Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O DVOJICI (m, n) KONFIGURACÍ

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 12. září 1956.) DT: 513.84

Jde o dvě věty, mající úzkou souvislost s vícerozměrným zobecněním klasické věty Pohlkeovy-Schwarzovy. Přitom se navazuje na výsledky N. A. GLAGOLEVA, N. F. ČETVERUCHINA a F. SCHURA.

Obsahem této práce jsou dvě věty, úzce spjaté s vícerozměrným zobecněním klasické věty Pohlkeovy-Schwarzovy. Nejprve je dokázána věta N. A. GLAGOLEVA (viz [1], resp. [2], str. 46). Ve větě 1 je projednáno řešení vícerozměrné analogie úlohy Guglerovy (viz [3], poznámka pod čarou na str. 165). Konečně věta 2 spolu se svým důsledkem představuje vícerozměrné zobecnění věty Pohlkeovy-Schwarzovy a zahrnuje v sobě klasický výsledek F. SCHURA (viz [6], resp. [5], str. 174—176). O některých k thematu se vztahujících výsledcích sovětských geometrů podává informaci § 4 z oddílu „Synthetická geometrie" sborníku [4]. S algebraického hlediska vyšetřuje zobecnění věty Pohlkeovy pro promítání z bodu do nadroviny ED. STIEFEL ve své práci [7].

Předmětem našich úvah bude d-rozměrný rozšířený prostor eukleidovský ($d \geqq 3$). Konečnou posloupnost navzájem různých vlastních bodů nazveme (m, n) konfigurací, je-li $m + 1$ počet bodů posloupnosti a jestliže prvních $n + 1$ bodů posloupnosti je lineárně nezávislých; přitom předpokládáme, že $2 \leqq n \leqq m \leqq d$. Odpovídá-li i-tému bodu (m, n) konfigurace K_1 v lineární transformaci T i-tý bod (m, n) konfigurace K_2 pro každé $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, pak budeme psáti $TK_1 = K_2$. Dimensí bodového útvaru rozumíme o jednotku zmenšený maximální počet lineárně nezávislých bodů útvaru. Tento pojem dimense ponecháme i pro sféry.

Věta Glagolevova. *Ke každé dvojici* (3,3) *konfigurací* K_1, K_2 *existuje nevlastní bod* S *tak, že konfigurace* K_1 *je perspektivně položena vzhledem ke středu perspektivity* S *s konfigurací* K'_2 *podobnou s* K_2.

Důkaz. Existuje právě jedna afinita A daného prostoru tak, že $AK_2 = K_1$. Nechť k je libovolná koule; pak $A^{-1}k$ je kvadrika, na níž lze najít kružnici k^+. Pak ale též Ak^+ je kružnice. Dále existuje právě jedna podobnost P daného prostoru tak, že Pk^+ je shodné s Ak^+. Tedy existuje orthogonální transformace O tak, že je $OPX = AX$ pro každé $X \epsilon k^+$. Pak ale $T = OPA^{-1}$ je perspektivní afinita: Pro každé $X \epsilon k^+$ jest $T(AX) = OPX = AX$, takže všecky body kružnice Ak^+ jsou samodružné vzhledem k afinitě T; tedy rovina, v níž leží Ak^+, je vzhledem k afinitě T rovinou samodružných bodů. Konfigurace $TK_1 = OP(A^{-1}K_1) = OPK_2$ je podobná s K_2. Důkaz je proveden.

Poznamenejme k tomu, že bod S (střed perspektivní afinity T) je závislý pouze na výběru kružnice k^+. Pak $A^{-1}k$ je buďto kulovou plochou anebo nerotačním či rotačním elipsoidem. Je-li $A^{-1}k$ elipsoidem, pak obsahuje dva (případně splývající) systémy kružnic vždy v rovinách navzájem rovnoběžných; každý z obou systémů vede k jedinému bodu S, avšak různým systémům odpovídají různé body S. Tedy celkem: Je-li $A^{-1}k$ kulová plocha, pak bod S je určen mnohoznačně (probíhá všecky body nevlastní), je-li $A^{-1}k$ nerotační elipsoid, pak bod S je určen dvojznačně a konečně, je-li $A^{-1}k$ rotační elipsoid, pak bod S je určen jednoznačně.

Věta 1. *Nechť K_1, resp. K_2 jsou dvě (n, n) konfigurace, ležící v n-rozměrných podprostorech R_1, resp. R_2, a nechť C je $(d - n - 1)$-rozměrný nevlastní podprostor. Pak označme A afinitu, pro níž $K_1 = AK_2$; dále označme a $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v R_2. Pak jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

(I) *n-rozměrný s C disjunktní vlastní prostor X protíná útvar $C . K_1$*[1]) *v konfiguraci K_2' podobné s K_2;*

(II) *průnik útvaru $C . (Aa)$ s $(d - 1)$-rozměrnou absolutní sférou obsahuje $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v n-rozměrném vlastním podprostoru X disjunktním s C.*

Důkaz. Nechť X je libovolný n-rozměrný vlastní podprostor disjunktní s C. Pak C jakožto centrum promítání zprostředkuje mezi podprostory R_1, X afinitu B_X. Afinita B_XA je podobností právě tehdy, odpovídají-li si v ní $(n - 1)$-rozměrné absolutní sféry podprostorů R_1, X. Avšak B_XAa leží v průniku podprostoru X s útvarem $C . (Aa)$. Z toho již plyne důkaz věty.

K předchozí větě učiňme ještě poznámku. Je-li $d = m + 1 = n + 1 = 3$, pak podle věty 3 lze řešiti úlohu Guglerovu, známou z elementů deskriptivní geometrie (úlohu Guglerovu lze takto formulovat: Na dané trojboké hranolové ploše najít trojúhelníky podobné s trojúhelníkem daným).

Věta 2. *Nechť K_1 je (d, d) konfigurace a nechť K_2 je (d, n) konfigurace; označme R_i podprostor, lineárně vytvořený prvními $n + 1$ body konfigurace K_i $(i = 1, 2)$. Pak lze sestrojit právě jeden $(d - n - 1)$-rozměrný nevlastní podprostor C a afinitu A_X mezi R_2 a mezi libovolným vlastním podprostorem X disjunktním s C, tak, že A_XK_2 je průmětem konfigurace K_1 z centra promítání C.*

[1]) Součinem dvou bodových útvarů označujeme sjednocení všech přímek, které spojují body jednoho útvaru s body útvaru druhého.

Důkaz. Existuje právě jedna afinita A mezi R_2 a mezi R_1, pro niž $AK'_2 = K'_1$, kde K'_i je posloupnost prvních $n + 1$ bodů konfigurace K_i ($i = 1, 2$). Označme S_j nevlastní bod spojnice j-tého bodu konfigurace K_1 s j-tým bodem konfigurace K_2 pro každé $j = n + 2, n + 3, \ldots, d + 1$. Body S_j lineárně vytvářejí nevlastní podprostor dimense $d - n - 1$, z něhož se K_1 promítá do konfigurace AK_2. Je-li X libovolný vlastní podprostor dimense n, disjunktní s C, pak centrum promítání C zprostředkuje mezi podprostory R_1, X afinitu B_X tak, že B_XAK_2 je průmětem konfigurace K_1 ze středu promítání C. Položíme-li $A_X = B_XA$, je tím důkaz věty dokončen.

Důsledek. Afinita A_X z věty 2 je podobností právě tehdy, jestliže průnik útvaru $C \,.\, (Aa)$ (a je absolutní sféra o dimensi $n - 1$, ležící v R_2) s $(d - 1)$-rozměrnou absolutní sférou obsahuje $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v X.

Důkaz vyplývá snadno užitím věty 1.

Poznámka (při korektuře 1. 6. 1957). Pokračováním tohoto příspěvku je autorova poznámka „Hlavní věta paralelní axonometrie", podaná do Časopisu pro pěst. matematiky. Tato poznámka je v těsné souvislosti s článkem Herberta Naumanna „Über Vektorsterne und Parallelprojektionen regulärer Polytope", Math. Zeitschr. *67*, 1957, 75—82.

LITERATURA

[1] *Н. А. Глаголев*: Обобщение теоремы Полке, Матем. сб. *32* (1925), 457—463.

[2] *Е. А. Глазунов-Н. Ф. Четверухин*: Аксонометрия, Moskva 1953.

[3] *Fr. Kadeřávek - J. Klíma - J. Kounovský*, Deskriptivní geometrie, I. díl, Praha 1954.

[4] Математика в СССР за триддать лет, Сборник, Moskva-Leningrad 1948.

[5] *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Band: Die linearen Abbildungen (bearbeitet von E. Kruppa), Leipzig-Wien 1923.

[6] *F. Schur*, Über den Pohlke'schen Satz, Math. Ann. *25* (1885), 569—595.

[7] *Ed. Stiefel*, Zum Satz von Pohlke, Comm. Math. Helv. *10* (1938), 208—223.

Резюме

О ПАРЕ (m, n) КОНФИГУРАЦИЙ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 12/IX 1956 г.)

В d-мерном расширенном евклидовом пространстве определена (m, n) конфигурация как последовательность $m + 1$ различных собственных точек, из которых первые $n + 1$ линейно независимы. Доказываются следующие теоремы:

Для каждой пары (3,3) *конфигураций* K_1, K_2 *существует несобственная точка* S *так, что конфигурация* K_1 *расположена перспективно относительно центра перспективности* S *с конфигурацией* K'_2, *подобной* K_2.

Теорема 1. *Пусть* K_i *есть* (n, n) *конфигурация, лежащая в* n*-мерном подпространстве* R_i $(i = 1, 2)$ *и пусть* C *есть* $(d - n - 1)$*-мерное несобственное подпространство. Обозначим через* A *аффинное соответствие, при котором* $K_1 = AK_2$ *и далее обозначим через* a $(n - 1)$*-мерную абсолютную сферу, лежащую в* R_2. *В таком случае* n*-мерное собственное дизъюнктное с* C *подпространство* X *пересекает линейную оболочку объектов* C, K_1 *в конфигурации* K'_2, *по-добной* K_2, *тогда и только тогда, если пересечение линейной оболочки объектов* C, Aa *с* $(d - 1)$*-мерной абсолютной сферой содержит* $(n - 1)$*- мерную абсолютную сферу, лежащую в* X.

Теорема 2. *Пусть* K_1 *есть* (d, d) *конфигурация и пусть* K_2 *есть* (d, n) *конфигурация. Обозначим через* R_i *подпространство, линейно образованное первыми* $n + 1$ *точками конфигураций* K_i $(i = 1, 2)$. *Тогда можно построить в точности одно* $(d - n - 1)$*-мерное несобственное подпространство* C *и аффинное соответствие* A_X *между* R_2 *и любым собственным, дизъюнктным с* C *подпространством* X *так, что* $A_X K_2$ *является проекцией конфигурации* K_1 *из центра проекций* C.

Следствие. Аффинное соответствие A_X из теоремы 2 будет соответствием подобия тогда и только тогда, если линейная оболочка объекта C с $(n - 1)$-мерной квадрикой Aa (где a — абсолютная сфера размерности $n - 1$, лежащая в R_2, и A — аффинное соответствие, переводящее первых $n + 1$ точек конфигурации K_2 в первых точек конфигурации K_1) пересекается с $(d - 1)$-мерной абсолютной квадрикой в объекте, содержащем $(n - 1)$-мерную абсолютную сферу подпространства X.

Теорема 1 представляет собой решение многомерного аналога задачи Гуглера (см. [3], стр. 165, сноска). Наконец, теорема 2 вместе со своим следствием является многомерным обобщением теоремы Польке-Шварца и содержит результат Ф. Шура (см. [6], соотв. [5], стр. 174—175).

Zusammenfassung

ÜBER DIE PAARE DER (m, n) KONFIGURATIONEN

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Eingelangt 12. IX. 1956.)

Im d-dimensionellen ergänzten euklidischen Raume sei (m, n) Konfiguration als eine Folge von $(m + 1)$ verschieden eigentlichen Punkten definiert, von denen die ersten $n + 1$ linear unabhängig sind. Man beweist folgende Sätze:

Zu jedem Paare der (3,3) Konfigurationen K_1, K_2 existiert ein solcher uneigentlicher Punkt S, dass die Konfiguration K_1 mit einer, mit K_2 ähnlichen Konfiguration K'_2 vom Zentrum S perspektiv ist.

Satz 1. *Sei K_i eine im n-dimensionellen Unterraume R_i liegende (n, n) Konfiguration $(i = 1, 2)$ und C ein $(d - n - 1)$-dimensioneller uneigentlicher Unterraum. Mit A bezeichnen wir die Affinität, für die $K_1 = AK_2$ gilt; mit a bezeichnen wir die $(n - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre in R_2. Der n-dimensionelle mit C disjunkte Unterraum X schneidet die lineare Hülle von C, K_1 in einer, mit K_2 ähnlicher Konfiguration K'_2 gerade dann, wenn der Durschchnitt der linearen Hülle von C, Aa mit der $(d - 1)$-dimensionellen absoluten Sphäre eine $(n - 1)$-dimensionelle, in X liegende absolute Sphäre enthält.*

Satz 2. *Sei K_1 eine (d, d)Konfiguration und K_2 eine (d, n)Konfiguration. Mit R_i bezeichnen wir die lineare Hülle der ersten $n + 1$ Punkten der Konfiguration K_i $(i = 1, 2)$. Dann kann man gerade einen $(d - n - 1)$-dimensionellen uneigentlichen Unterraum C und die Affinität A_X zwischen R_2 und einem willkürlichen eigentlichen, mit C disjunkten Unterraum X finden, so dass A_XK_2 eine Projektion von K_1 aus dem Zentrum C ist.*

Die Folgerung. Die Affinität A_X aus dem Satz 2 wird eine Ähnlichkeit gerade dann, wenn die lineare Hülle des Unterraumes C mit der $(n - 1)$-dimensionellen Quadrik Aa (a ist die $(n - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre in R_2 und A ist die Affinität, die die ersten $n + 1$ Punkte der Konfiguration K_2 in die ersten $n + 1$ Punkte der Konfiguration K_1 überführt) und die $(d - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre eine gemeinsame $(n - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre des Unterraumes X enthalten.

Satz 1 ist die Lösung der mehrdimensionellen Analogie der Guglerschen Aufgabe (siehe [3], Fussnote auf S. 165). Schliesslich Satz 2 zusammen mit seiner Folgerung ist die mehrdimensionelle Verallgemeinerung des Satzes von Pohlke-Schwarz und enthält ein Ergebnis von F. Schur (siehe [6] und [5], S. 174—175).