přistoupil jen se znalostí středoškolské matematiky. Vektorový prostor je tu definován jako množina všech matic typu $(n, 1)$ — vektorů — jejichž prvky jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla. Jsou formulovány axiómy vektorového prostoru; již z předcházejících úvah o obdélníkových maticích plyne, že tyto axiómy jsou splněny pro matice typu $(n, 1)$. Base vektorového prostoru se zavádí jako soustava vektorů taková, že každý vektor prostoru lze psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů z této base; lineární nezávislost vektorů base je pak uvedena jako charakteristická vlastnost base a nasnadě je tu též definice dimense. Ve dvou paragrafech si Kochendörffer všímá pojmu hodnost matice, načež v závěru páté části je zavedena norma (komplexního) vektoru a definován pojem ortogonální base.

---

[1]) Zkratkovitý charakter knížky ilustruje např. okolnost, že pojem (číselného) tělesa zavádí tu Kochendörffer jen v poznámce pod čarou na str. 33.

[2]) V předmluvě doporučuje autor čtenáři aby při studiu věnoval velkou pozornost právě řešení úloh; mezi literaturou, kterou v tomto ohledu doporučuje na doplnění, je i u nás dobře známá sbírka Фаддеев-Соминский: Сборник задач по высшей алгебре (uvádí se tu však nesprávně jméno druhého autora).

Šestá kapitola pojednává o lineárních rovnicích. Tato teorie je probrána ve dvou dílčích úlohách: určiti obecné řešení homogenní soustavy a vyhledati jedno speciální řešení soustavy nehomogenní. Zpracování této části ovšem nemá středoškolský ráz, nýbrž pracuje se tu s výše zavedenými pojmy lineární algebry. Jen v závěrečném paragrafu tohoto oddílu, pojednávajícím o početních metodách při řešení lineárních rovnic, najdeme opět reminiscenci na středoškolskou matematiku.

V sedmé kapitole, věnované hermitovským a kvadratickým formám, se čtenář mj. seznámí s charakteristickou rovnicí hermitovské matice, se zákonem setrvačnosti a s některými vlastnostmi positivně (a negativně) definitních hermitovských forem.

Obsáhlejší předposlední osmá kapitola doplňuje v jistém směru kapitolu třetí, neboť se zde uvádějí některé další vlastnosti determinantů a matic. Autor definuje determinant Vandermondův, podává Hadamardův odhad determinantu a odvozuje Laplaceovu větu. Jeden paragraf této části je věnován otázce rozložitelnosti matice a podrobněji se zkoumají matice podobné.[3]) Dále se zobecňuje pojem charakteristické rovnice, jenž byl výše zaveden jen pro matice hermitovské, a odvozují se některé vlastnosti charakteristických čísel. Závěr oddílu si pak všímá Kroneckerova součinu matic a odvozuje Cayley-Hamiltonovu rovnici.

Poslední, devátá kapitola rozbírá podrobněji pojem podobnosti matic. Ukazuje se, že podobnost je ekvivalencí v množině všech matic téhož typu, a třídám, na něž se tato množina vzhledem na uvedenou ekvivalenci rozpadne, se dává geometrický význam (lineárních zobrazení na vektorovém prostoru). Pozornost je pak věnována zejména invariantům, jež zůstanou zachovány při podobnosti matic.

Tolik tedy ve stručnosti k obsahu Kochendörfferovy knížky. Závěrem bych chtěl říci, že tento úvod do studia determinantů a matic, jdoucí sice mnohem výše, než jsme zvyklí očekávat od spisů obdobného rozsahu a obdobného zaměření, ale svědčící o dobrých učitelských zkušenostech autorových, je možno i našim studentům doporučit.

*Jiří Sedláček*, Praha

*Eduard Winter*, **Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1746—1766.** Dokumente für das Wirken LEONHARD EULERS in Berlin. Zum 250 Geburtstag. Akademie-Verlag. Berlin 1957, XIV, 394 str.

Spisovatel se podjal záslužného činu, že vydal Knihy záznamů (Registres) Berlínské Akademie z let 1746—1766. Jsou prací tehdejšího stálého tajemníka této akademie Johanna Friedricha Samuela Formeye.

Tyto knihy záznamů umožňují podat doklady velikých zásluh Eulerových o rozvoj Berlínské akademie. Zároveň s již uveřejněnými protokoly Petrohradské akademie, na níž Euler působil v létech 1727 až 1741 a pak od r. 1766 až do smrti r. 1783, ukazují jeho činnost vědeckou a organisátorskou na obou akademiích. Vydáním těchto knih uctívá Berlínská akademie 250. výročí narození Eulera, jehož mnohostranné činnosti je zavázána velikými díky.

Kniha obsahuje obraz Eulerův z r. 1751 od E. Handmanna.

*Karel Rychlík* Praha

*J. Lukaszewicz, M. Warmus*: **Metody numericzne i graficizne.** Część I. (Numerické a grafické metody početní. Díl I.) 1. vydání. Vydalo Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1956, 429 stran, 77 obrázků, 1 příloha, 9 tabulek, cena 29,20 zł.

---

[3]) Definice podobných matic je podána na str. 112, avšak rejstřík odkazuje (pod heslem „ähnliche Matrizen") na str. 123.

Kniha byla koncipována jako příručka a učebnice základních metod numerického a grafického počtu. Předpokladem pro její studium je znalost základů algebry, geometrie a infinitesimálního počtu. Je zaměřena velmi zřetelně k bezprostřednímu použití vyložených metod. Po názorném objasnění pojmu resp. po vymezení problému, k jehož řešení příslušná metoda slouží, následuje zpravidla teoretický výklad, doprovázený numerickými příklady resp. obrázky. Zvláštní důraz je kladen na pokud možno jednoduché odhady chyb — ať už chyb zaokrouhlovacích, chyb metod nebo chyb odčítaných hodnot při použití grafických pomůcek (stupnic, logaritmického pravítka, nomogramů).

Úvodní 1. kapitola se zabývá teorií maximálních chyb a statistickou teorií chyb. Nejdříve pojednává o přesnosti měřených veličin a o absolutních a relativních chybách měřených veličin a čísel, získaných přibližným výpočtem. Dále odvozuje z Taylorova rozvoje výrazy pro absolutní a relativní chyby funkce jedné a více proměnných vlivem nepřesnosti argumentů. Výklad statistické teorie chyb je zaměřen k statistickým odhadům přesnosti naměřených fysikálních veličin a pravděpodobnostnímu ohodnocení přesnosti funkčních hodnot, když jsou dány konfidenční intervaly argumentů.

Druhá kapitola jest úvodem k diferenčnímu počtu. Jsou zde definovány obyčejná, zpětná, střední a poměrná diference a vyloženy základní vzájemné vztahy mezi nimi a jejich vztah k derivaci. Do této kapitoly je též zařazena stať o metodě vyjádření polynomu jako lineární kombinace faktoriálních mnohočlenů.

Ve třetí kapitole se vysvětluje pojem a význam interpolace. Jsou zde uvedeny Lagrangeova formule a způsob jejího výpočtu Aitkenovou iterační metodou, obecná Newtonova formule, dále pak formule Gaussova, Stirlingova, Besselova, Everettova a formule pro interpolaci pomocí racionální lomené funkce.

Teorie chyb vzniklých interpolací jest podána z obecnějšího hlediska v další čtvrté kapitole, pojednávající o aproximaci. V ní se nejdříve uvádějí existenční teorémy — Weierstrassův o existenci aproximačního polynomu a Borelův o existenci polynomu, který jest optimální aproximací dané funkce. Metodám stanovení optimálních aproximací je věnována podstatná část kapitoly; z nich jmenujme velmi pěkně zpracovaný výklad o Čebyševových polynomech. Dále se tato kapitola zabývá vyrovnáváním funkčních hodnot a experimentálních dat metodou nejmenších čtverců; diskutuje se a vysvětluje se pravděpodobnostní charakter této metody. Dále se zde vysvětluje použití ortogonálních polynomů v teorii aproximace, Fourierova řada a metody harmonické analysy. Tuto rozsáhlou a velmi pěkně zpracovanou kapitolu uzavírá diskuse o výběru vhodné aproximační metody s ohledem na vlastnosti dané funkce, na požadavky, kladené na aproximující funkci a na výpočtové možnosti.

Pátá kapitola se zabývá aplikacemi metod postupných aproximací na řešení algebraických a transcendentních rovnic a systémů rovnic o více neznámých, vyjma systémů lineárních rovnic, které jsou probírány samostatně v následující kapitole. Dále je zde vyložena Sturmova metoda s aplikací na separaci kořenů do dostatečně malých intervalů. Z iteračních metod pro řešení rovnic o jedné neznámé se uvádí pravidlo „regula falsi“ s naznačením důkazu konvergence posloupnosti postupných aproximací k přesnému řešení a s odhadem chyby $n$-té aproximace. Dále je tu uvedena Eulerova metoda a jako její zvláštní případ Newtonova metoda. U Newtonovy metody se uvádí kriterium, kdy posloupnost postupných aproximací konverguje k přesnému řešení, a dále pak se odvozují praktická pravidla pro numerický výpočet a pro způsoby zaokrouhlování čísel během výpočtu. Oddíl metod řešení rovnic o jedné neznámé je zakončen podrobným řešením příkladu, při němž se vtipně kombinují jednotlivé probrané metody. Z metod řešení rovnic o více neznámých je uvedena zobecněná Newtonova metoda postupných aproximací a iterační metoda. Kapitolu zakončuje informativní výklad postupu výpočtu relaxačními metodami.

V šesté kapitole se uvádějí nejdůležitější metody řešení systémů lineárních rovnic: Metoda eliminační s odhadem maximálních chyb, vzniklých nepřesností parametrů daného systému a šířením zaokrouhlovacích chyb; eliminační metoda je upravena do výpočtového schématu (které navrhl W. E. MILNE v knize Numerical Calculus). Dále se vysvětluje, jak se určí nejlepší řešení (ve smyslu metody nejmenších čtverců) sporné soustavy $p$ lineárních rovnic s $n$ ($< p$) neznámými. Podstatnou část kapitoly tvoří výklad teorie krakowianů a jejich aplikace na řešení systémů lineárních rovnic.

Sedmá kapitola vychází ze způsobu zpracování a vzorců kapitoly o interpolaci. Uvádějí se zde nejčastěji používané metody numerické derivace a integrace. Pečlivě jest zpracována stať o odhadech chyb při numerické derivaci. Grafické derivaci je věnován informativní odstavec; není zde však vyložena metoda sestrojení tečny v daném bodě grafu funkce. Ze vzorců pro numerickou integraci jsou uvedena známá pravidla, lichoběžníkové a Simpsonovo a integrační vzorce Newton-Cotesův, Čebyševův a Gaussův. O grafické integraci pojednává informativní odstavec. Podrobnější výklad této látky má být podán v připravovaném druhém dílu knihy.

Druhá část knihy podává přehled základních pomůcek a metod grafického počtu. Začíná výkladem (kapitola VIII) o stupnicích a grafických papírech. Vysvětlují se základní pojmy grafického počtu (jako kóta, modul, stupnice apod.) a konstrukce a použití stupnic. Nejužívanější grafické papíry (milimetrový, logaritmický, semilogaritmický a mocninový) jsou definovány parametrickými rovnicemi a z těch pak jsou odvozeny typy funkcí, které jsou na nich zobrazeny přímkou. Dále se zde objasňuje informativně pojem anamorfosy a princip grafické anamorfosy.

Do deváté kapitoly jest zařazeno pojednání o logaritmickém pravítku se zaměřením na jeho účelné využití; vysvětlují se některé obraty, které se často vyskytují při technických výpočtech.

V poslední desáté kapitole jsou vysvětleny základní metody konstrukce *nomogramů*. Kapitola je rozdělena na dvě části: V první části jsou vyloženy způsoby sestrojení průsečíkových nomogramů pro nejjednodušší vztahy mezi třemi proměnnými; pěkným příkladem jejich aplikace je vypracovaný nomogram pro určení reálných i imaginárních kořenů redukované kubické rovnice. Tuto část kapitoly uzavírá výklad o Massauově rovnici, kterou lze zobrazit nomogramy s trojnásobnou soustavou přímek. Ve druhé části této kapitoly jsou vyloženy způsoby sestrojení základních typů spojnicových nomogramů. Stručně je připojen výklad o sdružování nomogramů a binárním poli.

Kniha je zakončena tabulkami Gaussovy a Studentovy funkce, tabulkami Stirlingových a interpolačních koeficientů a přehledem nejdůležitějších vzorců pro numerickou derivaci a integraci; použití jmenovaných tabulek a vzorců bylo vyloženo v příslušných kapitolách knihy.

V textu knihy postřehneme řadu originálních náhledů a způsobů zpracování této tak značně rozsáhlé a rozmanité látky. Pro jasnou a přehlednou formu zpracování bude kniha jistě vyhledávána nejen studujícími na vysokých školách technických směrů, ale i pracovníky mnoha technických oborů.

*Stanislav Maloň*, Praha

*Günter Pickert*: **Projektive Ebenen.** Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955, VIII + 343 stran, 60 obrazů; cena sešitového výtisku 44,80 DM, vázaného 48,60 DM. Vyšlo jako LXXX. svazek edice „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“.

Teorie abstraktních rovin je novou matematickou disciplinou vzniklou v tomto století. Z geometrického hlediska se vyvinula ze studia axiomů incidence (Hilbert, Veblen, Young), teorie tkání[1]) (Blaschke, Bol, Thomsen, Reidemeister) a teorie konfiguračních vět (Mou-

[1]) Z německého „Gewebe“; profesor W. BLASCHKE razí v poslední době název plástev (*Wabe*).

fangová, Hall, Skornjakov), z algebraického hlediska z teorie zobecněných těles, jako např. alternativních těles, kvasitěles, kartézských grup a dvojitých lup[2]) (Hall, Bruck, Kleinfeld, Smiley, Pickert). Podle mého názoru má teorie abstraktních rovin nárok na samostatnou existenci především proto, že konfigurační věta Desarguesova platná v aspoň trojrozměrných prostorech s incidencí (a umožňující převést studium těchto prostorů na studium vektorových prostorů nad asociativními tělesy) nemusí platit v rovině s incidencí, tj. v abstraktní rovině.

Některé soubornější články o abstraktních rovinách uvádím ve stručném seznamu na konci recense. Od r. 1955, kdy byla Pickertova kniha vydána, bylo dosaženo mnoha dalších pozoruhodných výsledků zejména v USA, SSSR a NSR.

Kniha profesora Pickerta je prvním obsáhlým kompendiem o abstraktních rovinách; články a spisy uvedené na konci recense podávají pouze pohledy dílčí. Pickertova kniha je věnována specialistům algebraikům i geometrům. Je sepsána s velkým mistrovstvím; poskytuje přehled i podrobné cenné prameny k dalším výzkumům. Zvláštní znalosti se pro studium knihy nepředpokládají; z algebry se předpokládá např. znalost pojmu asociativního tělesa, vektorového prostoru, Galoisových těles, z topologie znalost pojmů uzavřenosti, regularity, kompaktnosti; z hlubších vět užívá autor bez důkazu pouze Wedderburnovy věty o komutativitě konečných asociativních těles a Pontrjaginovy věty o asociativních tělesech, která jsou souvislá a lokálně kompaktní.

Našel jsem několik málo tiskových chyb. Na str. 25, 3. řádek zdola: místo S. 14 má být S. 19; na str. 49, 8. řádek shora: místo $a = 0$, $b = 0$ má být $a^{\sigma} = 0$, $b^{\sigma} = 0$; na str. 118, 8. řádek shora: místo Satz 10 má být Satz 17.

Uvedu nejprve názvy kapitol: 1. *Základní pojmy.* 2. *Tkáně.* 3. *Věta Desarguesova.* 4. *Desarguesovské roviny.* 5. *Věta Pappova.* 6. *Alternativní tělesa.* 7. *Moufangovské roviny.* 8. *Translační roviny.* 9. *Roviny s uspořádáním.* 10. *Topologické roviny.* 11. *Möbiusovy sítě.* 12. *Konečné roviny.* Před 1. kapitolou je stručný úvod o způsobu označování. Po 12. kapitole pak následuje dodatek, seznam literatury (236 prací), seznam vzorců a symbolů a věcný rejstřík.

Protože recense je určena především čtenářům o téma nezainteresovaným, pokusím se v dalším o výklad alespoň těch pojmů, které se vyskytují v nadpisech kapitol.

Ke kapitole 1: Východiskem je pojem incidenční struktury, definované jako dvojice množin $\mathfrak{P}$ (množiny „bodů"), $\mathfrak{G}$ (množiny „přímek") spolu s binární relací $\mathrm{I} \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{G}$ (incidencí), při čemž platí implikace $x_i \mathrm{I} y_k$; $i, k = 1, 2 \Rightarrow$ buďto $x_1 = x_2$ anebo $y_1 = y_2$. Speciální incidenční strukturou je projektivní rovina a afinní rovina. U projektivní roviny dva různé body jsou incidentní vždy s jedinou přímkou, ke dvěma různým přímkám existuje vždy jediný bod s oběma incidentní a konečně existují čtyři body, z nichž žádné tři nejsou incidentní s touž přímkou. Afinní rovina vznikne z projektivní vypuštěním jedné (nevlastní) přímky a všech s ní incidentních (nevlastních) bodů. Konfigurační větou rozumí se implikace pro body $X_1, \ldots, X_n$ a přímky $p_1, \ldots, p_\gamma$ incidenční struktury, při níž z určitých vztahů $X_a \neq X_b$, $p_\alpha \neq p_\beta$, $X_c \mathrm{I} p_\gamma$, $X_d$ non $\mathrm{I}\, p_\delta$ vyplývají další incidence $X_e \mathrm{I} p_\varepsilon$ ($a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ jsou příslušné indexy). Z daných bodů a přímek některé vystupují jako pevné, ostatní jako proměnné.

Metodou, kterou podal v r. 1945 M. Hall, lze přiřadit každé afinní rovině „souřadnice" tak, že každý bod je representován uspořádanou dvojicí souřadnic a incidence bodů s touž přímkou je vystižena Hallovou ternární operací definovanou na množině souřadnic. Specialisací této ternární operace lze za dalších předpokladů dojít k obvyklým operacím sčítání (+) a násobení (.). Profesor Pickert Hallovu metodu poněkud pozměnil pro účely své knihy.

---

[2]) Lupa je kvasigrupa s neutrálním prvkem; název lupa (podle anglického *loop*) zavedl u nás profesor O. Borůvka.

Ke kapitole 2: Incidenční struktura spolu s $n$-ticí navzájem různých bodů $A_1, \ldots, A_n$ nazývá se $n$-tkání, když: (1) každá přímka je incidentní s jedním z bodů $A_1, \ldots, A_n$, (2) každý z bodů $A_1, \ldots, A_n$ je incidentní s některým bodem různým od $A_1, \ldots, A_n$, (3) existuje bod $B$, který je různý od $A_1, \ldots, A_n$, přičemž žádná z trojic $B, A_i, A_j$ $(i \neq j)$ není incidentní s touž přímkou. Body 3-tkáně lze vyjádřit jako uspořádané dvojice „souřadnic", přičemž incidenci bodů s touž přímkou odpovídá binární operace (podle potřeby buďto sčítání nebo násobení); množina souřadnic spolu s touto operací je lupou. 4-tkáním pak odpovídají dvojité lupy, tj. množiny se sčítáním a násobením, jejichž aditivní systém i multiplikativní systém je lupou a platí identita $x \, . \, 0 = 0 \, . \, x = 0$, kde 0 je aditivní neutrální prvek. Konfiguračním větám pro tkáně odpovídají důležité algebraické zákony, např. asociativita, komutativita, existence inversního prvku ap.

Ke kapitole 3: Věta Desarguesova o dvou „perspektivních trojúhelnících" je dobře známa z elementů geometrie. Je to zvláštní případ konfigurační věty.

Ke kapitole 4: Roviny, v nichž platí bez výjimky Desarguesova věta, nazývají se desarguesovské.. Patří k základním poznatkům, že Hallův souřadnicový systém je pro desarguesovské roviny asociativním tělesem, tj. množinou se sčítáním a násobením, přičemž aditivní systém je abelovskou grupou, multiplikativní systém grupou a platí oba distributivní zákony pro násobení nad sčítáním.

Ke kapitole 5: Věta Pappova, vyšetřovaná v této kapitole, je rovněž dobře známa z elementů geometrie (též pod názvem věta Pappova-Pascalova); její platnost v afinní rovině má za následek, že Hallův souřadnicový systém je komutativním tělesem.

Ke kapitole 6: Obsah této kapitoly je ryze algebraický a je věnován pojmu alternativního tělesa, které se od asociativního tělesa liší tím, že asociativní zákon pro násobení je nahrazen alternativním zákonem $(xx)y = x(xy)$, $x(yy) = (xy)y$.

Ke kapitole 7: Moufangovskými rovinami nazývá autor roviny, v nichž platí bez výjimky malá Desarguesova věta (při ní „střed perspektivity" je incidentní s „osou perspektivity"). Hallovy souřadnicové systémy moufangovských rovin jsou alternativními tělesy.

Ke kapitole 8: Translační roviny jsou ty afinní roviny, v nichž platí malá věta Desarguesova pro nevlastní „osu perspektivity". Hallův souřadnicový systém translační roviny je kvasitělesem (též Veblen-Wedderburnovým systémem). Kvasitěleso je množina se sčítáním a násobením; její aditivní systém je abelovskou grupou, jejíž multiplikativní systém je lupou a pro niž platí dále: $(x + y) z = xz + yz$, $x \, . \, 0 = 0$ (0 je neutrální prvek pro sčítání), rovnice $xa = xb + c$ je pro $a \neq b$ jednoznačně řešitelná.

Ke kapitole 9: V afinní rovině s uspořádáním jsou všecky přímky (jako bodové množiny) uspořádány navzájem konsistentně, což znamená, že paralelním promítáním se uspořádání dvou přímek buďto zachovává anebo mění v opačné. Projektivní rovinu s uspořádáním definuje autor poněkud složitěji užitím relace oddělování dvou bodových dvojic na přímce.

Ke kapitole 10: V topologické rovině je jak množina bodů tak i množina přímek topologickým prostorem; operace spojování dvou bodů a protínání dvou přímek jsou přitom vzhledem k zavedeným topologiím spojité. V knize Pickertově nejsou ještě zahrnuty první podrobnější výsledky o topologických rovinách od L. A. Skornjakova (1954) a H. Salzmanna (1957).

Ke kapitole 11: Möbiusovy sítě jsou desarguesovské projektivní roviny „vytvořené" čtyřmi body, z nichž žádné tři nejsou incidentní s touž přímkou.

Ke kapitole 12: Roviny s konečným počtem bodů nazývají se konečné. Jejich studium souvisí se studiem Steinerových systémů, blokových plánů a diferenčních množin; výklad těchto pojmů přesahuje rámec stručné recense.

LITERATURA

[1] *Л. А. Скорняков*, Проективные плоскости, Усп. мат. наук *6*, № *6* (*46*), 1951, 112—154.
[2] *H. G. Forder*, Coordinates in geometry, Auckland Univ. Coll. Bull., Math. Ser. *41*, No. 1, 1953.
[3] *M. Hall*, Projective planes and related topics, California Inst. of Techn. 1954.
[4] Contributions to geometry, Supplement to the Am. Math. Monthly LXII, No. 7, 1955.
[5] *E. Artin*, Geometric algebra, New York 1957.

*Václav Havel*, Brno

*Jan Vyšín*: **Lineární lomená funkce,** vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1958, 120 stran, 37 obr., cena 4,20 Kčs.

V knižnici Populární přednášky o matematice vyšla po osmnácti překladech jako 19. svazek původní česká populární přednáška, jejímž autorem je Jan Vyšín. Lze souhlasit s autorem v tom, že lineární lomená funkce je vhodným thematem pro populární spis, protože má rozsáhlé použití v matematice, zejména v elementární geometrii.

Knížka je rozdělena do tří kapitol. V kapitole první se probírají algebraické vlastnosti lineární lomené funkce, druhá kapitola pojednává o jejím geometrickém významu (zejména s ohledem na geometrii projektivní) a konečně ve třetí kapitole je prodiskutován geometrický význam lineární lomené funkce komplexní proměnné. Výklad navazuje na středoškolskou matematiku, takže brožuru mohou s porozuměním číst i žáci nejvyšších tříd jedenáctiletky. Některá tvrzení, jejichž důkaz by vyžadoval komplikovanějších úvah, nejsou v knížce dokázána.

Pokud se týká nedopatření, která se v brožuře vyskytují, chci upozornit na záměnu obrázků na straně 19 a dále na straně 72. V příkladě 8 na stranách 57—59 je početní chyba, která ovlivnila i úvahy v desátém příkladě (strana 63). Nesprávně jsou očíslovány výsledky cvičení ke kapitole I (na straně 114) a obdobná závada je též na straně 118 u výsledků ke kapitole III.

*Jiří Sedláček*, Praha