Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

REFERÁTY

TEORIE KŘIVKY KLEINOVA PĚTIROZMĚRNÉHO PROSTORU A JEJÍ APLIKACE NA SEGREHO KONGRUENCE W

(Vlastní referát z přednášky přednesené dne 24. února 1958 v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků".)

C. Segre ukázal v práci [2] synthetickým způsobem, že každé kongruenci W s fokálními plochami přímkovými (v dalším nazývejme tyto kongruence *Segreho kongruencemi*) trojrozměrného prostoru lze v Kleinově pětirozměrném prostoru přiřadit jistou rozvinutelnou plochu. Segreho kongruence W, která nenáleží lineárnímu komplexu a jejíž asociovaná kongruence rovněž nenáleží lineárnímu komplexu, je v Kleinově prostoru representována rozvinutelnou plochou tečen prostorové křivky, která neleží v podprostoru Kleinova prostoru. Snadno se vidí, že studium kongruencí W uvedeného typu je ekvivalentní se studiem rozvinutelných ploch, resp. jejich hran vratu, které neleží v podprostoru Kleinova pětirozměrného prostoru. Autor se v přednášce omezil na uvedené kongruence.

Buď dán v projektivním Kleinově prostoru $\bar{P}_5$ oblouk křivky $\bar{C} \equiv \{x(\tau)\}$, (který neleží v podprostoru prostoru $\bar{P}_5$), v jehož každém bodě existují jednoznačně lineární oskulační prostory $\bar{P}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $\bar{P}_1$ je tečnou), které mají s křivkou $\bar{C}$ styk právě i-tého řádu; nechť žádný bod uvažovaného oblouku křivky $\bar{C}$ neleží na Kleinově hyperkvadrice Γ (K-kvadrice Γ) a prostory $\bar{P}_i$ nechť nejsou tečnými prostory K-kvadriky Γ, která je dána rovnicí $x \,.\, x \equiv 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0$. K-kvadrika určená předcházející rovnicí buď kladně orientována (Γ^+); bod $x \in \bar{P}_5$ je kladný (záporný) vzhledem ke K-kvadrice Γ^+, jestliže $x \,.\, x > 0$ ($x \,.\, x < 0$). Faktor homogenity souřadnic bodů křivky $\bar{C}$ a nový parametr, který označme t, lze volit tak, že pro aritmetickou křivku $x_i = x_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$) platí $x \,.\, x = \varepsilon_1$, $x' \,.\, x' = \varepsilon_2$ ($\varepsilon_j^2 = 1$, $j = 1, 2$), kde čárky značí derivace podle parametru t. Říkejme, že křivka $x_i = x_i(t)$ kladně orientovaná s rostoucím parametrem t je dána v normálním tvaru. V každém bodě této křivky existuje oskulační simplex, který je současně polárním ke K-kvadrice Γ^+, jehož vrcholy jsou aritmetické body, ${}^1N$, ${}^2N$, ${}^3N$, ${}^4N$, ${}^5N$, ${}^6N$, které lze určit až na znaménka π_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) a které splňují relace ${}^iN \,.\, {}^iN = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i^2 = 1$); platí Frenetovy vzorce

$$
\begin{aligned}
{}^1N' &= \pi_2\,{}^2N\,, \\
{}^2N' &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\pi_2\,{}^1N + \varepsilon_1\pi_3K_1\,{}^3N\,, \\
{}^3N' &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\pi_3K_1\,{}^2N + \varepsilon_2\pi_4K_2\,{}^4N\,, \\
{}^4N' &= -\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\pi_4K_2\,{}^3N + \varepsilon_3\pi_5K_3\,{}^5N\,, \\
{}^5N' &= -\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\pi_5K_3\,{}^4N + \varepsilon_4\pi_6K_4\,{}^6N\,, \\
{}^6N' &= -\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\pi_6K_4\,{}^5N\,,
\end{aligned}
$$

kde $K_i = \sqrt{|{}^{i+1}N' \,.\, {}^{i+1}N' - \varepsilon_iK_{i-1}^2|}$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $K_0 = 1$) a čárky značí derivace podle parametru t. Tři z bodů ${}^iN$ jsou kladné a tři záporné vzhledem ke K-kvadrice Γ^+. Funkce $K_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a znaménka ε_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) tvoří úplný systém projektivních diferenciálních invariantů orientované křivky prostoru $\overline{P}_5$ vzhledem k podgrupě projektivních unimodulárních transformací (které reprodukují K-kvadriku Γ^+), která odpovídá grupě unimodulárních projektivních transformací trojrozměrného projektivního prostoru P_3. Uvažované orientované křivce odpovídá v prostoru P_3 Segreho kongruence W, určená jako orientovaná vrstva regulů až na unimodulární projektivní transformace.

Křivka, která representuje asociovanou kongruenci ke kongruenci dané, je opsána bodem ${}^6N$, jehož parametr u je vázán s parametrem t diferenciální rovnicí $du = K_4 \, dt$. Invarianty $\tilde{K}_j$ a $\tilde{\varepsilon}_i$ ($j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, 2, \ldots, 6$) křivky, která representuje asociovanou kongruenci, jsou vyjádřeny pomocí invariantů původní křivky relacemi $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i}$ a $\tilde{K}_j = \frac{K_{4-j}}{K_4}$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby fokální plochy Segreho kongruence W, resp. kongruence asociované byly reálné, je $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, resp. $\varepsilon_5 = -\varepsilon_6$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby paprsky kongruence a tím současně kongruence asociované byly reálné, je, aby se znaménka $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ navzájem nerovnala.

V další části přednášky navázal autor na práci [1]. Segreho kongruence W, která je určena řídícími křivkami C_y, C_z a $C_{\bar{y}}, C_{\bar{z}}$ fokálních ploch (křivky jsou opsány body $y, z, \bar{y}, \bar{z}$, jejichž parametr v je t. zv. normálním parametrem, viz [1]), přísluší v prostoru $\overline{P}_5$ křivka v normálním tvaru, opsaná bodem $x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})]$ $(\lambda^2 = 1, \pi^2 = 1$, α je funkce parametru v), jehož parametr t je vázán s parametrem v diferenciální rovnicí $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2|S|}$. Invarianty této křivky jsou s invarianty $\omega, \pi, \varepsilon = Q^2 - PR$, $H = Q'^2 - P'R'$, $\alpha \neq 0$, $S \neq 0$, $K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix}$ $(\omega^2 = 1, \pi^2 = 1, \varepsilon^2 = 1, H \neq 0, \alpha \neq 0, S \neq 0, K \neq 0$ funkce v) kongruence W (viz [1]) vázány relacemi

$$K_1 = \left|\frac{\alpha}{S}\right|, \quad K_2 = \frac{1}{|S|}, \quad K_3 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|S|}, \quad K_4 = \frac{|K|}{4|SH|},$$

$$\varepsilon_1 = -\pi\omega, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon, \quad \varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H, \quad \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H.$$

Ukazuje se, že změnou znamének invariantů α, S, K v práci [1] se kongruence jako geometrický útvar nemění. Kongruence W neexistuje, jestliže pro invarianty v práci [1] platí $\varepsilon = \operatorname{sgn} H = -1$, neboť tato relace má za následek $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6$, což je spor s tvrzením, že tři ze znamének ε_i jsou kladná a tři záporná.

LITERATURA

[1] *J. Klapka*: O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými, Spisy přír. fak. MU v Brně, č. *69*, 1926.

[2] *C. Segre*: Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate, Accad. Reale delle Sc. di Torino, *42*, 1906—1907, 539—550.

Vladimír Horák, Brno