Časopis pro pěstování matematiky

Karel Čulík

O homomorfismech částečně uspořádaných množin a svazů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 4, 460--461

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117283`

potom $\|\psi(E+Q)-\psi(E)\|_X < \varepsilon$, při čemž $E+Q$ značí množinu, která vznikne posunutím množiny E o vektor Q.

Akademik Sobolev ukázal na příkladě, že existují funkce, které jsou absolutně spojité, ale nejsou spojité při posunutí, t. j. ukázal, že neplatí a)$\Rightarrow$ b) a vyslovil domněnku, že z b) plyne a).

Funkci $\psi(E)$ nazveme zobecněnou derivací $\dfrac{\partial\varphi(E)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, jestliže pro každou funkci v, α-kráte spojitě diferencovatelnou a rovnou nule v blízkosti hranice oblasti Ω, platí

$$\int_\Omega \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\,\mathrm{d}\varphi(E) = (-1)^\alpha \int_\Omega v\,\mathrm{d}\psi(E).$$

Hlavní výsledek, ke kterému přednášející dospěl, je ten, že věty o vnoření I a II platí i pro množinové funkce, které náleží do prostoru Ψ_p. Přitom je ovšem nutné zachovat jistou opatrnost při formulaci vět. Přesné znění věty analogické I je toto:

I′. *Je-li $\psi \in \Psi_p$ množinová funkce definovaná na měřitelných podmnožinách oblasti Ω taková, že* $\left\|\dfrac{\partial^l\psi(E)}{\partial x_1^{l_1}\dots\partial x_n^{l_n}}\right\|_{\Phi_p} < K$ *a je-li $lp > n$, potom $\psi(E)$ je integrál ze spojité funkce.*

Podobně lze formulovat i větu analogickou II; přednášející se při tom omezil jen na případ $s = n$.

*

S. L. Sobolev přednášel ještě v matematické obci pražské dne 18. dubna 1957 na théma „Nová formulace okrajových úloh u eliptických diferenciálních rovnic".

V této přednášce podrobně rozvedl výsledky, kterých dosáhl společně s M. I. Višikem a které uveřejnil v článku „Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных", ДАН СССР, Т. 111, № 3, 1956, 521—523.

Rudolf Výborný, Praha.

O HOMOMORFISMECH ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN A SVAZŮ

(Vlastní referát o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků" dne 8. dubna 1957 v Brně.)

Částečně uspořádanou množinou M rozumíme neprázdnou množinu M, na níž je definována asymetrická a transitivní binární relace $<$ (srv. B. Dushnik — E. W. Miller: Partially ordered sets, Amer. Jour. of Math. *63* (1941), 600—610). Je-li $x < y$ nebo $x = y$, píšeme $x \leqq y$ a neplatí-li ani $x \leqq y$ ani $y \leqq x$, píšeme $x \parallel y$.

O částečně uspořádané podmnožině $P \subset M$ říkáme, že je *vložená* (v částečně uspořádané množině M), jestliže platí

$$z \in M - P \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \quad \text{a} \quad \{z < x \Leftrightarrow z < y\} \quad \text{pro každé } x, y \in P\,. \tag{1}$$

Vzhledem k (1) lze na každém rozkladu $\overline{M}$ na částečně uspořádané množině M, který je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny v M, definovat t. zv. *faktorovou částečně uspořádanou množinu* $\overline{M}$ takto

$$P < Q\,;\quad P, Q \in \overline{M} \Leftrightarrow x < y\,;\quad x \in P\,,\ y \in Q\,. \tag{2}$$

Zobrazení φ částečně uspořádané množiny M na částečně uspořádanou množinu N, které splňuje podmínky

$$x < y\,;\quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)\,, \tag{3}$$

$$x \parallel y\,;\quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y)\,, \tag{4}$$

je isomorfismem. Splňuje-li podmínku

$$x < y\ ;\quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)\ , \tag{3'}$$

je isotonním zobrazením. Splňuje-li podmínku (3) a podmínku

$$x \parallel y\ ;\quad x, y \in M \Rightarrow \quad \text{buď} \quad \varphi(x) \parallel \varphi(y) \quad \text{nebo} \quad \varphi(x) = \varphi(y)\ , \tag{4'}$$

je *homomorfismem* definovaným pro obecné grafy (srv. K. ČULÍK: Zur Theorie der Graphen, Čechoslov. mat. žur., v tisku).

Zobrazení φ, které splňuje podmínky (3′) a (4) příp. (3) a (4′), příp. (3′) a (4′), označujeme jako **A**- příp. **B**- příp. **C**-homomorfismus. Rozklad na částečně uspořádané množině M, vytvořený **A**- příp. **B**- příp. **C**-homomorfismem φ, se nazývá **A**- příp. **B**- příp. **C**- vytvořující rozklad a podobně se označuje na takovémto rozkladu definovaná faktorová částečně uspořádaná množina.

Především platí:

Věta 1. *Rozklad $\overline{M}$ na částečně uspořádané množině M je a)* **A**-, *příp.* b) **B**-, *příp.* c) **C**-*vytvořujícím rozkladem právě tehdy, když* a) *je rozkladem ve vložené řetězce, příp.* b) *je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny, jejichž každé dva různé prvky jsou navzájem nesrovnatelné, příp.* c) *je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny.*

Theorie **A**-homomorfismu je úplně vybudována a ukazuje se, že platí skoro všechny věty obdobné pro theorii obecného grafového homomorfismu (t. j. zde **B**-homomorfismu). Částečně uspořádanou množinu, která není řetězcem, nazvěme **A**-*jednoduchou,* jestliže na ní existuje právě jedna **A**-faktorová částečně uspořádaná množina. Řetězec nazýváme **A**-*jednoduchým*, jestliže je jednoprvkový. Pak na příklad platí:

Věta 2. *Každá částečně uspořádaná množina je* **A**-*homomorfním vzorem právě jedné (až na isomorfismus) t. zv. její* **A**-*jednoduché částečně uspořádané množiny.*

Z věty 1. a 2. plyne, že každá částečně uspořádaná množina je jednoznačně (až na isomorfismus) charakterisována svojí **A**-jednoduchou částečně uspořádanou množinou, jejímuž každému prvku je přiřazen právě jeden ordinální typ (soustava těchto ordinálních typů je t. zv. **A**-homomorfní charakteristikou dané částečně uspořádané množiny).

Dále na příklad platí:

Věta 3. *Částečně uspořádaná množina M je* **A**-*jednoduchá právě tehdy, když pro každý její* **A**-*homomorfní obraz N platí $M \doteq N$.*

Na rozdíl od **A**- a **B**-homomorfismu je theorie **C**-homomorfismu mnohem chudší, a to proto, že **C**-homomorfismus je více podobný homomorfismu theorie grup. Pak i pojem **C**-jednoduchosti zcela odpovídá pojmu jednoduchosti grupy. Přes tyto závady se zdá, že právě **C**-homomorfismus je nejvhodnějším zobrazením pro studium částečně uspořádaných množin i svazů, neboť je nejobecnějším zobrazením (podle věty 1.), které připouští zavést (netriviálně) pojem faktorové částečně uspořádané množiny a také faktorového svazu.

Platí na příklad:

Věta 4. **C**-*homomorfismus φ, t. j. isotonní zobrazení, které splňuje* (4′), *je homomorfismem vzhledem ke spojení příp. k průseku právě tehdy, když splňuje podmínku* (5) *příp.* (6), *která je tvaru*

$$x \parallel y\ ,\quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \vee y) = \varphi(y)\ , \tag{5}$$

$$x \parallel y\ ,\quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \wedge y) = \varphi(x)\ . \tag{6}$$

Pojem vložené částečně uspořádané množiny ukazuje cestu ke studiu svazů nikoli jako množin s ternárními relacemi, t. j. s operacemi (tedy analogicky k theorii grup), nýbrž jako množin s binární relací (tedy analogicky k theorii grafů).

Karel Čulík, Brno.