Časopis pro pěstování matematiky

Vlastimil Dlab
D-hodnost Abelovy grupy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 3, 314--334

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117269`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

D-HODNOST ABELOVÝ GRUPY

VLASTIMIL DLAB, Praha.

(Došlo dne 9. dubna 1956.) DT: 519.443

Z pojmu lineární nezávislosti prvků Abelovy grupy je známým způsobem odvozen pojem hodnosti Abelovy grupy.[1]) V současné literatuře je používáno více pojmu lineární nezávislosti v obecnějším smyslu; lineární nezávislost v tomto obecnějším smyslu nazývá autor v práci D-nezávislost a odvozuje pomocí ní pojem D-hodnosti (direktní hodnosti)[2]) Abelovy grupy. Nakonec autor ukazuje některé vlastnosti D-hodnosti; její přednost tkví hlavně v tom, že na rozdíl od obyčejné hodnosti je D-hodnost každé nenulové grupy nenulová.

1. Úvodní poznámky

V celé práci budeme grupou rozuměti aditivně psanou Abelovu grupu. Grupy budeme značit velkými latinskými písmeny, jejich prvky $g, h, x, \ldots$; ostatní malá písmena budou znamenat celá čísla, specielně p prvočíslo. Symbol $O(g)$ značí řád prvku g, symbol $\{g, h, \ldots\}$ grupu vytvořenou generátory $g, h, \ldots$ Nekonečnou cyklickou grupu označme $G(\infty)$, cyklickou grupu řádu p^k pro přirozené k $G(p^k)$ a Prüferovu grupu typu p^∞ (t. j. aditivní grupu racionálních čísel, jejichž jmenovatel je mocninou prvočísla p, modulo 1) označme $G(p^\infty)$. $G + H$ resp. $\sum\limits_{\iota \in I}' G_\iota$ značí direktní součet příslušných grup, G/H faktorovou grupu G modulo H.

Grupa $G_{(p)}$, jejíž každý prvek má řád mocniny téhož prvočísla p, nazývá se p-primární; prvky řádu p tvoří v této grupě $G_{(p)}$ podgrupu $G^0_{(p)}$, kterou nazýváme dolní vrstvou. Všechny prvky konečného řádu tvoří v dané Abelově grupě G maximální periodickou podgrupu $P \subseteq G$, jednoznačně určenou periodickou část grupy G; faktorová grupa G/P, až na isomorfismus jednoznačně určená, je aperiodická.[3]) Smíšenou grupu G nazveme štěpitelnou, je-li periodická část P jejím direktním sčítancem. Každou periodickou grupu P možno jednoznačně rozložit na direktní součet p-primárních komponent

[1]) Viz na př. [1].

[2]) Německy „*direkter Rang*"; odtud označení D-hodnost.

[3]) T. j. každý její nenulový prvek má nekonečný řád.

$P_{(p)} : P = \sum_{p}' P_{(p)}$; $P_{(p)}$ je při tom tvořena právě těmi prvky z G, jejichž řád je mocninou prvočísla p. Jedinými direktně nerozložitelnými p-primárními grupami jsou grupy $G(p^k)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$); z každé nenulové p-primární grupy $G_{(p)}$ lze takovou grupu $G(p^k)$ pro vhodné k direktně oddělit.[4])

Množina prvků $(g_\iota)_{\iota \in I}$, $g_\iota \in G$ nazývá se lineárně nezávislou, jestliže neexistuje relace

$$k_1 \cdot g_{\iota_1} + k_2 \cdot g_{\iota_2} + \ldots + k_n \cdot g_{\iota_n} = 0\,,$$
$$k_i \ (i = 1, 2, \ldots n) \text{ celá čísla, } n \text{ libovolné přirozené,}$$

v níž je $k_i \neq 0$ pro vhodný index i. V opačném případě mluvíme o lineárně závislých prvcích. Jde zřejmě o definici finitního charakteru, takže možno mluvit o maximální lineárně nezávislé soustavě grupy G. Všechny tyto maximální lineárně nezávislé soustavy mají tutéž mohutnost, kterou nazýváme pak hodností grupy G; označme ji $\mathrm{r}(G)$. Je-li $\mathrm{r}(G) \geqq \aleph_0$, potom se $\mathrm{r}(G)$ rovná mohutnosti faktorové grupy G modulo periodická část $P : \mathrm{r}(G) = \mathrm{m}(G/P)$.[5])

Podgrupa H se nazývá servantní v G, jestliže každá rovnice

$$n \cdot x = h,\ h \in H\,,\ n \text{ přirozené číslo}\,,$$

řešitelná v G, má alespoň jedno řešení v H. Podgrupa H je servantní v G právě tehdy, jestliže v každé zbytkové třídě $\bar{g} \in G/H$ existuje prvek $g \in \bar{g}$, pro nějž $O(g) = O(\bar{g})$. Z teorie servantních grup pak snadno vyplývá postačující podmínka pro to, aby smíšená Abelova grupa byla štěpitelná:

Jestliže periodická část P smíšené grupy G je direktním součtem úplné grupy a grupy, jejíž prvky mají ohraničené řády, je grupa G štěpitelná.[6])

2. Definice D-hodnosti

Definice 1. *Říkáme, že množina $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ nenulových prvků Abelovy grupy G je D-nezávislá,*[7]) *jestliže z každé relace*

$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = k_1 \cdot g_1 + k_2 \cdot g_2 + \ldots + k_n \cdot g_n = 0$,[8]) *$k_i$ celá čísla ($i = 1, 2, \ldots, n$), plyne $k_i \cdot g_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Nekonečnou množinu nenulových prvků $(g_\iota)_{\iota \in I}$, $g_\iota \in G$ nazýváme D-nezávislou, jestliže má tuto vlastnost každá její konečná podmnožina. Množinu nenulových prvků nazýváme D-závislou, není-li D-nezávislá.*[9])

---

[4]) Viz na př. [1].

[5]) Symbolem $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ budeme v celé práci značit mohutnost množiny $\mathfrak{M}$.

[6]) Dá se ovšem dokázat, že tato podmínka je i nutná pro to, aby každá smíšená grupa G, mající periodickou část isomorfní grupě P, byla štěpitelná. Viz [1].

[7]) Resp. prvky $g_1, g_2, \ldots, g_n$, $g_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou navzájem D-nezávislé.

[8]) Symbolem $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ budeme nadále označovat lineární kombinaci prvků grupy G s celými koeficienty. Budeme říkat, že $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = k_1 \cdot g_1 + k_2 \cdot g_2 + \ldots + k_n \cdot g_n$ je triviální, jestliže $k_i \cdot g_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

[9]) V zřejmém smyslu mluvíme o prvku D-závislém na dané množině prvků a pod.

Je zřejmé, že pro aperiodické grupy pojem lineární nezávislosti a D-nezávislosti splývá. Finitní charakter definice 1 dává ihned možnost užíti Zornova lemmatu, takže stejným způsobem, jakým postupujeme v případě studia obyčejné lineární nezávislosti, zjistíme existenci maximální D-nezávislé soustavy nenulových prvků grupy G[10]).

Poznámka 1. Mohutnost této maximální D-nezávislé soustavy (krátce D-soustavy) grupy G není však, jako tomu je v případě maximální lineárně nezávislé soustavy, obecně invariantem grupy G. Uvažujme na př. cyklickou grupu $E = \{g\}$, při čemž $O(g) = p_1 p_2 \dots p_n$, $n \geqq 2$ libovolné přirozené, $p_1, p_2, \dots, p_n$ navzájem různá prvočísla. Uvědomíme-li si, že grupa E je direktním součtem primárních cyklických grup, vytvořených generátory $p_1 p_2 \dots p_{i-1} \cdot p_{i+1} \dots p_n \cdot g$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, t. j.

$$E = \sum_{i=1}^{n}{}' \{p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n \cdot g\},$$

přesvědčíme se snadno, že množiny

$$\mathfrak{E}_k = (p_2 p_3 \dots p_n \cdot g, p_1 p_3 \dots p_n \cdot g, \dots, p_1 p_2 \dots p_{k-2} p_k \dots p_n \cdot g,$$
$$p_1 p_2 \dots p_{k-1} \cdot p_{k+1} \dots p_n \cdot g + p_1 p_2 \dots p_k p_{k+2} \dots p_n \cdot g + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1} \cdot g),$$
$$k = 1, 2, \dots, n,$$

jsou D-soustavy grupy E, při čemž $\mathrm{m}(\mathfrak{E}_k) = k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Z poznámky 1 vidíme nutnost omezení svých dalších úvah na p-primární grupy. Budiž $G_{(p)}$ p-primární Abelova grupa, $\mathfrak{G}_{(p)}$ její D-soustava.

Definice 2. *Mohutnost D-soustavy $\mathfrak{G}_{(p)}$ nenulové p-primární grupy $G_{(p)}$ nazveme D-hodností $\mathrm{r}_D(G_{(p)})$ této grupy: $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}_{(p)})$. Je-li $G_{(p)}$ nulová, položme $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$.*

Dříve než dokážeme oprávněnost této definice, t. j. nezávislost D-hodnosti na volbě D-soustavy grupy $G_{(p)}$, uveďme následující lemmata.

Lemma 1. *Budiž $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ D-soustava grupy $G_{(p)}$ a nechť $O(g_\iota) = p^{k_\iota}$ pro $\iota \in I$. Budiž $\mathfrak{G}' = (g'_\iota)_{\iota \in I}$, kde $g'_\iota = n_\iota p^{k_\iota - l_\iota} \cdot g_\iota$, $1 \leqq l_\iota \leqq k_\iota$, $(n_\iota, p) = 1$. Potom je $\mathfrak{G}'$ D-soustava grupy $G_{(p)}$.*

Důkaz. Především ukažme, že množina prvků $\mathfrak{G}'$ je D-maximální v $G_{(p)}$.[11])
Budiž $g \in G_{(p)}$; jelikož $\mathfrak{G}$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$, máme

$$0 \neq k \cdot g = k_1 \cdot g_{\iota_1} + k_2 \cdot g_{\iota_2} + \dots + k_n \cdot g_{\iota_n}.$$

[10]) Připustíme v definici 1 též množiny, které mohou obsahovat nulový prvek, přesvědčíme se snadno o tom, že přidáním nulového prvku k množině nemění se její vlastnost býti D-závislou či D-nezávislou; to nás opravňuje k tomuto omezení na nenulové prvky.

[11]) T. j. každý nenulový prvek z $G_{(p)}$ je D-závislý na množině $\mathfrak{G}'$. Na rozdíl od D-maximální množiny grupy G rozumíme maximální množinou grupy G množinu nenulových prvků, na níž je lineárně závislý každý prvek této grupy. Při tom, jak si snadno rozmyslíme, množina $\mathfrak{M}$ může být v G maximální, ale nemusí být D-maximální.

Označíme-li

$$O(k_i \,.\, g_{\iota_i}) = p^{e_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad p^{e_0} = \max_{i=1,2,\ldots,n} p^{e_i}\,,$$

máme

$$p^{e_0-1}k \,.\, g = p^{e_0-1}k_1 \,.\, g_{\iota_1} + p^{e_0-1}k_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + p^{e_0-1}k_n \,.\, g_{\iota_n}\,,$$

při čemž v důsledku D-nezávislosti $\mathfrak{G}$ je $p^{e_0-1}k \,.\, g \neq 0$. Je jasné, že pro vhodné r_i je $p^{e_0-1}k_i \,.\, g_{\iota_i} = r_i p^{k_{\iota_i}-1} \,.\, g_{\iota_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, takže máme

$$0 \neq n_{\iota_1} n_{\iota_2} \ldots n_{\iota_n} p^{e_0-1}k \,.\, g = k_1' \,.\, g_{\iota_1}' + k_2' \,.\, g_{\iota_2}' + \ldots + k_n' \,.\, g_{\iota_n}'\,.$$

Zbývá dokázat D-nezávislost $\mathfrak{G}'$; za tím účelem vyšetřujme vztah

$$m_1' \,.\, g_{\iota_1}' + m_2' \,.\, g_{\iota_2}' + \ldots + m_n' \,.\, g_{\iota_n}' = 0, \; m_\iota' \,.\, g_{\iota_i}' \neq 0 \text{ pro vhodný index } i.$$

To znamená však, že

$$m_1 \,.\, g_{\iota_1} + m_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + m_n \,.\, g_{\iota_n} = 0\,,$$

kde

$$m_i = m_i' n_{\iota_i} p^{k_{\iota_i} - l_{\iota_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

a $m_i \,.\, g_{\iota_i} \neq 0$ pro vhodný index i, což je ve sporu s D-nezávislostí soustavy $\mathfrak{G}$ a celý důkaz je hotov.

Poznámka 2. Tvrzení lemmatu 1 nelze ovšem obecně přenést na libovolnou grupu G a její D-soustavu $\mathfrak{G}$. Stačí uvážit příklad cyklické grupy E z poznámky 1: (g) je D-soustava, avšak $(p_1 p_2 \ldots p_{n-1} \,.\, g)$ D-soustava není. Přesto však lze stejným postupem jako v důkaze lemmatu 1 snadno dokázat následující zobecnění tohoto lemmatu pro libovolnou grupu G a speciální D-soustavy, jejichž význam uvidíme v 3:

Budiž $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ D-soustava grupy G taková, že pro každý prvek g_ι je buď $O(g_\iota) = \infty$ nebo $O(g_\iota) = p_\iota^{k_\iota}$, p_ι vhodné prvočíslo, $k_\iota \geqq 1$ přirozené $(\iota \in I)$. Označme $\mathfrak{G}'$ množinu přirozených násobků $n_\iota \,.\, g_\iota = g_\iota' \neq 0$ $(\iota \in I)$. Potom $\mathfrak{G}'$ je D-soustava grupy G.

Na druhé straně pro libovolnou D-soustavu $\mathfrak{G}$ této grupy G platí, že příslušná množina $\mathfrak{G}'$, i v případě, že nepožadujeme $g_\iota' \neq 0$ $(\iota \in I)$ a rozumíme $\mathfrak{G}'$ množinu všech nenulových prvků g_ι', je buď prázdná nebo D-nezávislá.

Obdobným způsobem jako lemma 1 lze dokázat též obrácené tvrzení:

Nechť $\mathfrak{G}' = (g_\iota')_{\iota \in I}$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$ a nechť prvky $g_\iota \in G_{(p)}$ splňují rovnici $n_\iota \,.\, g_\iota = g_\iota'$ pro $\iota \in I$. Potom $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$.

Poznámka 3. Při vyšetřování mohutností D-soustav grupy $G_{(p)}$ stačí se tedy omezit na takové soustavy, které se skládají z prvků, jejichž řád je p. To je patrné ihned z lemmatu 1, neboť položíme-li $n_\iota = l_\iota = 1$ pro všechna

$\iota \in I$, vidíme, že od libovolné D-soustavy $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota\in I}$ grupy $G_{(p)}$ přejdeme k D-soustavě $\mathfrak{G}^\circ = (g_\iota^\circ)_{\iota\in I}$, při čemž $O(g_\iota^\circ) = p$ pro $\iota \in I$ a $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ)$. Mimo to je bezprostředně vidět, že $\mathfrak{G}^\circ$ je D-soustava dolní vrstvy $G_{(p)}^\circ$ grupy $G_{(p)}$.[12])

Lemma 2. *Nechť $g \in G_{(p)}$, $O(g) = p$. Potom g je lineární kombinací prvků $g_1, g_2, \ldots, g_n$, $g_i \in G_{(p)}$, $O(g_i) = p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ právě tehdy, je-li g na těchto prvcích D-závislý.*

Důkaz. Je-li předně prvek $g \in G$ lineární kombinací prvků $g_1, g_2, \ldots, g_n$, je též triviálně na těchto prvcích D-závislý. Budiž naopak $0 \neq k \,.\, g = f(g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_n)$. Jelikož $O(g) = p$, je $(k, p) = 1$, a tedy existují celá čísla r, s, že $rk +$ $+ sp = 1$, odkud máme

$$g = r \,.\, f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = f'(g_1, g_2, \ldots, g_n)\,,$$

což jsme měli dokázat.

V důsledku lemmatu 2 má smysl následující definice ekvivalence dvou množin prvků z $G_{(p)}$ (neboť je zaručena kromě symetričnosti a reflexivity též transitivita tohoto pojmu):

Definice 3. *Dvě množiny $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{V}$ prvků grupy $G_{(p)}$ nazveme D-ekvivalentní, jestliže každý prvek z $\mathfrak{U}$ je D-závislý na množině $\mathfrak{V}$ a naopak.*

Lemma 3. *Nechť $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $O(a_i) = p$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ je D-nezávislá množina prvků grupy $G_{(p)}$ a $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $O(b_j) = p$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ množina prvků grupy $G_{(p)}$ taková, že a_i je D-závislý na $\mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Potom $r \leqq s$ a množina $\mathfrak{B}$ je D-ekvivalentní s množinou $(a_1, a_2, \ldots, a_r, b'_{r+1}, b'_{r+2} \ldots b'_s)$, kde $b'_{r+1}, b'_{r+2}, \ldots, b'_s$ je $s - r$ vhodných prvků z $\mathfrak{B}$.*

Důkaz. Jelikož podle lemmatu 2 $a_1 = f(b_1, b_2, \ldots, b_s)$, je nutně podle téhož lemmatu pro vhodný index i $b_i = f'(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_s)$, a tedy $\mathfrak{B}$ je D-ekvivalentní s $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_s)$. Celé tvrzení potom dokážeme snadno úplnou indukcí podle počtu prvků soustavy $\mathfrak{A}$, využívajíce při tom stále lemmatu 2.

Pomocí lemmatu 2 dokážeme ještě následující

Lemma 4. *Buďtež $\mathfrak{G}^\circ = (g_\alpha)_{\alpha\in A}$, $O(g_\alpha) = p$ $(\alpha \in A)$ a $\mathfrak{H}^\circ = (h_\beta)_{\beta\in B}$, $O(h_\beta) =$ $= p$ $(\beta \in B)$ dvě D-soustavy grupy $G_{(p)}$, jejichž mohutnosti $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ) = \mu$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ) =$ $= \nu$ jsou nekonečné. Potom $\mu = \nu$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mu < \nu$. Jelikož $\mathfrak{H}^\circ$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$, máme podle lemmatu 2

$$g_\alpha = f_\alpha(h_{\beta_1}^{(\alpha)}, h_{\beta_2}^{(\alpha)}, \ldots, h_{\beta_{n_\alpha}}^{(\alpha)})\,,\ \alpha \in A\,. \tag{1}$$

V těchto relacích vystupuje ovšem nejvýše $\aleph_0 \,.\, \mu = \mu$ různých prvků soustavy

[12]) Snadno se dá ukázat též naopak, že každá D-soustava $\mathfrak{G}^\circ$ dolní vrstvy $G^\circ_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$ je D-soustavou grupy $G_{(p)}$.

$\mathfrak{H}^\circ$. Jelikož $\nu > \mu$, existuje prvek $h_{\beta_0} \in \mathfrak{H}^\circ$, který nevystupuje v žádné z relací (1). Jelikož ale

$$h_{\beta_0} = f_{\beta_0}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \ldots, g_{\alpha_k}) = f_0(h_{\beta_1}^{(\alpha_1)}, h_{\beta_2}^{(\alpha_1)}, \ldots, h_{\beta_{n_{\alpha_1}}}^{(\alpha_1)}, h_{\beta_1}^{(\alpha_2)}, \ldots, h_{\beta_{n_{\alpha_k}}}^{(\alpha_k)}),$$

dostáváme spor s D-nezávislostí soustavy $\mathfrak{H}^\circ$.

Nyní už můžeme ukázat oprávněnost definice 2, a to následující větou.

Věta 1. *D-hodnost p-primární grupy $G_{(p)}$, definovaná pomocí definice 2, je invariantem grupy $G_{(p)}$.*

První důkaz. Budiž $G_{(p)} \neq 0$. Buďtež $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{H}$ dvě D-soustavy grupy $G_{(p)}$; při tom nechť $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \varrho$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}) = \sigma$. Podle lemmatu 1 a poznámky 2 možno přejít k D-soustavám $\mathfrak{G}^\circ$, $\mathfrak{H}^\circ$, jejichž každý prvek je řádu p a $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ) = \varrho$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ) = \sigma$. Jsou-li ϱ i σ nekonečná kardinální čísla, dostáváme invarianci D-hodnosti, t. j. rovnost $\varrho = \sigma$, z lemmatu 4, je-li alespoň jedno z čísel ϱ, σ konečné, dostáváme tuto rovnost z lemmatu 3. Tím je důkaz věty 1 hotov.

Druhý důkaz. Nechť $G_{(p)} \neq 0$. Od libovolných D-soustav $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{H}$ přejdeme pomocí lemmatu 1 a poznámky 2 k D-soustavám $\mathfrak{G}^\circ$ a $\mathfrak{H}^\circ$, jejichž prvky mají řád p a je $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ)$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}) = \mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ)$. $\mathfrak{G}^\circ$ a $\mathfrak{H}^\circ$ jsou ovšem D-soustavy dolní vrstvy $\overset{\circ}{G}_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$. Uvědomíme-li si, že $\overset{\circ}{G}_{(p)}$ je vlastně vektorovým prostorem nad prvotělesem charakteristiky p, při čemž, jak se snadno přesvědčíme, pojmy D-nezávislosti a D-hodnosti grupy splývají s pojmy lineární nezávislosti a dimense vektorového prostoru, ihned z teorie vektorových prostorů obdržíme $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ) = \mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ)$. Tím je invariance D-hodnosti $\mathrm{r}_D(G_{(p)})$ p-primární grupy $G_{(p)}$ dokázána.

Budiž nyní G libovolná Abelova grupa, P její periodická část, $P = \sum_p' P_{(p)}$ direktní rozklad této periodické části P na p-primární komponenty.

Definice 4. *D-hodností $\mathrm{r}_D(G)$ grupy G nazveme součet hodnosti $\mathrm{r}(G)$ této grupy a D-hodností p-komponent její periodické části (ve smyslu sečítání mohutností):*

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p \mathrm{r}_D(P_{(p)}).$$

Z úvodních poznámek ihned vyplývá, že D-hodnost $\mathrm{r}_D(G)$ je invariantem grupy G. Je-li grupa G aperiodická, je zřejmě $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$; je-li G periodická, nenulová, potom, zatím co $\mathrm{r}(G) = 0$, je vždy $r_D(G) > 0$ a jestliže G je navíc direktním součtem nerozložitelných Abelových grup, udává $\mathrm{r}_D(G)$ mohutnost množiny direktních sčítanců. Poněkud obecněji:

Je-li smíšená grupa G štěpitelná, $G = P + A$, při čemž její periodická část P je direktním součtem nerozložitelných grup a aperiodický sčítanec A je direktně úplně rozložitelný (t. j. je direktním součtem grup D-hodnosti 1), rovná se její D-hodnost mohutnosti množiny všech direktních sčítanců v direktním rozkladu grupy P a A na zmíněné nerozložitelné podgrupy.[13])

---

[13]) Pro tuto vlastnost nazýváme právě definovanou hodnost Abelovy grupy direktní hodnost.

3. Některé vlastnosti D-hodnosti

Uvědomme si nejprve tvrzení obsažené v tomto lemmatu:

Lemma 5. *Nechť G je Abelova grupa, P její periodická část s rozkladem $P = \sum_p' P_{(p)}$ na p-primární komponenty $P_{(p)}$. Nechť dále $\mathfrak{G}_{(0)} = (g_{\iota_{(0)}})_{\iota_{(0)} \in I_{(0)}}$ je maximální nezávislá soustava grupy G a $\mathfrak{G}_{(p)} = (g_{\iota_{(p)}})_{\iota_{(p)} \in I_{(p)}}$ D-soustava grupy $P_{(p)}$ pro všechna prvočísla p.*[14]) *Potom množinové sjednocení $\overline{\mathfrak{G}}$ soustav $\mathfrak{G}_{(0)}$ a $\mathfrak{G}_{(p)}$ (pro všechna prvočísla p) je D-soustava grupy G.*

Důkaz. Je především jasné, že $\overline{\mathfrak{G}}$ je D-maximální v grupě G; neboť, je-li $g \in G$ libovolný prvek nekonečného řádu, potom je D-závislý na $\mathfrak{G}_{(0)}$, je-li g konečného řádu, je možné jednoznačné vyjádření

$$g = g_{p_1} + g_{p_2} + \ldots + g_{p_n}\,, \quad g_{p_i} \in P_{(p_i)}\,, \quad O(g_{p_i}) = p_i^{k_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

takže

$$p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_n^{k_n} \cdot g = p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_n^{k_n} \cdot g_{p_1} \neq 0\,,$$

odkud je patrná D-závislost na množině $\overline{\mathfrak{G}}$.

Abychom dokázali D-nezávislost množiny $\overline{\mathfrak{G}}$, vyšetřujme mezi libovolnými prvky z $\overline{\mathfrak{G}}$ relaci

$$f_{(0)}(g_{\iota_{(0)},1}, g_{\iota_{(0)},2}, \ldots, g_{\iota_{(0)},n_0}) + f_{(p_1)}(g_{\iota_{(p_1)},1}, g_{\iota_{(p_1)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_1)},n_1}) + \\ + \ldots + f_{(p_k)}(g_{\iota_{(p_k)},1}, g_{\iota_{(p_k)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_k)},n_k}) = 0\,.$$

Vhodným vynásobením tohoto vztahu dostáváme postupně

$$f_{(0)}(g_{\iota_{(0)},1}, g_{\iota_{(0)},2}, \ldots, g_{\iota_{(0)},n_0}) = 0\,, \quad f_{(p_1)}(g_{\iota_{(p_1)},1}, g_{\iota_{(p_1)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_1)},n_1}) = 0\,, \ldots \\ \ldots, f_{(p_k)}(g_{\iota_{(p_k)},1}, g_{\iota_{(p_k)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_k)},n_k}) = 0\,,$$

odkud v důsledku D-nezávislosti soustav $\mathfrak{G}_{(0)}, \mathfrak{G}_{(p_1)}, \ldots, \mathfrak{G}_{(p_k)}$ plyne D-nezávislost množiny $\overline{\mathfrak{G}}$.

Mohutnost D-soustavy $\overline{\mathfrak{G}}$ grupy G, popsané lemmatem 5, je tedy rovna D-hodnosti této grupy. Vztah mezi mohutnostmi libovolných D-soustav a D-hodností grupy G vyšetříme větou 4. Lemma 5 nás opravňuje k následující definici:

Definice 5. *D-soustavu $\mathfrak{G}$ grupy G nazveme kanonickou D-soustavou, jestliže řád každého prvku $g \in \mathfrak{G}$ je nekonečný nebo je mocninou prvočísla. Kanonickou D-soustavu, jejíž každý prvek konečného řádu má řád prvočíselný, nazveme redukovanou.*

Následující vyšetřování kanonických D-soustav ukáže jejich důležitost.

---

[14]) Rozumí se, samozřejmě, pro ta prvočísla p, pro něž je $P_{(p)}$ nenulová.

Lemma 6. *Budiž $\mathfrak{S}$ kanonická D-soustava grupy G. Nechť $G_{(p)}$ je p-primární komponenta periodické části P grupy G, $G_{(p)} \neq 0$. Potom množinový průnik $\mathfrak{S}_{(p)} = \mathfrak{S} \cap G_{(p)}$ je kanonická D-soustava p-primární grupy $G_{(p)}$.*

Důkaz. Předně je z D-maximality D-soustavy $\mathfrak{S}$ zřejmé, že průnik $\mathfrak{S}_{(p)} = \mathfrak{S} \cap G_{(p)}$ je neprázdný; D-nezávislost množiny $\mathfrak{S}_{(p)}$ je triviální. Jde o to, zjistit, že $\mathfrak{S}_{(p)}$ je D-maximální v $G_{(p)}$. Budiž tedy $0 \neq g \in G_{(p)}$; potom v důsledku D-maximality D-soustavy $\mathfrak{S}$ v grupě G je

$$0 \neq k \, . \, g = f_1(g_1^{(p)}, g_2^{(p)}, \ldots, g_n^{(p)}) + f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m), \ g_i^{(p)} \in \mathfrak{S}_{(p)} \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$h_j \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_{(p)}{}^{15)} \ (j = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

t. j.

$$O(g_i^{(p)}) = p^{k_i} \ (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ a}$$
$$O(h_j) = \infty \quad \text{nebo} \quad (O(h_j), p) = 1 \ (j = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Avšak snadno vidíme, že není možné, aby lineární kombinace $f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ byla netriviální. Lemma 6 je dokázáno.

Z poznámky 2 je též jasné, jakým způsobem můžeme od kanonických D-soustav přejít k D-soustavám redukovaným.

Lemma 7. *Budiž $\mathfrak{S}$ D-soustava grupy G, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$ množina všech prvků nekonečného řádu z $\mathfrak{S}$. Potom je $\mathfrak{A}$ maximální lineárně nezávislá soustava grupy G a je tedy*

$$\mathrm{m}(\mathfrak{A}) = \mathrm{r}(G). \tag{2}$$

Důkaz. Lineární nezávislost prvků z $\mathfrak{A}$ je triviální. Přesvědčíme se o maximalitě této množiny; pro libovolný prvek $0 \neq g \in G$ je

$$0 \neq k \, . \, g = f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n) + f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m), \quad g_i \in \mathfrak{A}, \quad h_j \in \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n\,;\ j = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Jelikož $O(h_j) < \infty$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, je potom pro vhodné přirozené t zřejmě $tk \, . \, g = f_1'(g_1, g_2, \ldots, g_n)$,[16] a tedy je též (2).

Platí nyní následující tvrzení:

Věta 2. *Mohutnost kanonické D-soustavy $\mathfrak{S}$ nenulové grupy G se rovná D-hodnosti této grupy.*

Důkaz. To je bezprostředním důsledkem lemmatu 6 a lemmatu 7. Neboť, nechť $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{P}$, kde $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{P}$) je množina prvků nekonečného (resp. konečného) řádu D-soustavy $\mathfrak{S}$. Potom podle lemmatu 7 platí (2); dále máme podle lemmatu 6 a věty 1

$$\mathrm{m}(\mathfrak{P} \cap G_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G_{(p)}), \text{ a tedy } \mathrm{m}(\mathfrak{P}) = \sum_p \mathrm{r}_D(G_{(p)})\,.$$

Tím je věta 2 dokázána.

[15]) $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ označuje množinový rozdíl množin $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$.

[16]) $f'_1(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, t. j. též $f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ může být ovšem triviální. Je též zřejmé, že (2) platí i v případě, že $\mathfrak{A} = \emptyset$.

Poznámka 4. Jestliže mohutnost D-soustavy $\mathfrak{S}$ grupy G je rovna D-hodnosti této grupy, nemusí být D-soustava $\mathfrak{S}$ ještě kanonická:

Budiž $\Pi = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ nekonečná soustava různých prvočísel, r, s celá čísla taková, že $rp_1 + sp_2 = 1$. Grupa G budiž direktním součtem cyklických grup $G(p_k) = \{g_k\}$ řádu p_k: $G = \sum_{i=1}^{\infty}{}' G(p_k)$. Zřejmě $\mathfrak{S} = (s \cdot g_1 - r \cdot g_2, g_3, \ldots$ $\ldots, g_k \ldots)$ je D-soustava, $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)$ a při tom $\mathfrak{S}$ není kanonická D-soustava, neboť $O(s \cdot g_1 - r \cdot g_2) = p_1p_2$.

Ukážeme však, že toto nemůže nastat v případě, kdy D-hodnost grupy G je konečná. Nejprve však dokažme lemma, které popisuje, jak možno přejít od libovolné D-soustavy grupy G ke kanonické D-soustavě této grupy.

Lemma 8. *Budiž $\mathfrak{S}$ D-soustava grupy G. Každý prvek $g \in \mathfrak{S}$ konečného řádu, jež není mocninou prvočísla, t. j.*

$$O(g) = n = p_1^{e_1}p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}, \quad 1 \leqq e_i \ (i = 1, 2, \ldots, k), \quad k \geqq 2 \text{ přirozená čísla}, \quad (3)$$

nahraďme k prvky

$$g_1 = p_2^{e_2}p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k} \cdot g, \quad g_2 = p_1^{e_1}p_3^{e_3} \ldots p_k^{e_k} \cdot g, \ldots g_k = p_1^{e_1}p_2^{e_2} \ldots p_{k-1}^{e_{k-1}} \cdot g \quad (4)$$

a označme vzniklou množinu $\mathfrak{S}'$. Potom $\mathfrak{S}'$ je kanonická D-soustava grupy G.

Důkaz. Je zřejmé, že každý prvek množiny $\mathfrak{S}'$ má buď řád nekonečný nebo řád rovný mocnině některého prvočísla. Dále $\mathfrak{S}'$ je D-maximální v grupě G; k tomu si stačí uvědomit, že pro prvek $g \in \mathfrak{S}$, splňující podmínky (3), je $g = f(g_1, g_2, \ldots, g_k)$, g_i tvaru (4), $i = 1, 2, \ldots, k$. Dokážeme ještě D-nezávislost množiny $\mathfrak{S}'$. Nechť pro $g_i \in \mathfrak{S}'$ platí vztah

$$0 \neq t \cdot g_i = f_1(g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_k) + f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m),$$

kde prvky $g_1, g_2, \ldots, g_k$ mají význam uvedený ve znění lemmatu. Jelikož $(O(g_i), O(g_j)) = 1$ pro $j \neq i$, $j = 1, 2, \ldots, k$, existuje přirozené číslo l, že $0 \neq tl \cdot g_i = f_2'(h_1, h_2 \ldots h_m)$; ale g_i, jakož i prvky $h_1, h_2, \ldots, h_m$ jsou přirozenými násobky jistých prvků z D-soustavy $\mathfrak{S}$ a tedy podle poznámky 2 máme tvrzení lemmatu 8 ověřeno, neboť $f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ je nutně triviální.

Věta 3. *Je-li D-hodnost $\mathrm{r}_D(G)$ nenulové grupy G konečná, potom kanonické D-soustavy grupy G jsou právě D-nezávislé množiny prvků této grupy, jejichž mohutnost je $\mathrm{r}_D(G)$.*

Důkaz. První část tvrzení je obsažena ve větě 2. Máme-li naopak D-nezávislou množinu $\mathfrak{S}$ prvků grupy G, $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)$, která není kanonickou D-soustavou, doplníme ji na množinu D-maximální v grupě G a způsobem popsaným v lemmatu 8 přejdeme ke kanonické D-soustavě; ihned dostáváme spor s větou 2.

Důsledkem lemmatu 8 je též následující věta.

Věta 4. *Mohutnost libovolné D-soustavy* $\mathfrak{S}$ *grupy* G *je rovna nejvýše D-hodnosti této grupy:* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$; *je-li při tom* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, *je dokonce* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)$.

Důkaz. Podle lemmatu 8 můžeme od libovolné D-soustavy $\mathfrak{S}$ přejít ke kanonické D-soustavě $\mathfrak{S}'$, při čemž $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \leqq \mathrm{m}(\mathfrak{S}')$. Podle věty 2 máme $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \leqq \leqq \mathrm{m}(\mathfrak{S}') = \mathrm{r}_D(G)$. Jestliže $\mathfrak{S}$ je konečná, je též $\mathfrak{S}'$ a tedy i D-hodnost $\mathrm{r}_D(G)$ grupy G konečná. Je-li $\mathrm{r}_D(G)$ nekonečná, je v důsledku toho nutně $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \geqq \aleph_0$. Protože ale podle lemmatu 8 je

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(\mathfrak{S}') \leqq \aleph_0 \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{m}(\mathfrak{S})\,,$$

je celá věta 4 dokázána.

Tvrzení lemmatu 5 a věty 4 vede ihned k výsledku, z něhož je bezprostředně patrná invariance pojmu D-hodnosti Abelovy grupy a pomocí něhož též vidíme, jak možno D-hodnost Abelovy grupy definovat přímo, nezávisle na rozkladu grupy G.

Věta 5. *Budiž* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *systém všech D-soustav nenulové grupy* G; *označme* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ *pro* $\delta \in \Delta$. *Potom množina kardinálních čísel* $\Lambda = (\lambda_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *má maximální prvek* λ_{δ_1} *a je* $\lambda_{\delta_1} = \mathrm{r}_D(G)$. *Při tom je množina* Λ *jednoprvková,* $\Lambda = (\mathrm{r}_D(G))$, *tehdy a jen tehdy, jestliže v systému* $\mathfrak{M}$ *existuje alespoň jedna D-soustava* $\mathfrak{S}_{\delta_2}$ *nekonečné mohutnosti, nebo jestliže periodická část grupy* G *je p-primární či nulová.*[17])

Důkaz. Z věty 4 vyplývá pro všechna kardinální čísla $\lambda_\delta (\delta \in \Delta)$ nerovnost $\lambda_\delta \leqq \mathrm{r}_D(G)$, z lemmatu 5 pak existence čísla λ_{δ_1}, pro něž je $\lambda_{\delta_1} = \mathrm{r}_D(G)$. Je-li $\mathfrak{S}_{\delta_2}$ D-soustava z $\mathfrak{M}$, jejíž mohutnost je nekonečná, potom z věty 4 plyne, že $\Lambda = (\mathrm{r}_D(G))$. Stejně je tomu tak podle lemmatu 7 a věty 1 v případě, kdy periodická část grupy G je nulová či p-primární.

Jestliže $\Lambda = (\mathrm{r}_D(G))$ je naopak jednoprvková a není-li $\mathrm{r}_D(G)$ nekonečná, ani G aperiodická, je nutně periodická část grupy G p-primární. Jinak by totiž existoval prvek $g \in G$ konečného řádu $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} n'$, p_i navzájem různá prvočísla, $e_i \geqq 1$, n' přirozená čísla ($i = 1, 2$) a dále D-soustava $\mathfrak{S}$ grupy G, obsahující tento prvek g. Jelikož je při tom $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) < \infty$, máme podle lemmatu 8 $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) < \mathrm{r}_D(G)$, což je spor s předpokladem o množině Λ.

Nyní dokážeme jednoduchý vztah mezi D-hodností grupy G a její podgrupy H a mezi D-hodností direktního součtu $G = \sum_{\iota \in I}' G_\iota$ a D-hodnostmi direktních sčítanců G_ι $(\iota \in I)$.

Věta 6. *Pro podgrupu* $H \subseteq G$ *platí* $\mathrm{r}_D(H) \leqq \mathrm{r}_D(G)$, *pro direktní součet* $G = \sum_{\iota \in I}' G_\iota$ *je* $\mathrm{r}_D(G) = \sum_{\iota \in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.

Důkaz. První část je triviální, neboť každou kanonickou D-soustavu podgrupy H můžeme doplnit na D-soustavu grupy G.[18]) Podobně dokážeme

[17]) T. j. G je aperiodická.

[18]) Dokonce, jak je snadné se přesvědčit, na kanonickou D-soustavu grupy G.

snadno i druhé tvrzení. Stačí si jen uvědomit, že množinové sjednocení kanonických D-soustav $\mathfrak{G}_\iota$ grup G_ι $(\iota \in I)$ je kanonickou D-soustavou grupy G.

Ovšem známý vztah mezi hodností grupy G a její podgrupy $H \subseteq G$

$$r(G) = r(H) + r(G/H)$$

obecně nelze na D-hodnost přenést. To ukazuje jednoduchý příklad aditivní grupy racionálních čísel R a její podgrupy $\{1\} \subset R$. Je totiž $r_D(R) = r_D(\{1\}) = 1$, ale $r_D(R/\{1\}) = \aleph_0$, neboť $R/\{1\}$ je direktní součet Prüferových grup $G(p^\infty)$ vzhledem ke všem prvočíslům p. Rovnost

$$r_D(G) = r_D(H) + r_D(G/H) \tag{5}$$

dokonce obecně neplatí ani pro p-primární grupu G. Neboť, není-li p-primární grupa G konečné D-hodnosti direktním součtem cyklických grup řádu p, t. j. existuje-li $g \in G$, $O(g) > p$, potom za podgrupu H stačí volit dolní vrstvu G° grupy G; je totiž podle poznámky 3 $r_D(G) = r_D(G^\circ)$ a jelikož $G/G^\circ \neq 0$, je $r_D(G/G^\circ) > 0$, neboli neplatí (5).

Věta 7. *Pro libovolnou podgrupu H grupy G platí vztah:*

$$r_D(G) \leqq r_D(H) + r_D(G/H)\,. \tag{6}$$

Důkaz. Budiž $\mathfrak{H}$ kanonická D-soustava grupy H; doplňme ji na kanonickou D-soustavu $\mathfrak{G}$ grupy G. Zbytkovou třídu faktorové grupy G mod H, ve které leží prvek g, označme $\bar{g}$ a množinu takto vzniklých tříd pro všechny prvky $g \in \mathfrak{G} - \mathfrak{H}$ potom označme $\bar{\mathfrak{F}}$. Dokážeme, že $\bar{\mathfrak{F}}$ je D-nezávislá v G/H. Nechť tedy existuje netriviální lineární kombinace $f_1(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n) = 0$, $\bar{g}_i \in \bar{\mathfrak{F}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Potom odtud dostáváme vztah

$$f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n) = h\,, \quad g_i \in \mathfrak{G} - \mathfrak{H} \ (i = 1, 2, \ldots, n),\ h \in H\,.$$

Je-li $h = 0$, je $f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ a tedy i $f_1(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n)$ triviální. Je tedy $h \neq 0$, t. j.

$$0 \neq k\,.\,h = f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m),\ h_j \in \mathfrak{H} \ (j = 1, 2, \ldots, m),$$

odkud $0 \neq f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m) = f_1'(g_1, g_2, \ldots, g_n)$; to je spor s D-nezávislostí D-soustavy $\mathfrak{G}$. Jelikož podle věty 4 je $r_D(G/H) \geqq m(\bar{\mathfrak{F}}) = m(\mathfrak{G} - \mathfrak{H})$, dostáváme ihned (6).

Vyšetříme nyní, jaké podmínky musí splňovat grupa G a její podgrupa $H \subseteq G$, aby platila rovnost (5). K tomu účelu dokažme nejprve následující lemmata a věty, které jsou důležité i samy o sobě.

Lemma 9. *Budiž G Abelova grupa; nechť G_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ je podgrupa grupy G těch prvků $g \in G$, pro něž je $O(g) = p^j$, $j \leqq i$, p prvočíslo.*[19] *Jestliže platí $m(G_k) \geqq \aleph_0$ (resp. $m(G_k) > \tau$ pro kardinální číslo $\tau \geqq \aleph_0$), pak též pro každý index $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ platí $m(G_i) \geqq \aleph_0$* (resp. $m(G_i) > \tau$).[20]

[19]) T. j. $p^i\,.\,g = 0$. Je tedy $G_k \supseteq G_{k-1} \supseteq \ldots \supseteq G_1$.

[20]) Stejným způsobem dokážeme implikaci: Jestliže σ je nekonečné regulární kardinální číslo, a je $m(G_k) \geqq \sigma$, potom $m(G_i) \geqq \sigma$ pro každý index $i = 1, 2, \ldots k - 1$.

Důkaz. Důkaz provedeme úplnou indukcí; ukážeme, že z nerovnosti $\mathrm{m}(G_i) \geqq \aleph_0$ plyne ihned nerovnost $\mathrm{m}(G_{i-1}) \geqq \aleph_0$ $(i = k, k-1, \dots, 2)$. Nechť je naopak $\mathrm{m}(G_{i-1}) < \aleph_0$. Potom existuje prvek $g_{i-1} \in G_{i-1}$, že množina řešení rovnice

$$p \cdot x = g_{i-1} \tag{7}$$

v grupě G_i má mohutnost $\varrho_{i-1} \geqq \aleph_0$. Jinak totiž dostáváme proti předpokladu $\mathrm{m}(G_i) < \mathrm{m}(G_{i-1}) \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Ovšem, je-li g_i řešení rovnice (7), potom každé jiné řešení této rovnice má tvar $g_i + g_1$, $g_1 \in G_1$. Tedy $\mathrm{m}(G_1) \geqq \aleph_0$, ale protože $G_{i-1} \supseteq G_1$, dostáváme $\mathrm{m}(G_{i-1}) \geqq \mathrm{m}(G_1) \geqq \aleph_0$, což je spor s předpokladem.

Druhé tvrzení s ostrou nerovností dokážeme snadno stejným způsobem.

Lemma 10. *Budiž $\mathfrak{M}$ množina všech řešení rovnice*

$$n \cdot x = g_0\,, \quad 0 \neq g_0 \in G\,, \ n \ \text{přirozené číslo}, \tag{8}$$

v grupě G. Potom je buďto $\mathfrak{M} = \emptyset$, nebo platí:

je-li $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, je $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$,[21])

je-li $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, je též $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.

Důkaz. Nechť existuje řešení rovnice (8); označme je g', t. j. $n \cdot g' = g_0$. Všechna ostatní řešení rovnice (8) v grupě G jsou pak právě prvky tvaru $g = g' + h$, $h \in G$, $n \cdot h = 0$. Označme $G^{(n)}$ podgrupu grupy G všech prvků $h \in G$, pro něž $n \cdot h = 0$. Je tedy zřejmě $\mathrm{m}(G^{(n)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{M})$.

Dokažme nejdříve první část tvrzení; předpokládejme, že toto tvrzení neplatí, t. j.

$$\mathrm{m}(\mathfrak{M}) > \mathrm{r}_D(G), \quad \text{čili} \quad \mathrm{m}(G^{(n)}) > \mathrm{r}_D(G)\,. \tag{9}$$

Budiž

$$G^{(n)} = \sum_p{}' G^{(n)}_{(p)} \tag{10}$$

rozklad grupy $G^{(n)}$ na p-primární komponenty, jichž je zřejmě konečný počet, a $\mathfrak{G}^{(n)}$ redukovaná kanonická D-soustava grupy $G^{(n)}$. Ukážeme nejprve, že za předpokladu (9) platí $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$, t. j. $\mathrm{r}_D(G^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$. Předpokládejme tedy, že naše tvrzení neplatí, t. j. že

$$\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}) < \mathrm{m}(G^{(n)})\,. \tag{11}$$

Jelikož podle lemmatu 6 redukovaná D-soustava $\mathfrak{G}^{(n)}$ je sjednocením redukovaných D-soustav $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p)}$ jednotlivých p-primárních komponent $G^{(n)}_{(p)}$ v rozkladu (10) a jelikož z předpokladu $\mathrm{m}(G^{(n)}) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ plyne existence prvočísla p_0, pro něž $\mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$, je potom pro toto prvočíslo p_0 nutně

$$\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) < \mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)})\,, \quad \mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0\,. \tag{12}$$

[21]) Je-li G aperiodická, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, je ovšem $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) = 1$. Jestliže $G = G(\infty) + \sum_{\iota \in I}' G_\iota(p)$, $G(\infty) = \{g\}$, $\mathrm{m}(I) = \mu \geqq \aleph_0$ a je-li $n = p$, $g_0 = n \cdot g$, je potom $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) = \mathrm{r}_D(G) = \mu$.

Při tom, protože řády prvků z $G^{(n)}_{(p_0)}$ jsou omezeny, pro vhodné přirozené k (volme k nejmenší možné) a libovolný prvek $g \in G^{(n)}_{(p_0)}$ je $O(g) \leqq p_0^k$. Uvažujme nyní konečnou klesající posloupnost podgrup

$$G^{(n)}_{(p_0)} = G_k \supset G_{k-1} \supset \ldots \supset G_2 \supset G_1 \neq 0 ,$$

kde G_i je podgrupa grupy $G^{(n)}_{(p_0)}$ těch prvků g, pro jejichž řád platí vztah

$$O(g) \leqq p_0^i \; (i = k, k-1, \ldots, 2, 1) .^{22})$$

Při tom si uvědoměme, že redukovaná D-soustava $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$ p_0-primární komponenty $G^{(n)}_{(p_0)}$ grupy $G^{(n)}$ je též redukovanou D-soustavou každé podgrupy G_i $(i = k-1, k-2, \ldots, 2, 1)$. Jelikož platí (12), dostáváme podle lemmatu 9 ihned $\mathrm{m}(G_1) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$. Odtud vidíme, že

$$\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0 .^{23}) \tag{13}$$

Kdyby totiž platilo $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) < \aleph_0$, bylo by též $\mathrm{m}(G_1) < \aleph_0$, neboť každý prvek $g_1 \in G_1$ je podle lemmatu 2 lineární kombinací prvků z $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$ a všech možných takových lineárních kombinací je zřejmě konečný počet. Jelikož podle (12) a (13) $\mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) > \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0$, dostáváme opětným použitím druhé části lemmatu 9 $\mathrm{m}(G_1) > \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)})$. S druhé strany však každý prvek podgrupy G_1 je lineární kombinací prvků z D-soustavy $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$, a tedy podle (13)

$$\mathrm{m}(G_1) \leqq \mathrm{m}\,(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \,.\, \aleph_0 = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \,.$$

Tím jsme však odvodili z předpokladu (11) spor, takže za předpokladu (9) je skutečně $\mathrm{r}_D(G^{(n)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$. Z této rovnosti a ze vztahu (9) dostáváme $\mathrm{r}_D(G^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)}) > \mathrm{r}_D(G)$, $G^{(n)} \subseteq G$, což je ve sporu s větou 6. Tedy nebyl správný ani předpoklad (9) a je skutečně $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$.

Druhé tvrzení dokážeme též použitím lemmatu 9. Nechť za předpokladu, že $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, platí $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \geqq \aleph_0$, t. j. $\mathrm{m}(G^{(n)}) \geqq \aleph_0$. Potom nutně v konečném direktním rozkladu (10) podgrupy $G^{(n)}$ pro vhodné prvočíslo p_0 je

$$\mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0.$$

Ponechajíce označení z první části důkazu, dostáváme odtud podle první části lemmatu 9 $\mathrm{m}(G_1) \geqq \aleph_0$. Potom ovšem, protože každý prvek grupy G_1 je lineární kombinací prvků z $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$, máme $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0$; protože $G^{(n)}_{(p_0)} \subseteq G$, je podle věty 6 $\mathrm{r}_D(G^{(n)}_{(p_0)}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$, a tedy

$$\mathrm{r}_D(G) \geqq \mathrm{r}_D(G^{(n)}_{(p_0)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0 ,$$

což je spor s předpokladem lemmatu 10. Celé lemma 10 je dokázáno.

Věta 8. *Je-li* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, *resp. je-li* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$,[24]) *potom je* $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.

Důkaz. Nechť nejprve $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$. Jelikož pro každý prvek $0 \neq g \in G$ platí

$$0 \neq g_0 = k \,.\, g = f_{(g)}(g_1, g_2, \ldots, g_m) \,, \quad g_i \in \mathfrak{G} \; (i = 1, 2, \ldots, m) \,,$$

[22]) Dokonce všech prvků $g \in G$, pro něž platí, že $p^i{}_0 \,.\, g = 0$ $(i = k, k-1, \ldots, 2, 1)$.

[23]) Nerovnost možno samozřejmě zlepšit: $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$.

kde $\mathfrak{G}$ je D-soustava grupy G, a jelikož podle lemmatu 10 je mohutnost množiny $\mathfrak{M}^n_{g_0}$ řešení rovnice (8) v grupě G pro každé přirozené n nejvýše rovna D-hodnosti grupy G, snadno zjistíme, že

$$\mathrm{m}(G) \leqq \mathrm{m}(\mathfrak{M}^n_{g_0}) \,.\, \aleph_0 \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{G}) \,.\, \aleph_0 \leqq \mathrm{r}_D(G) \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{r}_D(G)\,.$$

S druhé strany platí triviálně $\mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{r}_D(G)$, čímž máme důkaz prvního tvrzení hotov.

Abychom dokázali druhé tvrzení, ukážeme, že nerovnost $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ je důsledkem nerovnosti $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$. Předpokládejme za tím účelem opak, t. j.

$$\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0\,. \tag{14}$$

Z lemmatu 10 dostáváme, že pro každé n má rovnice (8) pouze konečně řešení,[25]) a tedy je-li $\mathfrak{G}$ D-soustava grupy G, je $\mathrm{m}(G) \leqq \aleph_0^2 \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{G}) \,.\, \aleph_0 = \aleph_0$, neboť $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$ podle věty 4. Tím jsme odvodili z předpokladu (14) spor s nerovností $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$; celá věta 8 je dokázána.

Věta 9. *Je-li* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(nebo* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*),*[24]) *potom pro libovolnou podgrupu* $H \subseteq G$ *platí rovnost* (5).

Důkaz. Podle věty 7 platí nerovnost (6). Je dále zřejmě $\mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{m}(H)$, $\mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{m}(G/H)$. Jelikož podle věty 8 je $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{m}(H) + \mathrm{m}(G/H)$, a triviálně $\mathrm{m}(H) \geqq \mathrm{r}_D(H)$, $\mathrm{m}(G/H) \geqq \mathrm{r}_D(G/H)$, dostáváme $\mathrm{r}_D(G) \geqq \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)$; věta 9 je dokázána.

Abychom popsali též případ, kdy platí (5) pro grupy, jejichž D-hodnost je konečná, zaveďme pojem *slabě servantní podgrupy* v dané grupě.

Definice 6. *Podgrupu H grupy G nazveme slabě servantní v G, jestliže každá zbytková třída grupy G/H řádu prvočíselného obsahuje prvek téhož řádu.*[26])

Věta 10. *Je-li* $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, *potom pro její podgrupu* $H \subseteq G$ *platí rovnost* (5) *právě tehdy, je-li H slabě servantní v G.*

Důkaz. Jelikož pro případy $G = 0$ nebo $H = 0$ jsou implikace v obou směrech triviální, předpokládejme $H \neq 0$.

Nechť podgrupa H je slabě servantní v G. Budiž $\mathfrak{H} = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$ redukovaná D-soustava grupy H (podle věty 6 a věty 4 je konečná) a $\bar{\mathfrak{G}} = (\bar{g}_\iota)_{\iota \in I}$

---

[24]) Je-li G periodická grupa, jejíž prvky mají ohraničené řády, potom z důkazu věty 8 vidíme, že k platnosti $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$ stačí předpokládat $\mathrm{m}(G) \geqq \aleph_0$. Příklad grup $G(p^\infty)$, $G(\infty)$ však ukazuje, že v případě obecné periodické či aperiodické grupy nutno předpokládat ostrou nerovnost.

[25]) Zde jsme se však mohli obejít bez druhé části lemmatu 10, neboť k našemu účelu stačí tvrzení, že každá tato rovnice má nejvýše spočetně řešení, což plyne ihned z první části lemmatu 10: utvoříme totiž grupu $G_1 = G + \sum_{i=1}^{\infty}{}' G_i(p)$, $\mathrm{r}_D(G_1) = \aleph_0$, a dále je vše zřejmé.

[26]) Ekvivalentní je definice: Podgrupu H grupy G nazveme slabě servantní v G, jestliže každá rovnice $p \,.\, x = h$, $0 \neq h \in H$, p libovolné prvočíslo, která má řešení v grupě G, má též řešení v H. Je-li G aperiodická grupa, potom ovšem pojem slabě servantní a servantní podgrupy splývá.

redukovaná D-soustava grupy G/H. Podle předpokladu existují prvky $g_\iota \in G$ takové, že

$$g_\iota \in \bar{g}_\iota\,, \quad O(g_\iota) = O(\bar{g}_\iota)\,, \quad \iota \in I\,.^{27)} \tag{15}$$

Označme $\mathfrak{G}' = (g_\iota)_{\iota \in I}$. Dokážeme, že množina $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' \cup \mathfrak{H}$ je D-nezávislá. Vyšetřujme lineární kombinaci

$$k_1 \,.\, h_1 + k_2 \,.\, h_2 + \ldots + k_r \,.\, h_r + l_1 \,.\, g_{\iota_1} + l_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + l_s \,.\, g_{\iota_s} = 0\,;$$

potom je $l_1 \,.\, \bar{g}_{\iota_1} + l_2 \,.\, \bar{g}_{\iota_2} + \ldots + l_s \,.\, \bar{g}_{\iota_s} = 0$, čili $l_i \,.\, \bar{g}_{\iota_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, a tedy podle (15) $l_i \,.\, g_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Potom ovšem $k_j \,.\, h_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, r$. Dostáváme tudíž nerovnost

$$\mathrm{r}_D(G) \geqq \mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{m}(\mathfrak{H}) + \mathrm{m}(\bar{\mathfrak{G}}) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)^{28)}$$

a jelikož podle věty 7 platí (6), je skutečně (5).

Nechť naopak platí rovnost (5). Buďtež $\mathfrak{H} = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$, $\mathfrak{G} = (h_1, h_2, \ldots$ $\ldots, h_r, g_1, g_2, \ldots, g_s)$ redukované D-soustavy podgrupy H a grupy G, t. j. $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$. Označme zbytkovou třídu faktorové grupy G/H, v níž leží prvek g_i, symbolem $\bar{g}_i$; je $\bar{g}_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, s$). Při tom zřejmě pro každý index i platí:

$$\text{je-li } O(g_i) = p, \text{ je } O(\bar{g}_i) = p, \text{ je-li } O(g_i) = \infty, \text{ je } O(\bar{g}_i) = \infty\,.$$

Stejným způsobem jako v důkaze věty 7 dokážeme, že množina $\bar{\mathfrak{G}} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{g}_s)$ je D-nezávislá. Jelikož platí (5), je tedy $\bar{\mathfrak{G}}$ redukovaná D-soustava grupy G/H.

Budiž nyní $\bar{g} \in G/H$, $O(\bar{g}) = p$, kde p je prvočíslo. Pak je podle lemmatu 6 a lemmatu 2 $\bar{g} = f(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_s)$. Odtud pro $g \in \bar{g}$ dostáváme $g = f(g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_s) + h$, $h \in H$, čili $g - h \in \bar{g}$, $g - h = f(g_1, g_2, \ldots, g_s)$. Při tom ovšem $O(f(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_s)) = O(f(g_1, g_2, \ldots, g_s))$, neboť $\bar{\mathfrak{G}}$ je D-nezávislá množina a $O(g_i) = O(\bar{g}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Tedy $O(g - h) = O(\bar{g})$, $g - h \in \bar{g}$, čímž je celá věta 10 dokázána.

Z věty 9 a věty 10 ihned vyplývá následující tvrzení.

Korolár 1. *Je-li H servantní podgrupou v Abelově grupě G (nebo je-li speciálně direktním sčítancem této grupy),*[29]) *potom platí rovnost* (5).

Poznámka 5. Uvedeme jednoduchý příklad, ukazující, že z platnosti (5) neplyne ještě, že podgrupa H je servantní v G. Zároveň nám tento příklad ukáže, že *pojem slabě servantní se nekryje s pojmem servantní podgrupy* v dané grupě. Budiž $G = G(\infty) + G(p)$, $G(\infty) = \{g_1\}$, $G(p) = \{g_2\}$, $H = \{p \,.\, g_1 + g_2\}$. Je zřejmé, že H není servantní v G, neboť rovnice $p^2 \,.\, x = p^2 \,.\, g_1$ má řešení $g_1 \in G$, nemá však řešení v podgrupě H.[30]) Snadno ale zjistíme, že faktorová

[27]) Je-li $O(\bar{g}_\iota) = p_\iota$, plyne toto tvrzení z předpokladu slabé servantnosti podgrupy H v G, je-li $O(\bar{g}_\iota) = \infty$, je tvrzení triviální.

[28]) Odtud též vidíme, že $\bar{\mathfrak{G}}$ je konečná.

[29]) Toto plyne už ovšem z věty 6.

[30]) Všechna řešení mají tvar $g_1 + k \,.\, g_2$ ($k = 1, 2, \ldots p - 1, p$).

grupa G/H je isomorfní cyklické grupě řádu p^2, vytvořené zbytkovou třídou $\bar{g}_1$, v níž leží generátor g_1 grupy $G(\infty)$. Tedy $r_D(G) = 2$, $r_D(H) = 1$, $r_D(G/H) = 1$ a vztah (5) platí.

4. Závěrečné poznámky

Obsahem tohoto posledního odstavce jsou dvě věty o Abelových grupách konečné D-hodnosti a poznámka k Prüferově pojmu hodnosti Abelovy grupy. Zatím co jsme v předcházejících úvahách nepoužívali žádných hlubších výsledků teorie Abelových grup, odvoláme se nyní na některá tvrzení připomenutá v přípravném odstavci 1.

Na rozdíl od aperiodických grup konečné D-hodnosti (které, jak známo, nejsou obecně direktně rozložitelné na podgrupy D-hodnosti 1) platí toto tvrzení:

Věta 11. *Periodická grupa G konečné D-hodnosti n je direktním součtem n grup D-hodnosti 1, t. j. primárních cyklických grup a grup typu p^∞ (vzhledem k různým prvočíslům p).*[31])

Důkaz. Předně ihned vidíme, že periodické grupy D-hodnosti 1 jsou právě primární cyklické grupy a grupy typu p^∞. Jelikož grupu G můžeme direktně rozložit na p-primární komponenty, jejichž D-hodnost je také konečná, stačí větu dokázat za předpokladu, že G je p-primární. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Je-li $n = 1$, je tvrzení věty triviální; předpokládejme, že pro p-primární grupy D-hodnosti $n - 1 \geqq 1$ tvrzení platí. Jelikož z grupy G můžeme vždy direktně oddělit cyklického sčítance nebo grupu typu p^∞, máme $G = G' \dotplus G_n$, $r_D(G_n) = 1$. Potom podle věty 6 je $r_D(G') = n - 1$, a tedy $G' = \sum_{i=1}^{n-1}{}' G_i$, $r_D(G_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, odkud $G = \sum_{i=1}^{n}{}' G_i$, $r_D(G_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, q. e. d.

Z věty 11 dostáváme ihned následující důsledek.

Korolár 2. *Redukované periodické Abelovy grupy konečné D-hodnosti jsou právě konečné Abelovy grupy.*

Věta 12. *Smíšená Abelova grupa G konečné D-hodnosti je štěpitelná.*

Důkaz. V důsledku $r_D(G) < \aleph_0$ má též periodická část P grupy G konečnou D-hodnost a je tedy podle věty 11 konečným direktním součtem cyklických grup a grup $G(p^\infty)$. Prvky konečného direktního součtu cyklických grup mají však ohraničené řády, takže P je direktním sčítancem G. Věta 12 je dokázána.

Poznámka 6. H. Prüfer (viz [2]) definuje pojem hodnosti Abelovy grupy G takto (označme ji $r_P(G)$):

---

31) Z důkazu této věty je patrno, že stačí předpokládat, aby každá p-primární komponenta grupy G měla konečnou D-hodnost.

Je-li G nenulová, konečná a je-li $\mathfrak{G}$ soustava generátorů této grupy o nejmenším počtu prvků, potom $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{m}(\mathfrak{G})$. Je-li G nekonečná, označme $\mathfrak{S} = (\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$ systém všech konečných podmnožin prvků grupy G; nechť $\mathfrak{G}_\iota$, $\iota \in I$ je soustava generátorů o nejmenším počtu prvků podgrupy grupy G, vytvořené prvky z $\Gamma_\iota (\iota \in I)$. Označme $\mathrm{m}(\mathfrak{G}_\iota) = n_\iota$. Existuje-li v množině přirozených čísel $(n_\iota)_{\iota \in I}$ maximální prvek n_{ι_0}, potom $\mathrm{r}_P(G) = n_{\iota_0}$; neexistuje-li takový prvek (t. j. tato množina je neohraničená), je $\mathrm{r}_P(G) = \infty$. Pro nulovou grupu G je $\mathrm{r}_P(G) = 0$.

Snadno se přesvědčíme, že pro p-primární Abelovy grupy splývá pojem D-hodnosti s Prüferovou definicí hodnosti Abelovy grupy v tom smyslu, že libovolné nekonečné D-hodnosti odpovídá Prüferova hodnost ∞. Předpokládejme nejprve za tím účelem, že p-primární grupa $G_{(p)}$ je konečná. Potom je $G_{(p)}$ konečným direktním součtem p-primárních cyklických grup a vidíme ihned, že

$$\mathrm{r}_P(G_{(p)}) = r_D(G_{(p)}) \,. \tag{16}$$

Předpokládejme dále, že $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) < \aleph_0$. Budiž Γ libovolná konečná množina prvků z $G_{(p)}$ a $G'_{(p)}$ konečná podgrupa grupy $G_{(p)}$, vytvořená prvky z této množiny; tedy $\mathrm{r}_D(G'_{(p)}) \leqq \mathrm{r}_D(G_{(p)})$. Jelikož $G'_{(p)}$ je konečná, dostáváme $\mathrm{r}_P(G'_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G'_{(p)}) \leqq \mathrm{r}_D(G_{(p)})$. S druhé strany však pro konečnou dolní vrstvu $G^\circ_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$ je podle předchozí úvahy a poznámky 3 $\mathrm{r}_P(G^\circ_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G^\circ_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G_{(p)})$, takže skutečně platí (16).

Je-li nakonec $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) \geqq \aleph_0$, potom dolní vrstva $G^\circ_{(p)}$ je direktním součtem nekonečně mnoha cyklických grup $G(p)$, takže ihned dostáváme $\mathrm{r}_P(G_{(p)}) = \infty$.

Stejnými úvahami, využívajíce známé věty o rozkladu Abelovy grupy s konečným počtem generátorů na direktní součet cyklických podgrup, se snadno přesvědčíme, že platí, je-li grupa G aperiodická,

$$\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G) \,, \tag{17}$$

a že pro libovolnou Abelovu grupu G platí

$$\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G) \,; \tag{18}$$

při tom oba vztahy (17) a (18) chápeme v případě, je-li $\mathrm{r}_P(G) = \infty$, ve zřejmém smyslu. Příklad konečné cyklické grupy E z poznámky 1 pak ukazuje, že vztah (18) mezi Prüferovou hodností a D-hodností Abelovy grupy může být ostrou nerovností; je totiž zřejmě $r_P(E) = 1$, $\mathrm{r}_D(E) = n$, $n \geqq 2$.

LITERATURA

[1] *А. Г. Курош*: Теория групп, 2-ое изд., Москва 1953.

[2] *H. Prüfer*: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift **17** (1923), 35—61.

Резюме

D-РАНГ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Прага.

(Поступило в редакцию 9/IV 1956 г.)

Автор называет в статье множество элементов $(g_\iota)_{\iota \in I}$ абелевой группы G *D-независимым*, если из всякого соотношения

$$k_1 . g_{\iota_1} + k_2 . g_{\iota_2} + \ldots + k_n . g_{\iota_n} = 0 ,$$

k_i — целые числа, n — произвольное натуральное число, вытекает $k_i . g_{\iota_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Финитный характер определения обеспечивает существование *максимальной линейно D-независимой системы* (отличных от нуля элементов); однако, ее мощность в общем случае не является инвариантом группы G (*Замечание* 1). Но если же $G_{(p)}$ является ненулевой p-примарной группой, то все максимальные линейно D-независимые системы (коротко D-системы) имеют одну и ту же мощность (*Теорема* 1), которую назовем *D-рангом* $\mathrm{r}_D(G_{(p)})$ группы $G_{(p)}$; для $G_{(p)} = 0$ положим $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$. D-ранг $\mathrm{r}_D(G)$ общей ненулевой абелевой группы G определим уравнением

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p \mathrm{r}_D(P_{(p)}) ,$$

причем $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ является прямым разложением периодической части группы G на p-примарные компоненты, а $\mathrm{r}(G)$ означает ранг (в обыкновенном смысле) группы G. Если группа G является ненулевой, то, очевидно, $\mathrm{r}_D(G) > 0$, если G — группа без кручения, то $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$.

Из всех D-систем группы G особое место занимают *канонические D-системы*, т. е. такие D-системы, каждый из элементов которых является элементом или бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа. Если $\mathfrak{S}$ — каноническая D-система группы G, то

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G) \,;^{1)} \tag{1}$$

если же $\mathrm{r}_D(G)$ конечен и если какое-нибудь D-независимое множество $\mathfrak{S}$ элементов группы G удовлетворяет уравнению (1), то $\mathfrak{S}$ есть каноническая D-система группы G (*Теорема* 2 и *Теорема* 3). Далее, справедлива также

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ — *совокупность всех D-систем ненулевой группы G; обозначим* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ *для* $\delta \in \Delta$. *Тогда множество кардинальных чисел* $\Lambda = (\delta_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *содержит наибольший элемент* λ_{δ_1} *и* $\lambda_{\delta_1} = \mathrm{r}_D(G)$. *Притом множество Λ содержит только один элемент* $\mathrm{r}_D(G)$ *тогда и только*

[1]) Символом $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ обозначена мощность множества $\mathfrak{M}$.

тогда, если в системе $\mathfrak{M}$ существует хоть одна бесконечная D-система $\mathfrak{S}_{\delta_2}$, или если же периодическая часть группы G является p-примарной или нулевой.

Теорема 6. *Для подгруппы $H \subseteq G$ справедливо $\mathrm{r}_D(H) \leqq \mathrm{r}_D(G)$, для прямой суммы $G = \sum_{\iota \in I}' G_\iota$ имеет место $\mathrm{r}_D(G) = \sum_{\iota \in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.*

Важное значение имеет утверждение леммы 10, при помощи которой доказывается теорема 8.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех решений уравнения $n \,.\, x = g_0$, $0 \neq g_0 \in G$, n — натуральное число, в группе G. Тогда или $\mathfrak{M} = \emptyset$ или справедливы утверждения:*

Если $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, то $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$; если $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, то $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.

Теорема 8. *Если $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ (или $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$), то $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.*

В теореме 7, в теореме 9 и в теореме 10 исследуются условия, при которых для подгруппы $H \subseteq G$ имеет место соотношение

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)\,. \tag{2}$$

С этой целью вводится понятие слабо сервантной подгруппы:

Подгруппу H группы G называем *слабо сервантной в G*, если каждый класс фактор-группы G/H, порядок которого равен простому числу, содержит элемент того же порядка.

Теорема 9. *Если $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ (или $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$), то для любой подгруппы $H \subseteq G$ справедливо соотношение* (2).

Теорема 10. *Для группы G, $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, и ее подгруппы $H \subseteq G$ имеет место равенство* (2) *тогда и только тогда, если H является слабо сервантной в G.*

Наконец, в теоремах 11 и 12 говорится о периодических и смешанных группах, имеющих конечный D-ранг; сравнивается D-ранг с *определением ранга* $\mathrm{r}_P(G)$ абелевой группой G, *данным Прюфером.* В случае p-примарной группы и в случае группы без кручения всегда $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G)$; в общем можно только утверждать, что $\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G)$. (*Замечание 6.*)

Zusammenfassung

D-RANG EINER ABELSCHEN GRUPPE

VLASTIMIL DLAB, Prag.

(Eingegangen am 9. April 1956.)

Der Autor nennt in der Arbeit eine Menge $(g_\iota)_{\iota \in I}$ von Elementen der abelschen Gruppe G *D-unabhängig*, wenn jede Beziehung

$$k_1 \,.\, g_{\iota_1} + k_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + k_n \,.\, g_{\iota_n} = 0$$

bei ganzen k_i und beliebigem natürlichem n $k_i \,.\, g_{\iota_i} = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ nach sich zieht. Der finite Charakter der Definition garantiert die Existenz eines *maximalen D-unabhängigen Systems* (von Null verschiedener Elemente), dessen Mächtigkeit aber im Allgemeinen kein Invariant der Gruppe G ist (*Bemerkung 1*). In einer nichttrivialen p-primären Gruppe $G_{(p)}$ haben aber alle maximalen D-unabhängigen Systeme (kurz D-Systeme) dieselbe Mächtigkeit (*Satz 1*), die wir den *D-Rang* $r_D(G_{(p)})$ der Gruppe $G_{(p)}$ nennen; für $G_{(p)} = 0$ definieren wir $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$. Den D-Rang $\mathrm{r}_D(G)$ der allgemeinen abelschen Gruppe G definieren wir durch die Beziehung

$$r_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p r_D(P_{(p)})\,;$$

hier ist $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ die direkte Zerlegung der maximalen periodischen Untergruppe in p-primäre Komponenten und $\mathrm{r}(G)$ der Rang der Gruppe (im gewöhnlichen Sinne). Wenn die Gruppe G nichttrivial, d. h. von der Nullgruppe verschieden, ist, so ist offenbar $\mathrm{r}_D(G) > 0$, ist die Gruppe G torsionsfrei, so ist $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$.

Unter den D-Systemen der Gruppe G sind besonders wichtig die *kanonischen D-Systeme*, d. h. diejenigen D-Systeme, deren jedes Element entweder eine unendliche oder eine Primzahlpotenzordnung hat. Wenn $\mathfrak{S}$ ein kanonisches D-System der Gruppe G bedeutet, dann gilt die Gleichheit

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)\,[1]; \tag{1}$$

im Falle, daß $r_D(G)$ endlich ist und irgend eine D-unabhängige Menge $\mathfrak{S}$ der Gleichheit (1) genügt, ist $\mathfrak{S}$ ein kanonisches D-System der Gruppe G (*Satz 2* und *Satz 3*). Weiterhin gilt:

Satz 5. *$\mathfrak{M} = (G_\delta)_{\delta\in\Delta}$ sei das System aller D-Systeme einer nichttrivialen Gruppe G; bezeichnen wir $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ für jedes $\delta \in \Delta$. Dann hat die Menge $\Lambda = (\lambda_\delta)_{\delta\in\Delta}$ der Kardinalzahlen λ_δ ein größtes Element λ_{δ_1} und es ist $\mathrm{r}_D(G) = \lambda_{\delta_1}$. Hierbei enthält die Menge Λ gerade ein einziges Element $\mathrm{r}_D(G)$, wenn und nur wenn im System $\mathfrak{M}$ wenigstens ein unendliches D-System $\mathfrak{S}_{\delta_2}$ existiert, oder wenn die maximale periodische Untergruppe der Gruppe G p-primär oder trivial ist.*

Satz 6. *Es ist für die Untergruppe $H \subseteq G$ $\mathrm{r}_D(H) \leqq r_D(G)$ und für die direkte Summe $G = \sum_{\iota\in I}{}' G_\iota$ $r_D(G) = \sum_{\iota\in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.*

Die Aussage, die im Hilfssatz 10 enthalten ist, ist besonders wichtig; mit ihrer Hilfe ist dann der Satz 8 bewiesen.

Hilfssatz 10. *$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Lösungen $x \in G$ der Gleichung $n \,.\, x = g_0$, wo n natürlich und $0 \neq g_0 \in G$ ist. Dann ist entweder $\mathfrak{M} = \emptyset$ oder es ist für $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$ und für $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$ ebenfalls $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.*

---

[1]) $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ ist die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$.

Satz 8. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(bzw.* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*) ist, so ist* $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.

Die Sätze 7, 9 und 10 untersuchen, unter welchen Bedingungen für die Untergruppe $H \subseteq G$ die Beziehung

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H) \tag{2}$$

richtig ist. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der schwachen Servanzuntergruppe ein:

Die Untergruppe H der Gruppe G nennen wir eine *schwache Servanzuntergruppe in* G, wenn jede Restklasse der Faktorgruppe G/H von Primzahlordnung ein Element derselben Ordnung enthält.

Satz 9. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(bzw.* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*) ist, dann gilt für jede beliebige Untergruppe* $H \subseteq G$ *die Beziehung* (2).

Satz 10. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$ *ist, dann gilt für ihre Untergruppe* $H \subseteq G$ *die Gleichheit* (2) *dann und nur dann, wenn* H *eine schwache Servanzuntergruppe in* G *ist.*

Am Ende werden in den Sätzen 11 und 12 die periodischen und gemischten Gruppen von endlichem D-Range untersucht, und es ist der D-Rang mit der *Prüferschen Definition des Ranges* $\mathrm{r}_P(G)$ der abelschen Gruppe G verglichen. Für p-primäre und torsionsfreie Gruppen ist immer $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G)$; im Allgemeinen gilt allerdings nur die Beziehung $\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G)$. *(Bemerkung 6.)*