Vladimír Horák

K jedné metodě užívané při výpočtu hodnot komplexních kořenů algebraické rovnice metodou Graeffeovou

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 4, 440--453

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117279`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

K JEDNÉ METODĚ UŽÍVANÉ PŘI VÝPOČTU HODNOT KOMPLEXNÍCH KOŘENŮ ALGEBRAICKÉ ROVNICE METODOU GRAEFFEOVOU

VLADIMÍR HORÁK, Brno.

(Došlo dne 6. října 1956.) DT:512.35

Graeffeovou metodou můžeme určit pro danou algebraickou rovnici absolutní hodnoty reálných a komplexních kořenů. K určení komplexních kořenů z těchto absolutních hodnot užíváme různých metod, které jsou však tím komplikovanější, čím více komplexních kořenů daná rovnice obsahuje. V této práci je provedeno propracování jisté metody pro určení komplexních kořenů dané algebraické rovnice. Poněvadž uvedené výsledky se nemění, má-li rovnice také kořeny reálné, budeme se zabývat jenom rovnicemi, které mají vesměs komplexní kořeny.

Předpokládejme v dalším, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty $2n$-tého stupně

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0 \tag{1}$$

má samé komplexní kořeny, které jsou jednoduché a jejichž absolutní hodnoty můžeme určit metodou Graeffeovou.

Věta 1. *Nechť absolutní hodnoty kořenů rovnice* (1) *jsou*

$$r_i = \sqrt{\xi_i\bar{\xi}_i}\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n\,, \tag{2}$$

kde ξ_i a $\bar{\xi}_i$ značí čísla komplexně sdružená; nechť tyto absolutní hodnoty splňují nerovnosti

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_n\,. \tag{3}$$

Rozvineme-li (1) *podle mocnin proměnné*

$$y = x - u\,, \tag{4}$$

kde pro u platí buď

$$0 < u < U = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(r_{i+1} - r_i)\,,\ r_{i+1} \neq r_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{5}$$

jestliže se všechna r_i navzájem nerovnají, nebo

$$0 < u\,, \tag{5'}$$

jestliže r_i jsou vesměs sobě rovna, a vypočteme-li absolutní hodnoty kořenů $\eta_i = \xi_i - u$, $\bar{\eta}_i = \bar{\xi}_i - u$ upravené rovnice

$$a_0 y^{2n} + \alpha_1 y^{2n-1} + \ldots + \alpha_{2n} = 0\,, \tag{6}$$

pak pro tyto absolutní hodnoty

$$\varrho_i = \sqrt{\eta_i \bar{\eta}_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

platí

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_n \tag{8}$$

a jednotlivé komplexně sdružené kořeny rovnice (1) *obdržíme jako kořeny n kvadratických rovnic*

$$x^2 + \frac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u}\, x + r_i^2 = 0\,, \tag{9}$$

kde ϱ_i a r_i jsou hodnoty stojící na témž pořadovém místě v nerovnostech (3) *a* (8).

Důkaz. Jestliže $r_i < r_{i+1}$ (i lib.), pak z trojúhelníkové nerovnosti a užitím (5) plyne ihned $\varrho_i < \varrho_{i+1}$. Jestliže

$$r_i = r_{i+1} \quad (i \text{ lib.})\,, \tag{10}$$

musí být amplitudy φ_i a φ_{i+1} příslušných kořenů různé, poněvadž násobné kořeny vylučujeme a pro amplitudy příslušných kořenů s kladnou imaginární částí platí $0 < \varphi_i < \varphi_{i+1} < \pi$ a tedy

$$\cos \varphi_i > \cos \varphi_{i+1}\,. \tag{11}$$

Obecně ale je

$$\varrho_j^2 = (\xi_j - u)(\bar{\xi}_j - u) = r_j^2 - 2ur_j \cos \varphi_j + u^2\,, \tag{12}$$

čili plyne z (10) a (11) opět $0 < \varrho_i < \varrho_{i+1}$. Dají se tedy hodnoty r_i a ϱ_i jednoznačně přiřadit a platí $\xi_i \bar{\xi}_i = r_i^2$ a podle (12) $\xi_i + \bar{\xi}_i = -\dfrac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u}$, čili ξ_i a $\bar{\xi}_i$ jsou kořeny kvadratických rovnic (9).

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 a nechť h je první index, pro nějž platí $r_{h-1} < r_h$. Je-li řád čísla r_i roven p_i, pak číslo U definované v* (5) *je nejvýše řádu p_h. Poněvadž r_i mohou být vypočtena na konečný počet cifer, může být řád čísla U roven až nejnižšímu z řádů poslední od nuly různé cifry čísla r_{j-1} nebo r_j, pro něž platí $r_{j-1} < r_j$.*

Důkaz. Řád čísla $\dfrac{r_i - r_{i-1}}{2}$ je nejvýše p_i, ale může být roven až řádu poslední od nuly různé cifry čísla r_i nebo r_{i-1}. Odtud je tvrzení zřejmé.

Důsledek. Jestliže vezmeme místo rovnice (1) rovnici reciprokou, pak absolutní hodnoty $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kořenů této rovnice jsou s absolutními hodnotami (2) kořenů rovnice (1) ve vztahu

$$0 < s_n \leqq s_{n-1} \leqq \ldots \leqq s_1\,,$$

kde $s_i = 1/r_i$; nechť h je poslední index, pro nějž platí $s_{h+1} < s_h$; je-li řád čísla s_i roven q_i, je číslo $U = \frac{1}{2}$ Min $(s_i - s_{i+1})$, $s_i \neq s_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, nejvýše řádu q_h.

Z důvodů praktických je nutné klást na parametr u ještě další požadavek. Mohlo by se totiž stát, že hodnota u je tak malá, že v rozvoji (6), který je tvaru

$$a_0 y^{2n} + \left[a_1 + \binom{2n}{1} a_0 u\right] y^{2n-1} + \left[a_2 + \binom{2n-1}{1} a_1 u + \binom{2n}{2} a_0 u^2\right] y^{2n-2} + \\ + \ldots + [a_{2n} + a_{2n-1} u + \ldots + a_1 u^{2n-1} + a_0 u^{2n}] = 0\,, \qquad (6')$$

ovlivní tato hodnota koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ rovnice (1) až na místech, jejichž řád je značně nižší než řád jednotlivých koeficientů, a pak by se koeficienty rovnice (6), jestliže bychom je museli zaokrouhlit, vůbec nebo téměř vůbec nelišily od koeficientů a_i rovnice (1) a tím bychom pro ϱ_i obdrželi značně nepřesné výsledky a také velké chyby pro kořeny. Koeficienty v rovnici (6') jsou tvaru

$$\beta = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} + \ldots + b_m\,, \qquad (13)$$

při čemž jednotlivé sčítance mohou být čísla různých řádů a s různým počtem cifer, takže výsledný koeficient β může mít značný počet cifer a bude nutné jej pro další výpočty zaokrouhlit. Počet cifer nějakého čísla definujme takto:

Definice 1. *Říkáme, že číslo C má γ cifer, jestliže rozdíl řádů první a poslední od nuly různé cifry zvětšený o jednotku je roven γ.*

Věta 3. *Nechť čísla $b_0, b_1, \ldots, b_m$, z nichž alespoň dvě jsou od nuly různá, mají po řadě řády $p_0, p_1, \ldots, p_m$, při tom číslům $b_i = 0$ řád nepřisuzujeme. Utvoříme-li číslo* (13), *kde $u = 10^p$, p celé, pak řády jednotlivých sčítanců (pokud $b_i \neq 0$) jsou*

$$q_0 = p_0 + mp\,, \quad q_1 = p_1 + (m-1)\,p\,, \ldots, q_m = p_m\,. \qquad (14)$$

Dá se určit interval $\langle \bar{p}_\beta, \bar{\bar{p}}_\beta \rangle$ tak, že pro každé p mimo tento interval čísla (14) *v napsaném pořadí tvoří monotonní posloupnost, která je pro $p < \bar{p}_\beta$ rostoucí a pro $p < \bar{\bar{p}}_\beta$ klesající. Jsou-li pouze dvě z čísel b_i různá od nuly, pak $\bar{p}_\beta = \bar{\bar{p}}_\beta$ a místo intervalu máme jediný bod.*

Důkaz. Je zřejmé, že sčítance v (13) nabývají pro $u = 10^p$ řády uvedené v (14). Aby se dvě z čísel (14) rovnala, na př. q_j a q_k $(j \neq k)$, musela by mít rovnice

$$p_j + (m-j)\,p = p_k + (m-k)\,p \qquad (15)$$

celočíselné řešení pro p; obecně (15) celočíselné řešení nemá a označme proto její kořen p_{jk} $(j \neq k)$.

Jestliže platí nerovnosti

$$0 < m - j < m - k\,, \quad \bar{p} > p_{jk}\,, \qquad (16)$$

pak je

$$p_j + (m-j)\,\bar{p} < p_k + (m-k)\,\bar{p}\,. \qquad (17)$$

Stejně pro $0 < m - j < m - k$, $\bar{p} < p_{jk}$ platí (17) s opačným znaménkem nerovnosti.

Vypočteme-li všechna možná čísla p_{jk}, obdržíme množinu čísel, která není prázdná. Označme nejmenší číslo této množiny $\bar{p}_\beta$ a největší $\bar{\bar{p}}_\beta$; tato dvě čísla splývají v případě, že pouze dvě čísla b_i jsou různá od nuly. Je-li nyní $p > \bar{\bar{p}}_\beta = \underset{j,k}{\mathrm{Max}}\, p_{jk}$, pak pro čísla q_i platí podle (17) $q_0 < q_1 < \ldots < q_m$ a podobně pro $p < \bar{p}_\beta = \underset{j,k}{\mathrm{Min}}\, p_{jk}$ platí $q_0 > q_1 > \ldots > q_m$. Snadno se vidí, že čím více se p liší od p_{jk}, tím více se řády q_j a q_k od sebe liší.

Důsledek. Podle předcházející věty můžeme pro každý koeficient rovnice (6′) určit interval $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$; volíme-li řád p čísla u tak, že je $p < \underset{i}{\mathrm{Min}}\, \bar{p}_{\alpha_i}$, pak zřejmě sčítance nejvyššího řádu v jednotlivých koeficientech budou právě koeficienty a_i původní rovnice, pokud jsou různé od nuly, a poněvadž řád dalšího sčítance je menší, proto nemusí se žádný nebo většina koeficientů, které zaokrouhlíme, lišit od koeficientů rovnice původní.

Stejně volíme-li řád p čísla u tak, že je $p > \underset{i}{\mathrm{Max}}\, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i}$, potom sčítanec nejvyššího řádu v koeficientu α_i bude právě $\binom{2n}{i} a_0 u^i$ a tedy po zaokrouhlení α_i nemusela by se rovnice (6′) vůbec lišit od rovnice $a_0(y + u)^{2n} = 0$, je-li řád p dosti vysoký. Z těchto důvodů je třeba volit řád p čísla u v intervalu

$$\langle \underset{i}{\mathrm{Min}}\, \bar{p}_{\alpha_i}\,, \quad \underset{i}{\mathrm{Max}}\, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i}\,. \rangle \tag{18}$$

Abychom vhodně zvolili číslo u, bude výhodné řídit se zásadami následujícího pravidla:

Pravidlo 1. a) Řád čísla u volíme v intervalu (18) a to tak, aby pokud možno ležel v průniku všech a nebo alespoň většiny z intervalů $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$.

b) V jednotlivých intervalech, pokud jejich části patří do průniku, snažíme se určit řád p tak, aby po zaokrouhlení α_i nebyl roven ani prvnímu, ani poslednímu sčítanci. Z toho důvodu je výhodné sestavit si pro každý koeficient α_i tabulku tvaru

$p =$	$p_0 + ip$	$p_1 + (i-1)p$	$\ldots$		$p_{i-1} + p$	p_i
$[\bar{p}_{\alpha_i}]$						
$[\bar{p}_{\alpha_i}] + 1$						
$\vdots$						
$[\bar{p}_{\alpha_i}] + k$				P_{ki}		
$\vdots$						

kam do jednotlivých řádků napíšeme řády, které nabývají jednotliví sčítanci pro celá čísla z intervalu $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$. V každém řádku bude alespoň jedno číslo největší, které označme P_{ki}. Předpokládejme, že koeficienty pro výpočet Graeffeovou metodou zaokrouhlíme na q cifer. Pak pro každý koeficient α_i určíme vhodný řád čísla u tak, aby v intervalu $\langle P_{ki} - q, P_{ki} \rangle$ bylo nejvíce cifer ze všech cifer toho řádku. Tím docílíme, že při zaokrouhlení vypustíme pro tento koeficient nejméně sčítanců.

Máme-li určen pro každý koeficient α_i vhodný řád čísla u, snažíme se z těchto řádů vybrat ten, který vyhovuje nejvíce koeficientům.

c) V případě, že z intervalů $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$ nemá vůbec žádný nebo jen nejvýše vždy dva z nich společnou část, nelze na základě předcházejících úvah žádné pravidlo vyslovit.

Číslo U vypočteme přibližně tak, že rovnici (1) řešíme metodou Graeffeovou a koeficienty rovnic R^2, R^4, ... počítáme jen užitím logaritmického pravítka. Z vypočtených absolutních hodnot kořenů určíme pak U a u.

Za číslo u můžeme také volit některé z čísel $2 \,.\, 10^{p-1}, \ldots, 9 \,.\, 10^{p-1}$, 10^p, $2 \,.\, 10^p, \ldots, 9 \,.\, 10^p$, je-li to výhodnější.

Příklad 1. Mějme rovnici 10-tého stupně a nechť její koeficienty jsou většinou téhož řádu q, ale při tom všechny nechť leží na př. v intervalu $\langle 5 \,.\, 10^{q-1}, 5 \,.\, 10^{q+1} \rangle$. Pak binomická čísla vyskytující se v koeficientech rovnice (6') pro $n = 5$ jsou řádů 0, 1 a 2, což značí, že koeficienty sčítanců jsou přibližně řádů q, $q + 1$, $q + 2$. Poněvadž číslo $u = k \,.\, 10^p$ ($1 \leqq k \leqq 9$, celé) se vyskytuje v koeficientech jako součinitel v mocninách 0 až 10, bude většinou nejvýhodnější volit řád $p = 0$. Někdy snad bude také výhodné volit $p = 1$ nebo $p = -1$.

Poznámka 1. Předcházejících výsledků užijeme buď na rovnici (1), nebo na rovnici k ní reciprokou podle toho, pro kterou je volba čísla u příhodnější. Tímto způsobem určený řád p čísla u porovnáme s řádem čísla U, které je určeno v (5). Je-li nyní $0 < u < U$, pak volíme řád čísla u podle pravidla 1 a věta 1 dává uvedené výsledky.

Může však nastat případ, že řád čísla U je takový, že pro zvolené u podle pravidla 1 je $U < u = 10^p$ a pro $u < U$ rovnice (6) se málo liší od rovnice (1). Ale řád čísla U závisí na řádech čísel $\frac{r_{i+1} - r_i}{2}$. Zabývejme se proto v dalším otázkou, jak se mění přiřazení hodnot r_i a ϱ_i v případě, že vynecháme při určení čísla U některý rozdíl $r_{j+1} - r_j$ proto, že je příliš malý. Je-li ale rozdíl $r_{j+1} - r_j$ příliš malý, znamená to, že buď kořeny ξ_j a ξ_{j+1} a podobně komplexně sdružené kořeny leží co do absolutní hodnoty blízko sebe, anebo dokonce leží v blízkém okolí, čili, že i jejich amplitudy se od sebe málo liší.

Lemma. *Nechť jsou ξ_j a ξ_k dva libovolné kořeny rovnice* (1) *s kladnou imaginární částí. Jestliže se jejich reálné části nerovnají, lze určit právě jedno $u = u_1$ tak, že transformací* (4) *přejdou v kořeny η_j a η_k takové, že jejich absolutní hodnoty ϱ_j a ϱ_k se rovnají; jestliže se jejich imaginární části nerovnají, lze určit právě jedno $u = u_2$ tak, že transformací* (4) *přejdou v kořeny η_j a η_k takové, že jejich absolutní hodnoty ϱ_j a ϱ_k se od sebe co nejvíce liší.*

V Gaussově rovině body $(u_1, 0)$ a $(u_2, 0)$ jsou průsečíky symetrály a spojnice bodů odpovídajících těmto kořenům s reálnou osou.

Podle tohoto lemmatu je zřejmé, že pro dva páry kořenů, jejichž absolutní hodnoty se od sebe málo liší a které leží v blízkém okolí, nedocílíme žádnou transformací (4), aby absolutní hodnoty kořenů transformovaných se od sebe mnoho lišily. Kořeny, které neleží v blízkém okolí se mohou transformovat v kořeny, jejichž absolutní hodnoty se mohou od sebe značně lišit.

Věta 4. *Nechť pro absolutní hodnoty kořenů rovnice* (1) *platí nerovnosti $0 < < r_1 < r_2 < \ldots < r_n$*[1]) *a dále nechť pro absolutní hodnoty dvojic kořenů*

$$\xi_j, \xi_{j+1}\,;\quad \xi_k, \xi_{k+1}\,; \ldots; \xi_m, \xi_{m+1} \tag{19}$$

platí

$$\frac{r_{j+1} - r_j}{2} = \varepsilon_j, \frac{r_{k+1} - r_k}{2} = \varepsilon_k, \ldots, \frac{r_{m+1} - r_m}{2} = \varepsilon_m,$$

kde čísla $\varepsilon_j, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_m$ jsou značně menší než číslo u určené podle pravidla 1 a ostatní rozdíly $\dfrac{r_{i+1} - r_i}{2}$ $(i \neq j, k, \ldots, m)$ jsou větší než toto u.

Rozvineme-li (1) *podle mocnin proměnné $y = x - u$, kde*

$$0 < u < U_1 = \tfrac{1}{2} \operatorname{Min} (r_{i+1} - r_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n - 1\,,\ i \neq j, k, \ldots, m \tag{20}$$

(číslo u je určeno podle pravidla 1) *a vypočteme-li absolutní hodnoty ϱ_i kořenů transformované rovnice* (6), *pak pro ně platí*

$$\begin{aligned} 0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_j, \varrho_{j+1} < \varrho_{j+2} < \ldots < \varrho_k, \varrho_{k+1} < \cdots \\ \cdots < \varrho_m, \varrho_{m+1} < \cdots < \varrho_n \end{aligned} \tag{21}$$

a kořeny

$$\xi_i,\ \ i \neq j, j + 1, k, k + 1, \ldots, m, m + 1 \tag{22}$$

a k nim komplexně sdružené kořeny vypočteme z kvadratických rovnic

$$x^2 + \frac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u} x + r_i^2 = 0\,,\ i \neq j, j + 1, \ldots, m, m + 1\,. \tag{23}$$

Zbývající kořeny se nacházejí mezi kořeny kvadratických rovnic

$$x^2 + \frac{\varrho_p^2 - r_q^2 - u^2}{u} x + r_q^2 = 0\,, \tag{24}$$

---

[1]) Jestliže by se některá r_i rovnala, nemá to žádný význam pro další úvahy.

kde p a q proběhnou všechny možné variace 2. třídy s opakováním ve dvojicích $j, j+1; k, k+1; \ldots; m, m+1$.

Důkaz. Pro dvojice kořenů ξ_p a ξ_q, pro něž platí $\frac{r_q - r_p}{2} \geqq U_1$, plyne jako ve větě 1, že $\varrho_p < \varrho_q$. Ale nerovnost (25) neplatí pouze pro $p = j, k, \ldots, m$, $q = p + 1$, takže si opět jednoznačně odpovídají r_i a ϱ_i, pro něž $i \neq j, j+1, k, k+1, \ldots, m, m+1$. Pro kořeny ξ_j různé od uvedených v (22) je tvrzení zřejmé.

Poznámka 2. Nerovnosti (21) jsou psány s ohledem na jednoznačné přiřazení absolutních hodnot r_i a ϱ_i, takže o ϱ_j a ϱ_{j+1} nelze říci nic, než že obě leží mezi ϱ_{j-1} a ϱ_{j+2} atd.

Důsledek 1. Jestliže mezi absolutními hodnotami r_i je jedna nebo více skupin o dvou nebo více hodnotách r_i, pro něž platí

$$
\begin{gathered}
\frac{r_{j+1} - r_j}{2} = \varepsilon_j' \,; \quad \frac{r_{j+2} - r_{j+1}}{2} = \varepsilon_j'' ; \ldots ; \frac{r_{j+j'} - r_{j+j'-1}}{2} = \varepsilon_j^{(j')} \,; \\
\frac{r_{k+1} - r_k}{2} = \varepsilon_k' \,; \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{r_{m+1} - r_m}{2} = \varepsilon_m' ; \ldots ; \frac{r_{m+m'} - r_{m+m'-1}}{2} = \varepsilon_m^{(m')} \,,
\end{gathered}
\tag{26}
$$

a při tom čísla $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ jsou menší než číslo u určené podle pravidla 1, pak pro určení U_1 ve (20) vezmeme pouze rozdíly po sobě jdoucích r_i mimo uvedené v (26). Kořeny, jejichž absolutní hodnoty r_i se nevyskytují ve vztazích (26), jsou mezi kořeny kvadratických rovnic (24), kde p a q probíhá všechny možné variace 2. třídy s opakováním ve skupinách

$$j, j+1, \ldots, j+j';\; k, k+1, \ldots, k+k';\; \ldots;\; m, m+1, \ldots, m+m'\,.$$

Předcházející úvahy nezávisí na tom, zda zvolíme transformaci (4) nebo transformaci $y = x + u$, kde u bylo určeno podle věty 1 nebo 4.

Důsledek 2. Jestliže absolutní hodnoty ϱ_i ve větě 4 splňují kromě nerovností (21) ještě nerovnosti

$$\varrho_j \leqq \varrho_{j+1} \,; \quad \varrho_k \leqq \varrho_{k+1} \,; \ldots ; \varrho_m \leqq \varrho_{m+1} \,, \tag{27}$$

pak pro hodnoty ϱ_i v (27), pro něž nastane rovnost, máme opět jednoznačné přiřazení. Hodnoty ϱ_i, pro něž platí ostrá nerovnost, můžeme jednoznačně přiřadit, jestliže pro určité i platí $u < \frac{\varrho_{i+1} - \varrho_i}{2}$. Jedná se vlastně o použití věty 1 pro přechod od ϱ_i k r_i.

Předcházející výsledky závisí na počtu cifer aproximací absolutních hodnot kořenů. V dalším odhadneme počet cifer, na něž musíme tyto aproximace počítat, abychom kořeny určili s jistou přesností. Zaveďme si tuto definici:

Definice 2. *Říkejme, že dvě aproximace a a b čísel A a B stejných řádů q mají nejméně m cifer stejných, jestliže platí* $|a - b| < 10^{q-m+1}$; *je-li ještě* $|a - b| \geqq \geqq 10^{q-m}$, *říkejme, že aproximace a a b mají právě m cifer stejných.*

Jestliže platí $|A - a| < 10^{q-m+1}$, *říkejme, že aproximace a čísla A má m cifer správných.*

Věta 5. *Nechť* r_i *je absolutní hodnota kořene* ξ_i *rovnice* (1) *a* ϱ_i *absolutní hodnota kořene* $\eta_i = \xi_i - u$ *rovnice* (6). *Nechť řád čísla* r_i *je* p_i *a číslo* $u = 10^p$, *p celé.*

Je-li splněna nerovnost $p \leqq p_i - K$, *K* celé, *pak číslo* ϱ_i *má nejméně K prvních cifer stejných s číslem* r_i.

Je-li splněna nerovnost $p \geqq p_i + K$, *K celé, pak hodnota* ϱ_i *se liší od u maximálně o* 10^{p-K-1}.

Důkaz. Čísla $r_i - u$ a $r_i + u$ mají právě K cifer stejných, takže podle (12) čísla r_i a ϱ_i mají nejméně K cifer stejných a dále $|u - \varrho_i| < r_i < 10^{p_i+1} \leqq \leqq 10^{p-K+1}$. Odtud vidíme, že je-li p pevně zvoleno, pak nejvíce stejných cifer mohou mít právě absolutní hodnoty r_n a ϱ_n a nejméně se bude lišit od u hodnota ϱ_1.

Důsledek. Je-li řád čísla U roven p a řády čísel r_1 a r_n rovny p_1 a p_n, potom při volbě $u = 10^p < U$ je třeba absolutní hodnoty r_i a ϱ_i počítat metodou Graeffeovou na $k + \lambda$ cifer, kde

$$k > K = \text{Max}\,(p_n - p,\ p - p_1)\,; \tag{28}$$

potom aproximace r_i, a ϱ_i mají přibližně K cifer shodných a čísla ϱ_i se budou dostatečně lišit od hodnoty u; při tom λ je počet nepřesných cifer, které obdržíme při výpočtu absolutních hodnot kořenů metodou Graeffeovou.[2]) Celkový počet přesných cifer absolutních hodnot r_i bude k. Čísla r_i a ϱ_i mají všechny cifry stejné, když $2r_i \cos \varphi_i - u = 0$.

Věta 6. *Vypočteme-li absolutní hodnoty* r_i *kořenů rovnice* (1) *na k správných cifer, kde k je určeno ve vzorci* (28), *pak koeficient lineárního členu rovnic* (9) *má* μ *a absolutní člen* ν *správných cifer; při tom platí*

$$k - K - 3 \leqq \mu \leqq k - K + 3\,,\quad k - 2 \leqq \nu \leqq k + 1\,. \tag{29}$$

Důkaz. Podle předpokladu jsou absolutní chyby absolutních hodnot r_i kořenů rovnice (1) menší než $\Theta\,.\,10^{p_i-k+1}$, $0{,}1 < \Theta \leqq 1$. Odtud plyne, že r_i^2 má přibližně chybu $2\,.\,r_i\,.\,\Theta\,.\,10^{p_i-k+1}$, takže platí

$$2\,.\,10^{2p_i-k} < 2\,.\,r_i\,.\,\Theta\,.\,10^{p_i-k+1} < 10^{2p_i-k+3}\,.$$

Pro počet ν správných cifer čísla r_i^2, které je absolutním členem i-té rovnice v (9), obdržíme $k - 2 \leqq \nu \leqq k + 1$.

---

[2]) [1], str. 301.

Podobně se dokáže, že má-li r_i a ϱ_i právě K stejných cifer, potom r_i^2 a ϱ_i^2 může mít $K - 2, K - 1, K, K + 1$ stejných cifer a tedy pro počet μ správných cifer koeficientu lineárního členu platí nerovnosti (29).

Aby bylo možné předcházejících výsledků využít, je třeba znát řády čísel r_1, r_n a U, resp. u v nerovnosti (28).

Pravidlo 2. Máme-li určen řád čísla u podle pravidla 1, při čemž počet cifer q nebyl zatím pevně zvolen, a určíme-li horní a dolní ohraničení absolutních hodnot kořenů, můžeme z těchto údajů určit K.[3]) Poněvadž však pravidla pro určení ohraničení absolutních hodnot kořenů mohou dát dosti hrubé odhady, může být číslo K vypočtené na základě těchto ohraničení příliš velké a výpočet absolutních hodnot kořenů na $k = \mu + K + 3$ cifer, pro předem zvolené μ, zbytečně dlouhý.

Jestliže K takto určené je příliš velké, můžeme je určit přesněji a tím zmenšit takto:

Danou rovnici řešíme Graeffeovou metodou a koeficienty rovnic R^2, R^4, $R^8, \ldots$ počítáme jen užitím logaritmického pravítka. Tímto zběžným výpočtem určíme absolutní hodnoty kořenů alespoň na tři cifry a tedy alespoň na dvě přesné cifry.[4]) Z těchto absolutních hodnot můžeme určit řády čísel r_1, r_n a U a podle (28) číslo K.

Počet cifer, na něž budeme počítat koeficienty rovnice (6′) a rovnic $R^2, R^4, \ldots$, zvolíme větší nebo roven $\mathrm{Max}\,(q, k + \lambda)$.

P o z n á m k a 3. Jsou-li splněny předpoklady věty 4, resp. jejího důsledku 1, zůstávají úvahy o počtu cifer stejné. Číslo U je nahrazeno číslem U_1; podle (28) číslo $p_n - p + \lambda$ se případně zmenší a číslo $p - p_1$ případně zvětší, neboť řád U_1 je větší nebo roven řádu čísla U.

Předcházející výsledky můžeme shrnout do následujícího pravidla:

Pravidlo. Podle pravidla 1 a 2 určíme počet cifer na něž budeme počítat koeficienty rovnic R^2, R^4, $R^8, \ldots$ pro rovnici (1) a (6′), aby koeficient v rovnicích (9) u lineárního členu byl určen na μ a absolutní člen na ν přesných cifer.

Danou rovnici (1) řešíme metodou Graeffeovou a určíme U podle relace (5), resp. (5′). Podle pravidla 1 určíme nyní vhodný řád čísla u pro rozvoj rovnice (1) podle mocnin proměnné $y = x \pm u$. Jestliže u určené podle pravidla 1 splňuje nerovnost $0 < u < U$, potom věta 1 dává uvedené výsledky, při čemž počty správných cifer koeficientů v rovnicích (9) odhadneme podle věty 6.

Jestliže u určené podle pravidla 1 nesplňuje nerovnost $0 < u < U$, aplikujeme větu 4 resp. její důsledky a počet správných cifer koeficientů kvadratických rovnic určíme podle věty 6.

---

[3]) [4], díl II. § 6; [5], str. 338 n.
[4]) [1], str. 301.

Tab. 1.

R^2	1	-153^{1}	135^{2}	-653^{2}	206^{3}	-326^{3}	365^{3}	-223^{3}	915^{2}
R^4	1	-360^{1}	234^{3}	-361^{4}	905^{5}	-176^{6}	256^{6}	-171^{6}	837^{5}
R^8	1	-338^{3}	469^{6}	-289^{9}	704^{11}	-141^{12}	206^{12}	-136^{12}	701^{11}
R^{16}	1	204^{6}	381^{12}	136^{18}	488^{23}	-904^{23}	139^{24}	-103^{24}	491^{23}
R^{32}	1	-346^{12}	995^{24}	-187^{36}	237^{47}	-540^{47}	548^{47}	-302^{47}	241^{47}
R^{64}	1	-793^{24}	983^{49}	-122^{72}	562^{94}	-234^{94}	885^{94}	-173^{95}	581^{94}
R^{128}	1	$[-134^{50}]$	964^{99}	$[382^{134}]$	316^{189}	$[-940^{189}]$	626^{189}	$[197^{190}]$	338^{189}

Tab. 2.

R^2	1	$152\,600^{1}$	$134\,6825^{2}$	$-653\,220^{2}$	$206\,030^{3}$	$-325\,7055^{3}$	$365\,258^{3}$	$-223\,124^{3}$	$915\,0625^{2}$
R^4	1	$-364\,974^{1}$	$232\,371^{3}$	$-361\,762^{4}$	$907\,299^{5}$	$-177\,392^{6}$	$257\,7405^{6}$	$-170\,6246^{6}$	$837\,339^{5}$
R^8	1	$-331\,536^{3}$	$457\,355^{6}$	$-278\,355^{9}$	$706\,700^{11}$	$-141\,060^{12}$	$210\,896^{12}$	$140\,505^{12}$	$701\,137^{11}$
R^{16}	1	$184\,451^{6}$	$387\,382^{12}$	$129\,324^{18}$	$491\,591^{23}$	$-983\,196^{23}$	$147\,477^{24}$	$-983\,174^{23}$	$491\,593^{23}$
R^{32}	1	$-434\,542^{12}$	$112\,189^{25}$	$-213\,620^{36}$	$241\,664^{47}$	$-483\,290^{47}$	$724\,967^{47}$	$-483\,342^{47}$	$241\,664^{47}$
R^{64}	1	$-355\,513^{24}$	$107\,782^{50}$	$-859\,058^{71}$	$584\,015^{94}$	$-116\,828^{95}$	$175\,192^{95}$	$-116\,735^{95}$	$584\,015^{94}$
R^{128}	1	$-202\,925^{50}$	$116\,110^{100}$	$-118\,513^{145}$	$341\,074^{189}$	$681\,417^{189}$	$102\,379^{190}$	$683\,589^{189}$	$341\,074^{189}$
R^{256}	1	$[179\,566^{100}]$	$134\,8105^{200}$	$[612\,491^{289}]$	$116\,331^{379}$	$[-234\,047^{379}]$	$349\,872^{379}$	$[-231\,082^{379}]$	$116\,331^{379}$

Tab. 3.

R^2	1	$-151\,400^{1}$	$134\,772^{2}$	$-658\,005^{2}$	$205\,849^{3}$	$-324\,324^{3}$	$368\,646^{3}$	$-233\,3205^{3}$	$930\,975^{2}$
R^4	1	$-403\,244^{1}$	$235\,608^{3}$	$-310\,506^{4}$	$894\,121^{5}$	$-183\,889^{6}$	$228\,851^{6}$	$-142\,016^{6}$	$866\,714^{5}$
R^8	1	$-308\,610^{3}$	$483\,516^{6}$	$-310\,537^{6}$	$695\,926^{11}$	$-626\,784^{11}$	$156\,414^{12}$	$-195\,011^{12}$	$751\,193^{11}$
R^{16}	1	$-146\,307^{5}$	$560\,366^{12}$	$291\,736^{13}$	$480\,435^{23}$	$-177\,209^{24}$	$104\,749^{24}$	$145\,299^{24}$	$564\,291^{23}$
R^{32}	1	$-111\,859^{13}$	$332\,155^{25}$	$312\,660^{36}$	$230\,828^{47}$	$213\,381^{48}$	$678\,910^{48}$	$929\,002^{47}$	$318\,424^{47}$
R^{64}	1	$586\,934^{25}$	$117\,368^{51}$	$-555\,851^{72}$	$532\,816^{94}$	$141\,892^{96}$	$422\,743^{97}$	$-346\,058^{96}$	$101\,394^{95}$
R^{128}	1	$[116\,010^{51}]$	$137\,818^{102}$	$[-941\,741^{145}]$	$283\,893^{189}$	$-246\,307^{192}$	$179\,695^{195}$	$340\,965^{192}$	$102\,807^{190}$
R^{256}	—	—	—	—	$805\,952^{378}$	$[-413\,612^{384}]$	$322\,905^{390}$	$[-357\,852^{385}]$	$105\,693^{380}$

Uvedený postup můžeme, je-li to výhodnější, aplikovat případně na rovnici reciprokou k rovnici (1).

Příklad 2. Dána rovnice

$$x^8 + 0{,}2x^7 + 7{,}65x^6 - 0{,}9x^5 + 37{,}9x^4 - 0{,}9x^3 + 36{,}9x^2 - 1{,}1x + 30{,}25 = 0\,,$$

která má vesměs komplexní kořeny. Určeme její kořeny tak, aby koeficient u lineárního členu kvadratických rovnic, jimž tyto kořeny hoví, měl alespoň dvě cifry přesné.

Výpočty prováděnými pouze logaritmickým pravítkem a použitím tabulky čtverců čísel 1—1000 obdržíme pro koeficienty rovnice R^2, R^4, ..., tabulku 1.

Během výpočtu se rovnice R^{16} rozštěpila. Při tom koeficienty druhé části (488^{23}, $-\ 904^{23}$, 139^{24}, $-\ 103^{24}$, 491^{23}) mají od středního na obě strany přibližně stejné absolutní hodnoty a kromě toho koeficient druhý a čtvrtý je přibližně roven dvojnásobku prvního a koeficient třetí trojnásobku prvního. Avšak rovnice $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ se při výpočtu Graeffeovou metodou nemění a její oba páry kořenů mají absolutní hodnoty rovné 1. Volíme-li $r_1 = r_2$, obdržíme z tabulky 1:

$$r_1 = r_2 = \sqrt[512]{\frac{338\,.\,10^{189}}{316\,.\,10^{189}}} = 1{,}000\,\ldots, \quad r_3 = \sqrt[256]{\frac{316\,.\,10^{189}}{964\,.\,10^{99}}} = 2{,}458\,\ldots,$$

$$r_4 = \sqrt[256]{964\,.\,10^{99}} = 2{,}236\,\ldots,$$

takže $U \approx 0{,}111$.

Podle pravidla 1 bylo by nejlépe volit $u = 1$; ale abychom určili jednoznačně kvadratické rovnice pro všechny kořeny, budeme volit $u < 0{,}111$ a tedy řádu $p = -\,1$. Z relace (28) plyne $K = 1$ ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$). Podle pravidla 2 za předpokladu $\mu \geqq 2$ obdržíme $k \geqq 6$, t. zn., volíme-li $\lambda = 1$, je třeba koeficienty rovnic R^2, R^4, ... počítat na 7 cifer. Výpočet však stačí provést na 6 cifer, neboť v tomto případě, při volbě $\lambda = 1$, čísla r_i budou mít vesměs chyby $\Theta\,.\,10^{-4}$ $(0{,}1 < \Theta < 1)$ a počet správných cifer bude 5. Chyby čísel r_i^2 jsou po řadě menší než $2\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $2\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $4{,}5\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $4{,}92\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, čili vesměs menší než $0{,}5\,.\,10^{-3}$. Zaokrouhlíme-li čísla r_i^2 na tři desetinná místa, budou mít jistě 4 cifry správné. Dá se tedy v případě, že počítáme na 6 cifer, odhadnout počet μ správných cifer tak, že je $\mu \approx 3$. V tabulce 2 jsou koeficienty rovnic R^2, R^4, ... uvedeny.

Rovnice R^{32} se rozpadla ve dvě rovnice 4. stupně; koeficienty druhé z těchto rovnic mají tytéž vlastnosti jako koeficienty druhé rozštěpené rovnice R^{16} v tabulce 1, jak plyne z toho, že dvojnásobek resp. trojnásobek prvního koeficientu $241\,664^{47}$ je $483\,328^{47}$, resp. $724\,992^{47}$, takže, položíme-li $r_1 = r_2$, obdržíme

$$r_1^2 = r_2^2 = 1{,}00000\,, \quad r_3^2 = 4{,}99999\,, \quad r_4^2 = 6{,}05002\,.$$

Transformací $x = y + 0,1$ obdržíme rovnici

$$y^8 + y^7 + 8,07y^6 + 3,788y^5 + 38,611\,5y^4 + 14,324\,26y^3 + 38,906\,545y^2 + \\ + 6,404\,611\,2y + 30,511\,888\,68 = 0 .$$

Při jejím řešení metodou Graeffeovou obdržíme tabulku 3. Rovnice R^{32} se rozštěpila ve dvě rovnice 4. stupně, z nichž u první postup skončil u rovnice R^{128} a u druhé u R^{256}. Z tabulky 3 obdržíme

$$\varrho_1^2 = 0,910\,003\,, \quad \varrho_2^2 = 1,110\,00\,, \quad \varrho_3^2 = 4,810\,02\,, \quad \varrho_4^2 = 6,279\,94\,.$$

Pro kořeny dostáváme kvadratické rovnice

$$x^2 - 0,999\,97x + 1,000\,00 = 0\,, \quad x^2 + 1,000\,00x + 1,000\,00 = 0\,,$$
$$x^2 - 1,999\,7x + 4,999\,99 = 0\,, \quad x^2 + 2,199\,2x + 6,050\,02 = 0\,,$$

které dobře odpovídají rovnicím s přesnými koeficienty

$$x^2 - x + 1 = 0\,, \quad x^2 + x + 1 = 0\,,$$
$$x^2 - 2x + 5 = 0\,, \quad x^2 + 2,2x + 6,05 = 0\,,$$

a je dokonce $\mu = 4$ a $\nu = 5$.

LITERATURA

[1] *V. Láska - V. Hruška*: Teorie a praxe numerického počítání, Praha 1934.

[2] *А. Н. Крылов*: Лекции о приближенных вычислениях, Москва 1950.

[3] *C. Runge - H. König*: Numerisches Rechnen, Berlin-Leipzig 1933.

[4] *O. Perron*: Algebra, Berlin-Leipzig 1933.

[5] *V. Kořínek*: Základy algebry, Praha 1953.

Резюме

К ОДНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МНОГИМИ ПАРАМИ МНИМЫХ КОРНЕЙ ПО МЕТОДУ ГРЕФФЕ

ВЛАДИМИР ГОРАК (Vladimír Horák), Брно.

(Поступило в редакцию 6/X 1956 г.)

Пусть (1)–алгебраическое уравнение (с вещественными коэффициентами) $2n$-ой степени с одними мнимыми корнями (вещественные корни не имеют влияния на результаты), абсолютные величины которых $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Если разложить (1) по степеням переменной $y = x - u$ или $y = x + u$ (u-вещественное) и если абсолютные величины корней нового уравнения

(6) будут $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, то корни уравнения (1) можно выбрать из корней n^2 квадратных уравнений

$$x^2 + \frac{\varrho_p^2 - r_q^2 - u^2}{u} x + r_q^2 = 0; \; p, q = 1, 2, \ldots, n \tag{I}$$

В теоремах 1, 4 и в следствиях последней определены достаточные условия для числа u, чтобы из системы (I) можно было однозначно выбрать уравнения, корни которых удовлетворяют уравнению (1), и уравнения, корни которых не удовлетворяют уравнению (1).

Если вычислить абсолютные величины корней уравнений (1) и (6) по методу Греффе на q знаков, можно u выбрать по правилу 1 так, чтобы уравнение, которое мы получим из уравнения (6), закругляя его коэффициенты на q цифр, отличалось от уравнения (1) и тоже от уравнения $(y + u)^n = 0$.

В выражениях (29) определены числа μ и ν верных цифр (определение 2) коэффициентов линейного и абсолютного членов квадратных уравнений, если абсолютные величины r_i имеют k верных цифр. Число цифр, до которого мы вычисляем коэффициенты уравнений $R^2, R^4, R^8, \ldots$, если дано μ, можно определить по правилу 2. Ход вычисления описан в последнем правиле.

Zusammenfassung

ZU EINER LÖSUNGSMETHODE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN MIT VIELEN KOMPLEXEN WURZELPAAREN NACH DEM GRAEFFESCHEN VERFAHREN

VLADIMÍR HORÁK, Brno.

(Eingegangen am 6. Oktober 1956.)

Es sei (1) eine algebraische Gleichung (mit reellen Koeffizienten) $2n$-ten Grades mit durchwegs komplexen Wurzeln (die reellen Wurzeln haben keinen Einfluss auf die Allgemeinheit), welche die absoluten Beträge $r_1, r_2, \ldots, r_n$ haben. Wenn man (1) nach den Potenzen von $y = x - u$ oder $y = x + u$ (u reelle Zahl) entwickelt und wenn $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die absoluten Beträge der Wurzeln der neuen Gleichung (6) sind, dann kann man die Wurzeln der Gleichung (1) aus den n^2 quadratischen Gleichungen

$$x^2 + \frac{\varrho_p^2 - r_q^2 - u^2}{u} x + r_q^2 = 0; \; p, q = 1, 2, \ldots, n \tag{I}$$

auswählen.

In den Sätzen 1, 4 und den Folgerungen des Satzes 4 sind hinreichende Bedingungen für die Zahl u enthalten, damit man aus dem System (I) die Gleichungen, deren Wurzeln die Gleichung (1) erfüllen, und die Gleichungen, deren Wurzeln die Gleichung (1) nicht erfüllen, auswählen kann.

Wenn man die absoluten Beträge r_i und ϱ_i der Wurzeln nach dem Graeffeschen Verfahren auf q Ziffern ermittelt, kann man die Zahl u nach der Regel 1 so wählen, dass sich die Gleichung, welche aus der Gleichung (6) durch Abrunden ihrer Koeffizienten auf q Ziffern entsteht, von der Gleichung (1) und auch von der Gleichung $(y + u)^n = 0$ unterscheidet.

In den Formeln (29) ist die Anzahl μ und ν der richtigen Ziffern (Definition 2) der Koeffizienten des linearen und absoluten Gliedes der quadratischen Gleichungen bestimmt, wenn die absoluten Beträge r_i k richtige Ziffern haben. Die Anzahl der Ziffern, auf welche man die Koeffizienten der Gleichungen R^2, R^4, ... ausrechnet, wenn μ gegeben ist, bestimmt man nach der Regel 2. Das ganze Verfahren ist in der letzten Regel zusammengefasst.