Časopis pro pěstování matematiky

Alena Červená

Poznámka k otázce řešitelnosti jisté soustavy nerovností kladnými čísly

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 3, 335--341

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117270`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA K OTÁZCE ŘEŠITELNOSTI JISTÉ SOUSTAVY NEROVNOSTÍ KLADNÝMI ČÍSLY

ALENA ČERVENÁ, Praha.

(Došlo dne 27. června 1956.) DT: 512.13

V článku jsou metodou úplné indukce dokázány nutné a postačující podmínky existence kladného řešení jistého speciálního systému lineárních nerovností.

S. N. Černikov v práci vyšlé na jaře roku 1956 [1] udal nutné a dostačující podmínky pro existenci takového řešení obecného systému lineárních nerovností, jehož některé anebo všechny komponenty jsou kladné (nezáporné), resp. záporné (nekladné). Podmínky uvedené v jeho práci jsou značně složité (jak lze očekávati při obecné formulaci problému).

Úkolem tohoto článku jest zodpovědět speciální otázku, jakým podmínkám musejí vyhovovat kladné konstanty C_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, aby soustava nerovností

$$\begin{aligned} &\alpha_2 C_{12} + \alpha_3 C_{13} + \ldots + \alpha_n C_{1n} < \alpha_1 C_{11}\,, \\ &\alpha_1 C_{21} + \alpha_3 C_{23} + \ldots + \alpha_n C_{2n} < \alpha_2 C_{22}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 C_{n1} + \alpha_2 C_{n2} + \ldots + \alpha_{n-1} C_{nn-1} < \alpha_n C_{nn} \end{aligned} \tag{1}$$

měla řešení $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, kde $\alpha_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Níže uvedená věta neplyne bezprostředně z odpovídající věty Černikovovy a také metoda obou prací jest různá.

Věta. *Nutná a dostačující podmínka k tomu, aby soustava nerovností* (1), *kde všechny konstanty C_{ik} jsou kladné, měla řešení $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, kde $\alpha_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, jest tato:*

a) *Součin $C_{11}C_{22} \ldots C_{nn}$ má největší hodnotu ze všech součinů typu $C_{1i_1}C_{2i_2} \ldots C_{ni_n}$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je nějaká permutace čísel* 1, 2, …, n.

b) *Determinant soustavy, kterou dostaneme ze soustavy* (1) *převedením všech členů na pravé strany nerovností, jest větší než nula, t. j.*

$$\begin{vmatrix} C_{11} & -C_{12} \dots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_{22} \dots & -C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -C_{n1} & -C_{n2} \dots & C_{nn} \end{vmatrix} > 0 . \tag{2}$$

(O vzájemném vztahu podmínek a) a b) bude řeč na konci článku.)

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

Pro $n = 2$ máme řešit soustavu

$$\alpha_2 C_{12} < \alpha_1 C_{11}, \quad \alpha_1 C_{21} < \alpha_2 C_{22} . \tag{3}$$

Předpokládejme, že soustavě nerovností (3) vyhovují kladná čísla α_1, α_2. Pak $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{C_{11}}{C_{12}}$, ale také $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{C_{21}}{C_{22}}$. Odtud plyne $\frac{C_{21}}{C_{22}} < \frac{C_{11}}{C_{12}}$ neboli

$$C_{21}C_{12} < C_{11}C_{22}, \quad C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12} > 0 , \tag{4}$$

čímž jest dokázána nutnost podmínek a) i b).

Splňují-li naopak kladné konstanty C_{ik}, $i, k = 1, 2$ nerovnost (4), pak $\frac{C_{21}}{C_{22}} < \frac{C_{11}}{C_{12}}$ a můžeme zvolit číslo $k > 0$ tak, aby platilo $\frac{C_{21}}{C_{22}} < k < \frac{C_{11}}{C_{12}}$. Položíme-li však $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ s kladnými hodnotami α_1, α_2, dostáváme řešení soustavy (3), které má požadované vlastnosti.

Tím jest dokázána i dostačitelnost vyslovené podmínky v případě $n = 2$.

Předpokládejme tedy, že jest naše věta správná pro $n - 1$ a dokažme ji pro n. (Indukčního předpokladu bude použito až při důkazu podmínky b), podmínka a) se dokáže nepřímým důkazem bez použití indukce.)

Podmínka a) jest nutná z tohoto důvodu:

Předpokládejme, že podmínka splněna není, t. zn., že existuje taková permutace $i_1, i_2, \dots, i_n$ čísel $1, 2, \dots, n$, že

$$C_{1i_1}C_{2i_2} \dots C_{ni_n} \geqq C_{11}C_{22} \dots C_{nn}$$

a že soustavě nerovností (1) vyhovuje soustava kladných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Tím spíše by musely být splněny nerovnosti

$$\begin{aligned} C_{1i_1}\alpha_{i_1} &\leqq C_{11}\alpha_1 , \\ C_{2i_2}\alpha_{i_2} &\leqq C_{22}\alpha_2 , \\ &\dots \\ C_{ni_n}\alpha_{i_n} &\leqq C_{nn}\alpha_n . \end{aligned} \tag{5}$$

Jednotlivé nerovnosti v soustavě (5) jsou pro $i_k \neq k$ důsledkem odpovídajících nerovností ze soustavy (1), pro $i_k = k$ pak se redukují na triviální rovnost. Zároveň jest jasné, že v soustavě (5) musí alespoň ve 2 případech, není-li $i_1, i_2, \dots, i_n$ hlavní permutace, platit ostrá nerovnost.

Poněvadž v soustavě nerovností (5) se pracuje vesměs s kladnými veličinami, dostali bychom po vynásobení

$$C_{1i_1}C_{2i_2}\dots C_{ni_n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_n} < C_{11}C_{22}\dots C_{nn}\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\,,$$

což jest spor, neboť $\alpha_{i_1}\,\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_n} = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$.

Dokažme nyní za předpokladu, že jest splněna podmínka a), nutnost podmínky b).

Nechť jest splněna soustava nerovností (1) (kladnými hodnotami $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ $\dots, \alpha_n$). Pak z první a poslední nerovnosti této soustavy vyplývá

$$\frac{\alpha_1C_{n1}+\alpha_2C_{n2}+\dots+\alpha_{n-1}C_{nn-1}}{C_{nn}} < \alpha_n < \frac{\alpha_1C_{11}-\alpha_2C_{12}-\alpha_3C_{13}-\dots-\alpha_{n-1}C_{1n-1}}{C_{1n}} \tag{6}$$

neboli

$$\alpha_1(C_{n1}C_{1n}-C_{11}C_{nn})+\alpha_2(C_{n2}C_{1n}+C_{12}C_{nn})+\dots+\alpha_{n-1}(C_{nn-1}C_{1n}+$$
$$+\,C_{1n-1}C_{nn}) < 0\,,$$

čili

$$\alpha_2(C_{n2}C_{1n}+C_{12}C_{nn})+$$
$$+\dots+\alpha_{n-1}(C_{nn-1}C_{1n}+C_{1n-1}C_{nn}) < \alpha_1(C_{11}C_{nn}-C_{n1}C_{1n})\,.$$

Analogicky, vyloučíme-li vždy α_n z 2. a n-té atd. až $(n-1)$-té a zároveň n-té nerovnosti soustavy (1), docházíme tak k soustavě $n-1$ nerovností typu

$$\begin{aligned}
&\alpha_2C'_{12}+\alpha_3C'_{13}+\dots+\alpha_{n-1}C'_{1n-1} < \alpha_1C'_{11}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_1C'_{n-11}+\dots+\alpha_{n-2}C'_{n-1\,n-2} < \alpha_{n-1}C'_{n-1\,n-1}\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

kde $C'_{ik} = C_{ik}C_{nn}+C_{in}C_{nk}$ pro $i \neq k$ a $C'_{ii} = C_{ii}C_{nn}-C_{in}C_{ni}$.

Všechny konstanty C'_{ik} jsou v důsledku podmínky a) kladné a soustava (7) má podle učiněného předpokladu řešení $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, kde $\alpha_i > 0$. Podle indukčního předpokladu vyhovují tedy konstanty C'_{ik}, kde $i, k = 1, 2, \dots$, $\dots, n-1$, podmínce b), t. j.

$$\begin{vmatrix}
(C_{11}C_{nn}-C_{1n}C_{n1}) & -(C_{12}C_{nn}+C_{1n}C_{n2}) & \dots & -(C_{1n-1}C_{nn}+C_{1n}C_{nn-1})\\
-(C_{21}C_{nn}+C_{2n}C_{n1}) & (C_{22}C_{nn}-C_{2n}C_{n2}) & \dots & -(C_{2n-1}C_{nn}+C_{2n}C_{nn-1})\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
-(C_{n-11}C_{nn}+C_{n-1n}C_{n1}) & \dots & \dots & (C_{n-1n-1}C_{nn}-C_{n-1n}C_{nn-1})
\end{vmatrix} > 0\,. \tag{8}$$

Poslední determinant jest možno zapsat ve tvaru

$$D = \frac{1}{C_{nn}}\begin{vmatrix}
(C_{11}C_{nn}-C_{1n}C_{n1}) & \dots & -(C_{1n-1}C_{nn}+C_{1n}C_{nn-1}) & 0\\
-(C_{21}C_{nn}+C_{2n}C_{n1}) & \dots & -(C_{2n-1}C_{nn}+C_{2n}C_{nn-1}) & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
-(C_{n-11}C_{nn}+C_{n-1n}C_{n1}) & \dots & (C_{n-1n-1}C_{nn}-C_{n-1n}C_{nn-1}) & 0\\
-C_{n1} \quad -C_{n2} & \dots & -C_{nn-1} & +C_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{9}$$

Nyní budeme postupně od i-tých řádků ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) determinantu ve vzorci (9) odčítat řádek n-tý, násobený konstantou C_{in}. Po této úpravě

$$D = \frac{1}{C_{nn}} \begin{vmatrix} C_{11}C_{nn} & - C_{12}C_{nn} \ldots\ldots & - C_{1n-1}C_{nn} & - C_{1n}C_{nn} \\ - C_{21}C_{nn} & C_{22}C_{nn} \ldots\ldots & - C_{2n-1}C_{nn} & - C_{2n}C_{nn} \\ - C_{n-11}C_{nn} & \ldots\ldots\ldots\ldots & C_{n-1n-1}C_{nn} & - C_{n-1n}C_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ - C_{n1} & - C_{n2} \ldots\ldots & - C_{nn-1} & + C_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (C_{nn})^{n-2} \begin{vmatrix} C_{11} & - C_{12} \ldots\ldots & - C_{1n} \\ - C_{21} & C_{22} \ldots\ldots & - C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ - C_{n1} & - C_{n2} \ldots\ldots & C_{nn} \end{vmatrix} > 0 .$$

Poněvadž $(C_{nn})^{n-2} > 0$, dává nám poslední vztah podmínku b) v případě soustavy n nerovností uvažovaného typu.

D o s t a č i t e l n o s t podmínek v naší větě se dokáže zpětným pochodem opět úplnou indukcí:

Zapišme podmínku b) v případě n nerovností. Příslušný determinant násobíme kladnou konstantou $(C_{nn})^{n-2}$ a zpětnou úpravou se dostaneme až k determinantu (8), který je rovněž > 0. V tomto determinantu konstanty $C'_{ik} = C_{ik}C_{nn} + (1 - 2\delta_{ik})\, C_{in}C_{nk}$ jsou kladné (pro $i \neq k$ je to zřejmé, pro $i = k$ jest to v důsledku podmínky a)). Podle indukčního předpokladu má tedy soustava (7) řešení kladnými čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Zpětnou úpravou nerovností v soustavě (7) docházíme k nerovnostem typu

$$\frac{\alpha_1 C_{n1} + \alpha_2 C_{n2} + \ldots + \alpha_{n-1} C_{nn-1}}{C_{nn}} <$$
$$< \frac{\alpha_j C_{jj} - \alpha_1 C_{j1} - \ldots - \alpha_{j-1} C_{jj-1} - \alpha_{j+1} C_{jj+1} - \ldots - \alpha_{n-1} C_{jn-1}}{C_{jn}}, \quad (10)$$

kde $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. (Viz (6) v případě $j = 1$.)

C_{ik} jsou konstanty, za α_j si myslíme dosazeno nějaké kladné řešení soustavy (7). Vzorec (10) nám potom představuje soustavu $n - 1$ nerovností mezi čísly, při čemž na levých stranách těchto nerovností jest vždy totéž kladné číslo, které jest zřejmě menší než minimum pravých stran, které označíme m_α. V důsledku toho můžeme najít kladné číslo α_n, vyhovující nerovnosti

$$\frac{1}{C_{nn}} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_{ni} < \alpha_n < m_\alpha ,$$

a toto číslo α_n můžeme potom vložit mezi levou a pravou stranu libovolné nerovnosti ze soustavy (10). Soustava kladných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pak zřejmě vyhovuje soustavě nerovností (1). Tím jest dokončen důkaz uvedené věty.

Závěrem jest možno připojit několik poznámek.

Poznámka 1. Předpoklad, že v determinantu (2) jsou kladné konstanty právě v hlavní úhlopříčce, jest pro větu podstatný, jak jest snadno vidět na příkladech.

V případě $n = 2$ vyhovuje dané podmínce soustava

$$C_{11}\alpha_1 - C_{12}\alpha_2 > 0\,, \quad -C_{21}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2 > 0\,,\ C_{ik} > 0\,.$$

Soustava

$$-C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 > 0\,, \quad C_{21}\alpha_1 - C_{12}\alpha_2 > 0\,,$$

kde $C_{ik} > 0$ pro $i, k = 1, 2$, má řešení kladnými čísly α_1, α_2 tehdy a jen tehdy, jestliže $\begin{vmatrix} -C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & -C_{22} \end{vmatrix} < 0$, jak se snadno přesvědčíme. Konečně na př. soustava $C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 > 0$, $C_{21}\alpha_2 - C_{22}\alpha_1 > 0$, $C_{ik} > 0$, má řešení kladnými čísly α_1, α_2 při libovolné hodnotě $\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & -C_{22} \end{vmatrix}$.

Poznámka 2. Podmínkám věty bude vyhověno na př. vždy tehdy, bude-li $\dfrac{C_{ij}}{C_{ii}} \leqq \dfrac{1}{n-1}$ pro $j \neq i$, při čemž při pevném i alespoň pro jedno j bude platit ostrá nerovnost. Můžeme totiž nahlédnout přímo, že potom soustava (1) bude mít řešení uvažovaného typu. Věta však dává podmínku řešitelnosti v plné obecnosti.

Pro $n = 3$ má na př. podmínka b) tvar

$$C_{11}C_{23}C_{32} + C_{12}C_{21}C_{33} + C_{12}C_{23}C_{31} + C_{13}C_{21}C_{32} + C_{13}C_{22}C_{31} < \\ < C_{11}C_{22}C_{33}$$

neboli po dělení součinem $C_{11}C_{22}C_{33} > 0$,

$$\frac{C_{23}}{C_{22}} \cdot \frac{C_{32}}{C_{33}} + \frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{C_{21}}{C_{22}} + \frac{C_{12}}{C_{11}} \cdot \frac{C_{23}}{C_{22}} \cdot \frac{C_{31}}{C_{33}} + \frac{C_{13}}{C_{11}} \cdot \frac{C_{21}}{C_{22}} \cdot \frac{C_{32}}{C_{33}} + \frac{C_{13}}{C_{11}} \cdot \frac{C_{31}}{C_{33}} < 1\,.$$

V krajním případě $\dfrac{C_{ij}}{C_{ii}} = \dfrac{1}{2}$ pro $i \neq j$ se nerovnost změní v rovnost $3 \cdot \dfrac{1}{4} + 2 \cdot \dfrac{1}{8} = 1$.

Pro $n = 4$ má podmínka b) tvar

$$\begin{aligned} &C_{11}C_{22}C_{34}C_{43} + C_{11}C_{23}C_{32}C_{44} + C_{11}C_{23}C_{34}C_{42} + C_{11}C_{24}C_{32}C_{43} + C_{11}C_{24}C_{33}C_{42} + \\ &+ C_{12}C_{21}C_{33}C_{44} + C_{12}C_{23}C_{31}C_{44} + C_{12}C_{23}C_{34}C_{41} + C_{12}C_{24}C_{31}C_{43} + C_{12}C_{24}C_{33}C_{41} + \\ &+ C_{13}C_{21}C_{32}C_{44} + C_{13}C_{21}C_{34}C_{42} + C_{13}C_{22}C_{31}C_{44} + C_{13}C_{22}C_{34}C_{41} + C_{13}C_{24}C_{32}C_{41} + \\ &+ C_{14}C_{21}C_{32}C_{43} + C_{14}C_{21}C_{33}C_{42} + C_{14}C_{22}C_{31}C_{43} + C_{14}C_{22}C_{33}C_{41} + C_{14}C_{23} \,. \\ &. \, C_{31}C_{42} < C_{11}C_{22}C_{33}C_{44} + C_{12}C_{21}C_{34}C_{43} + C_{13}C_{24}C_{31}C_{42} + C_{14}C_{23}C_{32}C_{41}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Po dělení výrazem $C_{11}C_{22}C_{33}C_{44}$ a dosazení krajní hodnoty $\frac{C_{ij}}{C_{ii}} = \frac{1}{3}$ pro $j \neq i$ dostáváme $6 \cdot \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{27} + 6 \cdot \frac{1}{81} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{81}$.

Poznámka 3: Po rozepsání podmínky b) pro případ $n = 3$ v poznámce 2 vidíme, že v tomto případě podmínka a) jest důsledkem podmínky b), avšak nikoliv naopak. V případě $n = 2$ vyplývá dokonce podmínka a) z podmínky b) a naopak podmínka b) z podmínky a). Pro $n \geqq 4$ jsou však již podmínky a) a b) navzájem nezávislé. Položíme-li na př. v (11) $C_{12} = C_{21} = C_{34} = C_{43} = 10$ a ostatní konstanty $= 1$, pak jest zřejmě podmínka b) splněna, ale není splněna podmínka a).

LITERATURA

[1] *С. Н. Черников*: Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств. Мат. сборник т. *38* (*80*): 4 (1956), 479—508. V této práci je uvedena literatura zabývající se příbuznými otázkami.

Резюме

ЗАМЕТКА К ВОПРОСУ РЕШАЕМОСТИ ОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ПОМОЩИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

АЛЕНА ЧЕРВЕНА (Alena Červená), Прага.

(Поступило в редакцию 27/VI 1956 г.)

Главной задачей статьи является доказательство следующей **теоремы:**

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы система неравенств

$$\begin{aligned} \alpha_1 C_{11} - \alpha_2 C_{12} - \alpha_3 C_{13} - \ldots - \alpha_n C_{1n} &> 0\,, \\ -\alpha_1 C_{21} + \alpha_2 C_{22} - \alpha_3 C_{23} - \ldots - \alpha_n C_{2n} &> 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -\alpha_1 C_{n1} - \alpha_2 C_{n2} - \alpha_3 C_{n3} - \ldots + \alpha_n C_{nn} &> 0\,, \end{aligned}$$

где все константы C_{ik} положительны, могла иметь решение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_i > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, является следующее:

а) *Произведение $C_{11}\, C_{22} \ldots C_{nn}$ имеет наибольшее значение из всех произведений типа $C_{1i_1}\, C_{2i_2} \ldots C_{ni_n}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ является какой-то перестановкой чисел 1, 2, ..., n.*

б) *Определитель рассматриваемой системы больше нуля.*

В примечаниях к приведенной теореме указывается на то, что пренебрежение предпосылкой, что все конст. C_{ik} являются положительными, приводит к тому, что теорема перестает быть правильной. Далее устанавливается взаимная зависимость условий а) и б). Для $n = 2$ вытекает из условия а) условие б) и наоборот; для $n = 3$ вытекает из условия б) условие а), но б) не является следствием а); для $n \geqq 4$ оба условия являются взаимно независимыми.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE LÖSUNGSFRAGE EINES SPEZIELLEN SYSTEMS VON UNGLEICHUNGEN DURCH POSITIVE ZAHLEN

ALENA ČERVENÁ, Praha.

(Eingelangt am 27. Juni 1956.)

Eigentliches Ziel der vorgelegten Arbeit ist der Beweis des folgenden **Satzes:** *Notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass ein System von Ungleichungen*

$$\begin{array}{l} \alpha_1 C_{11} - \alpha_2 C_{12} - \alpha_3 C_{13} - \ldots - \alpha_n C_{1n} > 0\,, \\ -\alpha_1 C_{21} + \alpha_2 C_{22} - \alpha_3 C_{23} - \ldots - \alpha_n C_{2n} > 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\alpha_1 C_{n1} - \alpha_2 C_{n2} - \alpha_3 C_{n3} - \ldots + \alpha_n C_{nn} > 0\,, \end{array}$$

wo alle Konstanten C_{ik} positiv sind, eine Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ besitzt, wo $\alpha_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, ist die folgende:

a) *Das Produkt $C_{11}C_{22} \ldots C_{nn}$ besitzt den grössten Wert zwischen allen Produkten von dem Typ $C_{1i_1}C_{2i_2} \ldots C_{ni_n}$, wo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist.*

b) *Das Determinant des genannten Systems von Ungleichungen ist grösser als Null.*

In Bemerkungen zum zitierten Satz zeigt man, dass man durch die Vernachlässigung der Voraussetzung darüber, dass alle Konstanten C_{ik} positiv sind, zu einem nicht mehr richtigen Satz gelangt. Weiter wird die gegenseitige Abhängigheit der Bedingungen a) und b) untersucht. Für $n = 2$ ist die Bedingung a) Folge von b) und umgekehrt; für $n = 3$ ist a) Folge von b), aber nicht mehr b) Folge von a), für $n \geqq 4$ sind die beiden Bedingungen gegenseitig unabhängig.