Otto Vejvoda

Stabilita integrálů soustavy diferenciálních rovnic v komplexním oboru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 2, 137--159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117249`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

STABILITA INTEGRÁLŮ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC V KOMPLEXNÍM OBORU

OTTO VEJVODA, Praha.

(Došlo dne 9. ledna 1956.) DT: 517.925

V práci je vyšetřována stabilita triviálního integrálu soustavy n diferenciálních rovnic prvého řádu, v nichž závisle proměnné jsou komplexními funkcemi reálné proměnné t. V teorii prvého přiblížení se dokazuje, že v nekritických případech lze ljapunovské funkce, které dovolují rozhodnout o stabilitě, sestrojit jako hermitovské formy. Z kritických případů je pro autonomní soustavu úplně vyšetřen případ jednoho nulového a případ jednoho ryze imaginárního kořenu charakteristické rovnice.

0. Úvod

V této práci vyšetřuji stabilitu triviálního řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\frac{dz_j}{dt} = \dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{0.1}$$

kde z_j jsou komplexní funkce reálné proměnné t, c_{jk} jsou komplexní konstanty a komplexní funkce Z_j vždy vyhovují podmínkám (P):

α) Z_j jsou definovány a jsou spojité v oboru D: $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j \leqq H^2\ (H > 0)$, $t \geqq 0$;

$$\beta)\ \lim_{\|z\| \to 0} \frac{Z_j}{\|z\|} = 0 \text{ stejnoměrně vzhledem k } t \text{ v } D \tag{P}$$

(odtud již plyne, že $Z_j(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$).

Stabilitu triviálního řešení chápu v Ljapunovově smyslu a to zcela obdobně jak je definována pro reálné soustavy (viz def. 1.1).

Stabilita triviálního řešení soustavy (0.1) byla studována velmi důkladně LJAPUNOVEM, POINCARÉM a mnoha dalšími autory za předpokladu, že všechny veličiny v soustavě (0.1) jsou reálné. Přes to, že již Ljapunov a pak i jiní při vyšetřování některých speciálních („kritických") případů přecházeli k soustavám, v nichž závisle proměnné byly komplexními funkcemi reálné (nebo někdy též komplexní) proměnné t, mělo zavedení komplexních proměnných vždy pouze pomocný nebo formální charakter. U takových soustav nebylo také používáno druhé Ljapunovovy metody. Teprve v poslední době užil 2. Ljapunovovy metody LURJE [3] při vyšetřování některých speciálních případů soustavy (0.1) vyskytujících se v teorii automatické regulace, v nichž některé proměnné jsou reálné a některé po dvou komplexně sdružené. Lurje však nevyslovuje žádných obecných vět o takových soustavách.

Jako prvý se soustavou (0.1) s komplexními proměnnými soustavně zabýval PERRON ve své práci [6]. Ten pro soustavu (0.1) odvodil některé věty prvého přiblížení, t. j. věty, které dovolují o stabilitě triviálního řešení soustavy (0.1) rozhodnout na základě linearisované soustavy

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{0.2}$$

I u Perrona se však objevují komplexní funkce celkem náhodně a to proto, že při jeho metodě, totiž při užití vět o závislosti integrálů na počátečních podmínkách a pravých stranách rovnic, se úvahy v reálném a komplexním oboru od sebe v podstatě neliší. Perronovi šlo především o to, aby dokázal věty prvého přiblížení za co nejobecnějších předpokladů o funkcích Z_j. Také kritickými případy se vůbec nezabývá.

Cílem této práce je

1. Odvodit znovu věty z teorie prvého přiblížení (při téchže předpokladech, jaké činí Perron), a to pomocí druhé Ljapunovovy metody. To považuji za účelné proto, že některé úlohy z mechaniky jsou formulovány přirozeným způsobem pomocí komplexních proměnných a druhá Ljapunovova metoda v některých případech umožňuje dosti pohodlně určit jistou část oblasti asymptotické stability, což je pro praxi velmi závažná otázka.

2. Vyšetřit některé kritické případy, t. j. případy, kdy o stabilitě či nestabilitě triviálního řešení nemůžeme rozhodnout na základě vět prvého přiblížení. To nastane obdobně jako v reálném případě tehdy, jestliže charakteristická rovnice

$$|c_{jk} - \varrho\delta_{jk}| = |C - \varrho E| = 0 \tag{0.3}$$

má alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a nemá žádný kořen s kladnou reálnou částí. V této práci vyšetřuji případ a) jednoho nulového kořenu, b) jednoho ryze imaginárního kořenu (v některém z dalších čísel tohoto časopisu uveřejním článek o případu dvou ryze imaginárních kořenů). V těchto případech předpokládám, že Z_j jsou holomorfní funkce proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nezávislé na t, začínající členy alespoň druhého stupně (stručně budeme říkat, že Z_j jsou třídy H_2 a značit $Z_j \in H_2$).

Všude v dalším předpokládáme, že čtenář je v podstatě seznámen s příslušnou teorií v reálném oboru, takže tam, kde úvahy jsou v obou oborech obdobné, uvádím je pouze ve stručné formě.

1. Základní definice a pomocné věty

Definice 1.1. *Budiž dána soustava*

$$\dot{z}_j = Z_j(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{1.1}$$

kde Z_j splňují podmínky a) $Z_j(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$, b) *$Z_j$ jsou definovány a jsou spojité v oboru D: $\|z\| \leqq H$, $t \geqq 0$.*

Říkáme, že triviální řešení soustavy (1.1) *je stabilní, jestliže k libovolně malému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že všechna řešení $z(t) \equiv (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t))$, pro něž $\|z(0)\| < \delta$, splňují pro všechna $t \geqq 0$ nerovnost $\|z(t)\| < \varepsilon$.*

Definice 1.2. *Budiž dána soustava* (1.1), *v níž funkce Z_j opět splňují podmínky* a) *a* b) *z def.* 1.1.

Říkáme, že triviální řešení soustavy (1.1) *je asymptoticky stabilní, jestliže je stabilní a platí $\|z(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$, jakmile $\|z(0)\| \leqq h \leqq H$ $(h > 0)$.*

Definice 1.3. *Budiž dána soustava* (1.1) *a nechť funkce Z_j vyhovují podmínkám* a) *a* b) *z definice* 1.1.

Říkáme, že řešení je nestabilní, není-li stabilní. (To je ekvivalentní s touto definicí: *Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že ať zvolíme $\delta > 0$ jakkoliv malé, vždy z δ-okolí počátku vychází alespoň jedno řešení, pro něž $\|z(t_1)\| = \varepsilon$, $0 < t_1 < \infty$.*)

Jak je známo, k odvození vět o stabilitě triviálního řešení soustavy (1.1) pomocí druhé Ljapunovovy metody užíváme t. zv. ljapunovských funkcí V.

O ljapunovských funkcích $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ budeme předpokládat, že mají tyto vlastnosti:

1. $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ je jednoznačně definována v oboru D: $\|z\| \leqq H$, $t \geqq 0$;
2. $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ je v oboru D reálná;
3. $V(t, 0, \ldots, 0) = 0$;
4. funkce $\tilde{V}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ definovaná vztahem $\tilde{V}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n) = V(t, z_1, \ldots, z_n)$, kde $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, je spojitě diferencovatelná vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Definujeme pak

$$\frac{\partial V}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_j} - \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_j}\right).$$

Definice 1.4. *O funkci $V(z_1, \ldots, z_n)$ mající vlastnosti* 1., 2., 3. *říkáme, že je*

a) *positivně (negativně) definitní, jestliže existuje h $(0 < h \leqq H)$ takové, že $V(z_1, \ldots, z_n) > 0$ $(V < 0)$ pro všechny vektory z, pro něž $\|z\| \leqq h$, kromě $z \equiv 0$;*

b) *positivně (negativně) semidefinitní, jestliže* $V \geqq 0$ ($V \leqq 0$) *pro všechna* z, *pro něž* $\|z\| \leqq h$;

c) *indefinitní, jestliže* V *nabývá v libovolně malém okolí počátku jak kladných tak záporných hodnot.*

Definice 1.5. *O funkci* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ *říkáme, že je*

a) *positivně (negativně) definitní, jestliže existuje takové* t_0 *a taková positivně definitní funkce* $W(z_1, \ldots, z_n)$, *že* $V(t, z_1, \ldots, z_n) \geqq W(z_1, \ldots, z_n)$ ($V \leqq -W$) *pro* $t \geqq t_0$, $\|z\| \leqq h$;

b) *positivně (negativně) semidefinitní, jestliže existuje* $t_0 \geqq 0$ *tak, že* $V \geqq 0$ ($V \leqq 0$) *pro* $t \geqq t_0$, $\|z\| \leqq h$;

c) *indefinitní, jestliže pro všechna* $t \geqq t_0 \geqq 0$ *nabývá v libovolně malém okolí počátku jak kladných tak záporných hodnot.*

Definice 1.6. *Říkáme, že funkce* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ *je stejnoměrně malá, jestliže* $V(t, z_1, \ldots, z_n) \to 0$ *pro* $\|z\| \to 0$ *stejnoměrně vzhledem k* t.

O definitních funkcích $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ platí některé poučky zcela obdobné těm, které známe v reálném oboru. Uveďme bez důkazu alespoň jednu, kterou budeme v dalším potřebovat.

Lemma 1.1. *Jestliže* $V(z_1, \ldots, z_n)$ *je definitní a homogenní funkce m-tého stupně a funkce* $W(t, z_1, \ldots, z_n)$ *splňuje tyto předpoklady:*

a) $W(t, z_1, \ldots, z_n)$ *je definována a je reálná v oboru* $\|z\| \leqq h$, $t \geqq 0$;

b) $|W(t, z_1, \ldots, z_n)| \leqq \alpha \|z\|^m$, *kde* α *je dostatečně malé kladné číslo, pak také reálná funkce*

$$U(t, z_1, \ldots, z_n) = V(z_1, \ldots, z_n) + W(t, z_1, \ldots, z_n)$$

je definitní.

Definice 1.7. *Derivací ljapunovské funkce* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ *podle (směrového) pole vzhledem k soustavě* (1.1) *nazýváme výraz*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right).$$

Tuto definici derivace podle pole dostaneme zcela přirozeným způsobem podle analogie s reálným oborem, jestliže položíme $z_j = x_j + iy_j$ a utvoříme soustavu

$$\dot{x}_j = \operatorname{Re} Z_j\,, \quad \dot{y}_j = \operatorname{Im} Z_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{1.1'}$$

ekvivalentní se soustavou (1.1). Jestliže $\tilde{V}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ je ljapunovská funkce pro soustavu (1.1'), potom platí

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_j} \operatorname{Re} Z_j + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_j} \operatorname{Im} Z_j \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right),$$

kde

$$V(t, z_1, \ldots, z_n) = \tilde{V}\left(t, \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}, \ldots, \frac{z_n + \bar{z}_n}{2}, \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}, \ldots, \frac{z_n - \bar{z}_n}{2i}\right).$$

Lemma 1.2. *Derivace ljapunovské funkce podle pole je opět reálná funkce.*

Důkaz je snadný.

Nyní platí tyto věty zcela podobné větám z reálného oboru. (Důkazy neuvádím, poněvadž i ty probíhají zcela obdobně jako v reálném oboru.)

Věta 1.1. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *lze určit definitní funkci* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$, *jejíž derivací podle pole je funkce semidefinitní, opačného znaménka než funkce* V, *pak triviální řešení této soustavy je stabilní.*

Věta 1.2. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *lze určit definitní, stejnoměrně malou funkci* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$, *jejíž derivace podle pole je definitní, opačného znaménka než* V, *pak triviální řešení této soustavy je asymptoticky stabilní.*

Věta 1.3. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *existuje reálná stejnoměrně malá funkce* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$, *jejíž derivace* W *podle pole je definitní a funkce* V *při hodnotách* $\|z\|$ *libovolně malých a při hodnotách* t *libovolně velkých může nabývat hodnot stejného znaménka jako funkce* W, *pak triviální řešení je nestabilní.*

Věta 1.4. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *lze určit takovou (na čase nezávislou) funkci* $V(z_1, \ldots, z_n)$, *že její derivace podle pole má v oboru* $\|z\| \leqq h$, $t \geqq 0$ *tvar* $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V + W(t, z_1, \ldots, z_n)$, *kde* λ *je kladná konstanta a* W *je buď identicky rovna nule, nebo je to funkce semidefinitní, při čemž v tomto případě* V *není funkce semidefinitního opačného znaménka než* W, *pak triviální řešení soustavy* (1.1) *je nestabilní.*

(Větu obdobnou Četajevově větě o nestabilitě neuvádím, protože ji v dalším nepotřebuji.)

2. Teorie prvého přiblížení

Obraťme se nyní k soustavě

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, \ldots, z_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2.1}$$

kde funkce Z_j vyhovují podmínkám (P) z § 0.

V dalším budeme pro soustavu (2.1) konstruovat ljapunovské funkce velmi speciálního tvaru, totiž takové, které jsou hermitovskými formami (s koeficienty nezávislými na čase).

Definice 2.1. *Hermitovskou formou nazýváme výraz*

$$H(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{jk} z_j \bar{z}_k\,, \text{ kde } g_{jk} = \bar{g}_{kj}\,.$$

Lemma 2.1. *Derivace hermitovské formy podle pole vzhledem k soustavě*

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.2}$$

je opět hermitovská forma.

Důkaz je snadný.

Další dvě lemmata jsou základní, neboť se v nich v podstatě ukazuje, kdy pro soustavu (2.1) dovedeme určit ljapunovské funkce ve tvaru hermitovských forem.

Lemma 2.2. *Rovnice*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = \lambda V \tag{2.3}$$

má alespoň jedno netriviální řešení V typu

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{jk} z_j \bar{z}_k \,. \tag{*}$$

Všechna vlastní čísla λ_m této rovnice pro řešení typu (*) jsou dána výrazy

$$\lambda_m = \varrho_j + \bar{\varrho}_k \, (m = 1, 2, \ldots, n^2; j, k = 1, 2, \ldots, n) \,,$$

kde ϱ_j jsou kořeny charakteristické rovnice

$$|c_{jk} - \varrho \delta_{jk}| = |C - \varrho E| = 0 \,. \tag{2.4}$$

Důkaz. Vyšetřme nejprve rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k = \varrho V \tag{2.5}$$

a to za předpokladu, že všechny kořeny charakteristické rovnice (2.4) jsou navzájem různé. Potom existuje právě n lineárně nezávislých řešení $V_1, V_2, \ldots$ $\ldots, V_n$ rovnice (2.5) tvaru $V_j = p_{j1} z_1 + \ldots + p_{jn} z_n$. (Jde v podstatě o hledání vlastních vektorů v matice C: $(C - \varrho E)\, v = 0$.)

Utvořme nyní všechny součiny $V_{lm} = V_l \bar{V}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$. Ty jsou typu (*). Jelikož

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V_{lm}}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V_{lm}}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = (\varrho_l + \bar{\varrho}_m)\, V_{lm} \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n) \,,$$

jsou všechna čísla $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ vlastními čísly a výrazy V_{lm} $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ řešeními typu (*) rovnice (2.3).

Dokažme nyní, že čísla $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ jsou právě všechna vlastní čísla rovnice (2.3). Pro n^2 koeficientů g_{jk} formy V, jež je řešením rovnice (2.3) typu (*), dostaneme n^2 rovnic

$$\sum_{r=1}^{n} (c_{rj} g_{rk} + \bar{c}_{rk} g_{jr}) = \lambda g_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n) \,. \tag{2.6}$$

Označme matici utvořenou z koeficientů levých stran Γ. Potom rovnice $|\Gamma - \lambda E| = 0$ má n^2 kořenů a tedy soustava (2.6) má n^2 vlastních čísel (počítaných s příslušnou násobností). Jsou-li čísla $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ navzájem různá, jsou to zřejmě právě všechna vlastní čísla rovnice (2.3). Nejsou-li všechny výrazy $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ navzájem různé, nebo nejsou-li již dokonce ϱ_j navzájem různé, postupujeme následujícím způsobem.

Najdeme regulární matici T, která podobnostní transformací převádí matici C na Jordanův kanonický tvar, t. j. $TCT^{-1} = D$, kde D je v Jordanově kanonickém tvaru (t. j., je-li $D = (d_{jk})$, $d_{jj} = \varrho_j$, $d_{j+1,j} = 0$ resp. 1 podle násobnosti příslušného elementárního dělitele a všechna ostatní $d_{jk} = 0$). Nyní konstruujme tuto posloupnost matic D_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$): Matice D_μ mají na hlavní diagonále prvky $\varrho_1^{(\mu)}, \varrho_2^{(\mu)}, \ldots, \varrho_n^{(\mu)}$ zvolené tak, aby $\varrho_j^{(\mu)} \to \varrho_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) (při vhodném očíslování), a aby jak prvky $\varrho_j^{(\mu)}$, tak výrazy $\varrho_l^{(\mu)} + \bar{\varrho}_m^{(\mu)}$ byly pro pevné μ navzájem různé, a mají 0 resp. 1 tam, kde má 0 nebo 1 matice D. Jelikož $D_\mu \to D$, platí $C_\mu = T^{-1}D_\mu T \to C$.

Nahradíme-li nyní v soustavě (2.6) c_{jk} příslušnými prvky $c_{jk}^{(\mu)}$ matice C_μ a označíme-li Γ_μ matici koeficientů levých stran, platí zřejmě $\Gamma_\mu \to \Gamma$. Podle předcházejícího již víme, že vlastními čísly matice Γ_μ jsou čísla $\varrho_l^{(\mu)} + \bar{\varrho}_m^{(\mu)}$ ($l, m = 1, 2, \ldots, n$). Užijeme nyní této věty známé z algebry:

Nechť rovnice $x^N + p_1x^{N-1} + \ldots + p_N = 0$ *má kořeny* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$. *Dále nechť pro posloupnost rovnic*

$$x^N + p_1^{(\mu)}x^{N-1} + \ldots + p_N^{(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

s kořeny $\sigma_1^{(\mu)}, \sigma_2^{(\mu)}, \ldots, \sigma_N^{(\mu)}$ *platí, že* $p_k^{(\mu)} \to p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) *pro* $\mu \to \infty$. *Potom* $\sigma_k^{(\mu)} \to \sigma_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) (*při vhodném očíslování*).

Odtud plyne, že všechna vlastní čísla matice Γ jsou dána výrazy $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ ($l, m = 1, 2, \ldots, n$), počítáme-li je s příslušnou násobností.

Není ovšem pravda, že by vždy také všechna řešení $V_l^{(\mu)}\bar{V}_m^{(\mu)}$ konvergovala k lineárně nezávislým řešením rovnice (2.3). Má-li totiž matice C vícenásobné elementární dělitele a rozpadá-li se tedy na m ($m < n$) polí, pak existuje pouze m lineárně nezávislých řešení rovnice (2.5) a o počtu řešení rovnice (2.3) bez dalšího zkoumání nemůžeme říci nic jiného než to, že jedno řešení existuje vždy (a to je pro další úvahy jedině podstatné).

Lemma 2.3. *Jestliže kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *jsou takové, že* $\varrho_l + \bar{\varrho}_m \neq 0$ ($l, m = 1, 2, \ldots, n$), *pak pro libovolnou formu* U *typu* (*) *existuje jedno a jen jedno řešení rovnice*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial z_j}\, c_{jk}z_k + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j}\, \bar{c}_{jk}\bar{z}_k\right) = U \tag{2.7}$$

typu (*).

Toto řešení je hermitovské, je-li U *hermitovská forma.*

Důkaz. Jestliže máme řešit rovnici (2.7), kde

$$U = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}z_j\bar{z}_k\,, \quad V = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{jk}z_j\bar{z}_k\,,$$

dostaneme pro koeficienty g_{jk} soustavu rovnic

$$\sum_{r=1}^{n}(c_{rj}g_{rk} + \bar{c}_{rk}g_{jr}) = a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2.8}$$

jejíž determinant soustavy je týž, jako determinant soustavy (2.6), položíme-li v ní $\lambda = 0$. Jak víme, soustava (2.8) má jedno a jen jedno řešení, jestliže determinant soustavy je různý od nuly. Avšak podmínka nutná a postačující k tomu, aby determinant soustavy (2.6) pro $\lambda = 0$ byl různý od nuly je, aby 0 nebyla vlastní číslo soustavy (2.6), a k tomu podle lemmatu 2.2 opět je nutné a stačí, aby žádný z výrazů $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ se nerovnal nule. Tím je dokázána prvá část lemmatu.

Předpokládejme nyní, že U je hermitovská forma. Jelikož $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, platí také

$$\sum_{r=1}^{n} (\overline{c_{rj}g_{rk} + \bar{c}_{rk}g_{jr}}) = \sum_{r=1}^{n} (c_{rk}g_{rj} + \bar{c}_{rj}g_{kr}) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

odkud

$$\sum_{r=1}^{n} [c_{rk}(\bar{g}_{jr} - g_{rj}) + \bar{c}_{jr}(\bar{g}_{rk} - g_{kr})] = 0\,. \tag{2.9}$$

Položme $\bar{g}_{jr} - g_{rj} = \xi_{jr}$; platí zřejmě $\xi_{jr} = -\bar{\xi}_{rj}$. Dosadíme-li podle těchto rovností do (2.9) a přejdeme-li k rovnicím komplexně sdruženým, dostaneme

$$\sum_{r=1}^{n} (c_{rj}\xi_{rk} + \bar{c}_{rk}\xi_{jr}) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{2.9'}$$

Determinant soustavy (2.9') je týž jako determinant soustavy (2.8), o němž jsme již dokázali, že za daných předpokladů je od nuly různý. Tudíž homogenní soustava (2.9') má pouze triviální řešení $\xi_{jk} = \bar{\xi}_{kj} = 0$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ a tedy $g_{jk} = \bar{g}_{kj}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, což bylo dokázat.

Dříve než postoupíme dále, připomeňme z elementární teorie lineárních diferenciálních rovnic toto

lemma 2.4. *Triviální řešení soustavy*

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}z_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.10}$$

je a) *asymptoticky stabilní, když a jen když* $\operatorname{Re}\varrho_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, b) *stabilní, když a jen když* $\operatorname{Re}\varrho_j \leqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *a pro ta* ϱ_j, *pro něž* $\operatorname{Re}\varrho_j = 0$, *jsou* $\varrho - \varrho_j$ *jednoduchými elementárními děliteli matice* $C - \varrho E$; c) *nestabilní, když a jen když buď některé* $\operatorname{Re}\varrho_j > 0$ *nebo, jestliže všechna* $\operatorname{Re}\varrho_j \leqq 0$, *existuje alespoň jedno* ϱ_j, *pro něž* $\operatorname{Re}\varrho_j = 0$ *a* $\varrho - \varrho_j$ *je alespoň dvojnásobným elementárním dělitelem matice* $C - \varrho E$.

Nyní již můžeme přejít ke konstrukci ljapunovských funkcí, a to zatím pro lineární soustavu (2.10).

Lemma 2.5. *Jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *mají záporné reálné části, pak pro libovolnou hermitovskou definitní formu* $U(z_1, z_2, \ldots, z_n)$

existuje právě jedna hermitovská forma $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, jejíž derivace podle pole vzhledem k rovnicím (2.10) vyhovuje rovnici

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = U \tag{2.11}$$

a tato forma V je nutně definitní a to opačného znaménka než je forma U.

Důkaz. Jelikož všechny kořeny ϱ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ rovnice (2.4) mají záporné reálné části, nemůže se ani jeden výraz $\varrho_j + \bar{\varrho}_k$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ rovnat nule a tedy podle lemmatu 2.3 existuje právě jedno řešení rovnice (2.11) a to hermitovské.

Máme ještě dokázat, že pro U definitní je V také definitní a to opačného znaménka. Předpokládejme pro určitost, že U je negativně definitní. Je třeba odděleně vyšetřit tyto tři případy:

1. V je indefinitní, negativně definitní, negativně semidefinitní,
2. V je positivně semidefinitní,
3. V je positivně definitní.

Prvý případ však není možný, neboť funkce V by potom vyhovovala podmínkám věty 1.3, takže triviální řešení rovnice (2.10) by bylo nestabilní, což je podle lemmatu 2.4 ve sporu s předpokladem $\operatorname{Re}\varrho_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Druhý případ je však také vyloučen a to ať jsou kořeny rovnice (2.4) jakékoliv. Je-li totiž V pouze positivně semidefinitní, a nikoliv positivně definitní, existuje libovolně blízko počátku bod $(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ takový, že $V(z_{10}, z_{20}, \ldots$ $\ldots, z_{n0}) = 0$. Vezměme nyní řešení rovnic (2.10) vycházející z bodu $(z_{10}, z_{20}, \ldots$ $\ldots, z_{n0})$. Jelikož derivace $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ je záporná, musí V klesat a tudíž nabývat záporných hodnot. To je však spor. Zbývá tedy pouze třetí možnost, že V je positivně definitní a tvrzení je dokázáno.

Lemma 2.6. *Jestliže mezi kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *je alespoň jeden s kladnou reálnou částí a ani pro jednu dvojici ϱ_l, $\bar{\varrho}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ kořenů této rovnice není $\varrho_l + \bar{\varrho}_m = 0$, pak pro libovolnou definitní hermitovskou formu U existuje právě jedna hermitovská forma V vyhovující rovnici* (2.7) *a tato forma není semidefinitní* (*speciálně definitní*) *opačného znaménka než má U.*

Důkaz. Předpokládejme pro určitost, že U je negativně definitní hermitovská forma. Potom podle lemmatu 2.3 existuje právě jedna hermitovská forma V vyhovující rovnici (2.7). Máme ukázat, že tato forma nemůže být ani positivně semidefinitní, ani positivně definitní. Kdyby V byla positivně definitní, splňovala by podmínky věty 1.2 a triviální řešení soustavy (2.10) by bylo asymptoticky stabilní, což je ve sporu s lemmatem 2.4. To, že forma V nemůže být ani positivně semidefinitní, jsme již ukázali v lemmatu 2.5. Funkce V vyhovuje podmínkám věty 1.3 a je to tedy pro vyšetřovaný případ ljapunovská funkce.

Lemma 2.7. *Jestliže mezi kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *je alespoň jeden s kladnou reálnou částí, pak pro libovolnou definitní hermitovskou formu U existuje taková hermitovská forma V a takové kladné číslo α, že derivace podle pole funkce V vyhovuje rovnici $\frac{dV}{dt} = \alpha V + U$ a přitom forma V není semidefinitní opačného znaménka než je forma U.*

Důkaz. Zkoumejme rovnici $|C - (\varrho' + \frac{1}{2}\alpha) E| = 0$, kde α je kladná konstanta. Kořeny ϱ_j' této rovnice jsou s kořeny $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ rovnice (2.4) vázány vztahy $\varrho_j' = \varrho_j - \frac{1}{2}\alpha$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Konstantu α můžeme zřejmě zvolit tak, aby pro všechny dvojice ϱ_l', ϱ_m' $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ platilo $\bar{\varrho}_l' + \bar{\varrho}_m' = \varrho_l + \bar{\varrho}_m - \alpha \neq 0$ a přitom aby byla dostatečně malá, takže stále alespoň jeden kořen ϱ_j' má reálnou část kladnou.

Potom podle lemmatu 2.7 existuje právě jedna hermitovská forma V vyhovující rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial V}{\partial z_j} \left(c_{jk} - \frac{1}{2} \alpha \delta_{jk} \right) + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \left(\bar{c}_{jk} - \frac{1}{2} \alpha \delta_{jk} \right) \right] = U \,, \tag{2.12}$$

kde U je libovolná definitní hermitovská forma; přitom V určitě není semidefinitní, opačného znaménka než U. Jelikož se snadno přesvědčíme, že $\sum_{j=1}^{n} \left(z_j \frac{\partial V}{\partial z_j} + \bar{z}_j \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \right) = 2V$, dostaneme z (2.12) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = \alpha V + U$, což bylo dokázat.

Předcházející věty nám neumožňují pro soustavu (2.10) konstruovat ljapunovské funkce v případě, že charakteristická rovnice (2.4) má kořeny se zápornými reálnými částmi, alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a žádný kořen s kladnou reálnou částí. Jestliže kořen ϱ_j má reálnou část nulovou, pak se buď rovná nule nebo ryze imaginárnímu číslu $i\mu$. V obou těchto případech však $\varrho_j + \bar{\varrho}_j = 0$. Případy, kdy rovnice (2.4) má vedle kořenů se zápornou reálnou částí pouze kořeny s nulovou reálnou částí, je tedy třeba vyšetřit jinak a nazýváme je „kritickými".

V ostatních případech nám právě dokázaná lemmata 2.5 až 2.7 umožňují konstruovat ljapunovské funkce pro soustavu (2.1) a můžeme vyslovit následující věty.

Věta 2.1. *Jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *soustavy prvého přiblížení* (2.10) *mají záporné reálné části, je triviální řešení soustavy* (2.1) *asymptoticky stabilní při libovolných funkcích $Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)$ vyhovujících podmínkám* (P) *z* § 0.

Důkaz. Vezměme definitní — pro určitost třeba negativně definitní — hermitovskou formu U a najděme hermitovskou formu V vyhovující rovnici (2.7). Taková forma podle lemmatu 2.6 existuje a je positivně definitní.

Potom

$$\frac{dV}{dt} = U + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right).$$

Nyní je třeba odhadnout velikost druhého členu na pravé straně. Jelikož $\frac{\partial V}{\partial z_j}$, $\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j}$ jsou formy prvého stupně, platí

$$\left| \frac{\partial V}{\partial z_j} \right| \leqq K \|z\|, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \right| \leqq K \|z\| \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

kde konstanta K závisí pouze na koeficientech formy V. Z podmínky (P) plyne, že k libovolně malému kladnému α existuje h, $0 < h \leqq H$, tak, že $|Z_j| \leqq \alpha \|z\|$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ pro $\|z\| < h$. Platí tedy

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right) \right| \leqq 2n\alpha K \|z\|^2,$$

a zvolíme-li tudíž $\alpha > 0$ dostatečně malé, je funkce $\frac{dV}{dt}$ podle lemmatu 1.1 negativně definitní. Pak jsou splněny všechny předpoklady věty 1.2 a tím je věta 2.1 dokázána.

Zcela obdobně se dokazuje

věta 2.2. *Jestliže alespoň jeden kořen rovnice* (2.4) *má reálnou část kladnou, je triviální řešení soustavy* (2.1) *nestabilní při libovolných funkcích* $Z_j(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *vyhovujících podmínkám* (P) *z* § 0.

3. Dvě pomocné věty

Lemma 3.1. *Budiž dána soustava*

$$\begin{gathered} \dot{y}_j = Y_j(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k), \\ \dot{x}_m = p_{m1}x_1 + \ldots + p_{mn}x_n + X_m(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \\ (j = 1, 2, \ldots, k; \quad m = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{3.1}$$

kde Y_j *a* X_m *jsou ohraničené a spojité funkce* t *pro* $t \geqq 0$ *a holomorfní funkce komplexních proměnných* y_j *a* x_m *pro* $\|y_j\| \leqq h$, $\|x_m\| \leqq h$ $(j = 1, 2, \ldots, k; m = 1, 2, \ldots, n)$ *třídy* H_2. *Nechť* $Y_j(t, 0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_k) \equiv 0 \equiv X_m(t, 0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_k)$.

Nechť dále charakteristická rovnice $|p_{mr} - \varrho\delta_{mr}| = 0$ *má vesměs kořeny se zápornými reálnými částmi.*

Potom triviální řešení rovnice (3.1) *je stabilní a každý integrál počínající dostatečně blízko počátku konverguje k jednomu ze soustavy partikulárních integrálů rovnice* (3.1)

$$y_1 = c_1, \ldots, y_k = c_k, \quad x_1 = \ldots = x_n = 0. \tag{3.2}$$

Touž vlastnost jako triviální řešení má každé řešení ze soustavy (3.2), *jsou-li hodnoty parametrů c_j dostatečně malé.*

Důkaz probíhá s nepodstatnými změnami, tak jako v reálném oboru, jak je na př. proveden v Malkinově knize [4], str. 108 a nebudu jej proto provádět.

Definice 3.1. *Budiž dána soustava*

$$\dot{z}_j = Z_j^{(m)}(t, z_1, \ldots, z_n) + \ldots + Z_j^{(N)}(t, z_1, \ldots, z_n) + \varphi_j(t, z_1, \ldots, z_n) \tag{3.3}$$

definovaná v oblasti

$$t \geqq 0\,, \quad \|z\| \leqq h\,, \tag{3.4}$$

kde $Z_j^{(l)}$ jsou formy l-tého stupně v proměnných $z_1, \ldots, z_n$, jejichž koeficienty jsou spojité a ohraničené funkce t, a φ_j zahrnují zbývající členy stupně vyššího než N.

Říkáme, že triviální řešení soustavy (3.3) *je stabilní nezávisle na členech stupně vyššího než N, jestliže ke každému libovolně malému $\varepsilon > 0$ a libovolně velkému A existuje takové kladné číslo $\delta(\varepsilon, A)$, že pro všechna řešení rovnice* (3.3), *pro něž $\|z(0)\| < \delta$, je $\|z(t)\| < \varepsilon$ pro všechna $t \geqq 0$ při libovolné volbě funkcí φ_j vyhovujících v oblasti* (3.4) *podmínkám $|\varphi_j| < A\,\|z\|^{N+1}$.*

Říkáme, že triviální řešení soustavy (3.3) *je nestabilní, nezávisle na členech stupně vyššího než N, jestliže při těchže předpokladech o funkcích φ_j existuje kladné číslo $\varepsilon(A)$ takové, že uvnitř libovolně malého η-okolí počátku existuje alespoň jeden bod takový, že norma z něho vycházejícího integrálu nabude v nějakém čase hodnoty ε.*

Lemma 3.2. *Budiž dána soustava*

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= q_{j1}y_1 + \ldots + q_{jk}y_k + Y_j(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n)\,, \\ \dot{x}_m &= p_{m1}x_1 + \ldots + p_{mn}x_n + X_m(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &(j = 1, 2, \ldots, k\,; \quad m = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{aligned} \tag{3,5}$$

kde q_{jr} a p_{ms} jsou konstantní a funkce Y_j a X_m jsou v oblasti $|y_j| \leqq h$, $|x_m| \leqq h$, $t \geqq 0$ holomorfní funkce komplexních proměnných $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_m$ třídy H_2, jejichž koeficienty jsou ohraničené a spojité funkce času t. Koeficienty p_{ms} buďte takové, že rovnice $|p_{mr} - \varrho\delta_{mr}| = 0$ má vesměs kořeny se zápornými reálnými částmi. Nechť jsou ještě splněny tyto podmínky:

P_1) *rozvoje funkcí $X_m(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ jsou třídy H_{N+1};*

P_2) *koeficienty q_{jk} vyhovují nerovnosti*

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} (q_{js}\bar{y}_j y_s + \bar{q}_{js} y_j \bar{y}_s) \leqq b^2 \|y\|^2\,, \tag{3.6}$$

při čemž konstanta b je tak malá, že hermitovská forma

$$-\sum_{m=1}^{n} x_m \bar{x}_m + 2Nb^2V\,,$$

kde V je řešení rovnice

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_m} p_{mr} x_r + \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_m} \bar{p}_{mr} \bar{x}_r \right) = - \sum_{m=1}^{n} x_m \bar{x}_m \tag{3.7}$$

je negativně definitní.

Utvořme soustavu

$$y'_j = q_{j1} y_1 + \ldots + q_{jk} y_k + Y_j(t, y_1, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots, 0) = Y_j^{(0)} . \tag{3.5'}$$

Potom, jestliže triviální řešení soustavy (3.5′) *je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní, nezávisle na členech stupně vyššího než N, má triviální řešení soustavy* (3.5) *touž vlastnost.*

Důkaz probíhá stejně jako u obdobné věty v reálném oboru (viz opět Malkinovu knihu [4], str. 374). Nebudu jej proto provádět a zastavím se jen u několika drobností, kde se situace poněkud liší. Pro jednoduchost budu na rozdíl od citované Malkinovy knihy předpokládat, že koeficienty u lineárních členů soustavy (3.5) jsou konstantní, což však není podstatné.

Existence hermitovské positivně definitní funkce V vyhovující rovnici (3.7) je zajištěna podle lemmatu 2.5.

V soustavě (3.5) proveďme substituci $x_m = r^N \xi_m$, $r = \|y\|$.

Prvá skupina rovnic (3.5) nabude tvaru

$$\dot{y}_j = Y_j^{(0)} + r^N \Psi_j(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) ,$$

kde opět $\Psi_j(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ a druhá skupina po úpravě nabude tvaru

$$\dot{\xi}_m = p_{m1} \xi_1 + \ldots + p_{mn} \xi_n - N \xi_m \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} (q_{js} \bar{y}_j y_s + \bar{q}_{js} y_j \bar{y}_s) + \Xi_m ,$$

kde opět $\Xi_m(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$.

Dále už důkaz probíhá úplně beze změny.

Povšimněme si ještě toho, že podmínka (3.6) je triviálním způsobem splněna, jestliže všechna $q_{jk} = 0$, s kterýmžto případem se setkáme v § 4.

4. Kritický případ jednoho nulového kořenu

V obou dalších paragrafech budeme vyšetřovat pouze takové soustavy, jejichž pravé strany jsou holomorfní funkce proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a pokud nebude řečen opak, budou nezávislé na čase t.

Z obecných vět uvedených v § 2 vidíme, že zatím nedovedeme rozhodnout o stabilitě těch soustav, jejichž příslušná charakteristická rovnice má kromě kořenů se zápornou reálnou částí alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a žádný kořen s kladnou reálnou částí. V tomto paragrafu vyšetříme případ, kdy charakteristická rovnice má právě jeden nulový kořen.

Jak je známo, můžeme takovou soustavu vhodnou lineární substitucí proměnných (s konstantními koeficienty) převést na kanonický tvar

$$\begin{gathered}\dot{z} = Z(z, z_1, \ldots, z_n)\,, \\ \dot{z}_s = \varrho_s z_s + \alpha_s z_{s-1} + Z_s(z, z_1, \ldots, z_n) \\ (s = 1, 2, \ldots, n\,;\quad \alpha_1 = 0)\,,\end{gathered} \tag{4.1}$$

kde $\operatorname{Re}\varrho_s < 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, po případě ještě některá další $\alpha_s = 0$ a funkce $Z, Z_1, \ldots, Z_n$ patří do H_2.

Zkoumejme nejprve rovnici

$$\dot{z} = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \ldots = Z(z) \quad (k \geqq 2)\,. \tag{4.2}$$

O té dokážeme toto

lemma 4.1. *Triviální řešení rovnice* (4.2) *je stabilní, jestliže všechna* $c_m = 0$ $(m = k, k + 1, \ldots)$ *a je nestabilní, jestliže* $c_k \neq 0$.

Důkaz. Prvá část tvrzení je evidentní.

Budiž nyní $c_k \neq 0$. Integrál zkrácené rovnice

$$\dot{z} = c_k z^k \tag{4.3}$$

snadno najdeme:

$$z = z_0[1 + (1 - k)\, c_k z_0^{k-1} t]^{-\frac{1}{k-1}}\,. \tag{4.4}$$

Odtud je však okamžitě patrné, že triviální integrál zkrácené rovnice (4.3) je nestabilní, neboť položíme-li v (4.4)

$$z_0 = \left(\frac{1}{k-1}\,\bar{c}_k \delta\right)^{\frac{1}{k-1}}\,, \tag{4.5}$$

kde δ je libovolně malé kladné reálné číslo (můžeme vzít libovolný z $k - 1$ kořenů), nabude integrál (4.4) v čase $t_1 = (\delta|c_k|^2)^{-1}$ nekonečně velké hodnoty a to tedy znamená, že libovolně blízko počátku začínají řešení, která opustí libovolné předem dané ε-okolí počátku. Poznamenejme, že integrály, pro něž je splněn vztah (4.5), ústí pro $t \to -\infty$ do počátku.

Nyní ukážeme, že z nestability triviálního řešení rovnice (4.3) již plyne také nestabilita triviálního řešení rovnice (4.2). K tomu užijeme Frommerovy teorie známé z kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. To je sice způsob poněkud těžkopádný, za to nás však částečně poučí o topologickém chování trajektorií v rovině z. Rovnice (4.2) je ekvivalentní se soustavou dvou reálných diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = \operatorname{Re} Z(z) = Q(x, y)\,, \quad \dot{y} = \operatorname{Im} Z(z) = P(x, y) \tag{4.2'}$$

Rovnice (4.5) definuje v podstatě pro tuto soustavu $k - 1$ „význačných směrů“ (podle Frommerovy terminologie; viz [1], [5]), v nichž mohou integrální čáry buď pro $t \to -\infty$ nebo $t \to \infty$ vstupovat s určitou směrnicí do počátku.

Z (4.4) je okamžitě patrno, že podél polopaprsků OP_m, $O = (0,0)$, $P_m = (\alpha_m, \beta_m)$, kde P_m je definováno vztahem

$$\alpha_m + i\beta_m = \bar{c}_k^{\frac{1}{k-1}} \quad (m = 1, 2, \ldots, k-1)\,, \tag{4.6$_1$}$$

vstupují integrály do počátku O pro $t \to -\infty$ a podél polopaprsků OQ_m, $Q_m = (\gamma_m, \delta_m)$, kde Q_m je definováno vztahem

$$\gamma_m + i\delta_m = (-\bar{c}_k)^{\frac{1}{k-1}}\,, \tag{4.6$_2$}$$

vstupují integrály do počátku pro $t \to \infty$. Tak dostáváme celkem $2k-2$ význačných polopaprsků. V případě lichého k svírají spolu vždy dva polopaprsky téže kategorie, v případě sudého k vždy jeden polopaprsek jedné a jeden druhé kategorie úhel π. Poněvadž dva takové polopaprsky svírající spolu úhel π definují jediný význačný směr, dostáváme celkem $k-1$ význačných směrů. Jak víme z Frommerovy teorie, mohou mít rovnice (4,2′) maximálně $k+1$ význačných směrů $y = \varkappa_i x$, jejichž směrnice jsou definovány rovnicí $P(1, \varkappa) - \varkappa Q(1, \varkappa) = 0$. Všechna řešení této rovnice ovšem nemusí být reálná a ani podél reálných význačných směrů nemusí vždy skutečně vstupovat integrály do singulárního bodu (t. j. v našem případě počátku). Avšak $k-1$ význačných směrů definovaných rovnicemi (4.6$_1$) a (4.6$_2$) má tu vlastnost, že podél nich integrální čáry do počátku vskutku vstupují, a že jsou to právě všechny takové směry. To plyne z toho, že pro zkrácenou soustavu jsou význačné směry současně integrálními čarami a všechny pohyby na nich počínající musí buď pro $t \to \infty$ nebo pro $t \to -\infty$ ubíhat do nekonečna. Snadno nahlédneme, že je to možné právě jen tehdy, leží-li počáteční bod na některém z $k-1$ význačných směrů dříve uvedených, neboť součin $c_k z_0^{k-1}$ musí být v tom případě reálný a to je možné právě jen v případech, určených rovnicí (4.5), kde δ je libovolné reálné číslo.

Bylo by možné ještě podrobněji topologicky popsat okolí singulárního bodu soustavy (4.2′), nebudeme se však u toho zdržovat. Zdůrazněme už pouze pro nás důležitou okolnost, že všechny význačné směry jsou, jak plyne z hořejšího, jednoduché, a že jsou tedy vyloučeny normální oblasti třetího typu podle Frommera.

Dokažme nyní, že triviální řešení soustavy (4.2′) je nestabilní. Zatím jsme dokázali, že soustava (4.2′) má $k-1$ význačných polopaprsků, podél nichž ústí integrální čáry pro $t \to -\infty$ do počátku a tedy pro $t \to \infty$ se od něho vzdalují. Z Frommerovy teorie odtud plyne, že můžeme sestrojit takovou kruhovou výseč se středem v počátku o dostatečně malém středovém úhlu a dostatečně malého poloměru ε, jež je jedním z těchto význačných polopaprsků půlena, a jejíž „zadní" (kruhová) stěna je integrálními čarami protínána pod úhly, které s radiusvektory nesvírají úhly větší než $\frac{1}{4}\pi$ a přitom se vzrůstajícím t protínají tuto stěnu z vnitřku ven. Vzhledem k tomu, že vyšetřujeme analytický případ, musí opět podle Frommerovy teorie v této výseči (ať už tvoří normální oblast prvního nebo druhého druhu) existovat aspoň jedna integrální křivka, která pro $t \to -\infty$ ústí do počátku. Zvolíme-li počáteční bod na této křivce libovolně blízko počátku, opustí trajektorie z něho vycházející po konečném čase uvažovanou kruhovou výseč a to zadní stěnou. Odtud okamžitě plyne, že triviální řešení je nestabilní.

Zkoumejme nyní úplnou soustavu (4.1). Proveďme substituci

$$z_s = \zeta_s + u_s(z) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) , \tag{4.7}$$

kde u_s jsou holomorfní řešení soustavy rovnic

$$\varrho_s u_s + \alpha_s u_{s-1} + Z_s(z, u_1, \ldots, u_n) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 = 0) .$$

Jelikož funkcionální determinant této soustavy se pro $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$ rovná $\varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_n \neq 0$, řešení $u_s(z)$ pro dostatečně malá z skutečně existují a, jak je ihned patrno, rozvoje

$$u_s(z) = A_{s1}z + A_{s2}z^2 + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

začínají členy alespoň druhého stupně.

Dosadíme-li do (4.1) podle (4.7), dostaneme soustavu

$$\dot{z} = \tilde{Z}(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = Z(z, \zeta_1 + u_1(z), \ldots, \zeta_n + u_n(z)) ,$$

$$\dot{\zeta}_s = \varrho_s\zeta_s + \alpha_s\zeta_{s-1} + \tilde{Z}_s(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) =$$

$$= \varrho_s\zeta_s + \alpha_s\zeta_{s-1} + Z_s(z, \zeta_1 + u_1, \ldots, \zeta_n + u_n) - Z_s(z, u_1, \ldots, u_n) - \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}z} Z$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 = 0) .$$

Všimněme si toho, že začíná-li rozvoj funkce $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0)$ členem stupně m-tého ($m \geqq 2$), pak rozvoje funkcí $\tilde{Z}_s(z, 0, 0, \ldots, 0)$ začínají členem stupně alespoň $m + 1$.

Nyní již můžeme vysloviti větu:

Věta 4.1. *Jestliže* $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, *pak triviální řešení soustavy* (4.1) *je stabilní, existuje jednoparametrická soustava řešení*

$$z = c, \quad z_s = u_s(c) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.8}$$

a každé řešení počínající dostatečně blízko počátku konverguje k jednomu z těchto řešení.

Jestliže $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0$, *pak triviální řešení soustavy* (4.1) *je nestabilní.*

Důkaz. Jestliže $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, pak také $\tilde{Z}_s(z, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ a jsou zřejmě splněny všechny podmínky lemmatu 3.1 a prvá část tvrzení věty odtud okamžitě plyne.

Jestliže $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0$, pak (jak víme podle lemmatu 4.1) je triviální řešení zkrácené soustavy $\dot{z} = \tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0)$ vždy nestabilní. Jelikož, jak jsme již uvedli, rozvoje funkcí $\tilde{Z}_s(z, 0, 0, \ldots, 0)$ začínají členem stupně alespoň

$m + 1$, začíná-li rozvoj funkce $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0)$ členem stupně m, jsou splněny všechny předpoklady lemmatu 3.2. Odtud plyne druhá část našeho tvrzení.

Poznámka. Obdobnou větu by šlo dokázat i v případě, že $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}_s$ závisí na čase, při čemž funkce $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0)$ by měla tvar $\tilde{Z}(t, z, 0, 0, \ldots, 0) = c_k z^k + c_{k+1}(t)\, z^{k+1} + \ldots$, kde c_k je konstanta různá od nuly.

5. Případ jednoho ryze imaginárního kořenu

V tomto případě lze lineární substitucí s konstantními koeficienty dosíci toho, že soustava má tvar

$$\begin{gathered} \dot{z} = i\mu z + Z(z, z_1, \ldots, z_n)\,, \\ \dot{z}_s = \varrho_s z_s + \alpha_s z_{s-1} + Z_s(z, z_1, \ldots, z_n) \\ (s = 1, 2, \ldots, n\,; \quad \alpha_1 = 0)\,, \end{gathered} \tag{5.1}$$

kde μ je reálné číslo, všechna ϱ_s mají záporné reálné části a holomorfní funkce $Z, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ jsou třídy H_2. Zkoumejme nejprve soustavu prvého řádu

$$\dot{z} = i\mu z + i\mu \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k = i\mu z[1 + zh(z)]\,. \tag{5.2}$$

(Je zřejmé, že tato forma zápisu není na újmu obecnosti.) Dokážeme

lemma 5.1. *Triviální řešení rovnice* (5.2) *je stabilní a všechna řešení počínající dostatečně blízko počátku jsou periodická a mají touž periodu* $\frac{2\pi}{\mu}$.

Tvrzení lemmatu bychom nejsnáze dokázali tak, že bychom známou metodou majorantních řad ukázali, že rovnici (5.1) lze převést v dostatečně malém okolí počátku na rovnici

$$\dot{\mathfrak{z}} = i\mu\mathfrak{z}\,, \tag{5.2'}$$

při čemž $\mathfrak{z} = z + P(z)$, resp. $z = \mathfrak{z} + Q(\mathfrak{z})$, kde P a Q patří do H_2, takže triviální řešení soustav (5.2) a (5.2′) mají vůči stabilitě stejný charakter i si zachovávají svou periodu; tvrzení lemmatu 5.1 je totiž pro rovnici (5.2′) zřejmé.

Uvedu zde však důkaz jiný, který podstatným způsobem užívá teorie funkcí komplexní proměnné.

Důkaz. Existuje kružnice K poloměru R, v níž funkce $1 + zh(z)$ nemá nulové body; její vnitřek označme G. Jelikož počátek může být pro soustavu (5.2) v rovině $z = (x, y)$ pouze typu centr nebo typu fokus, zjistíme snadno, že existuje takové okolí počátku G_1 ležící uvnitř K, že všechny integrály počínající v okolí G_1 protnou při $t \to \infty$ po prvé radiusvektor, na němž leží počáteční bod, opět uvnitř kružnice K. Sestrojme kružnici k o poloměru r, ležící úplně v G_1, a označme její vnitřek g.

Vezměme nyní integrál $z(t)$ počínající v nějakém bodu $z_0 \in g$ a dokažme, že po čase $\tau = \dfrac{2\pi}{\mu}$ nabude opět hodnoty z_0, což bude znamenat, že trajektorie je uzavřená a tedy pohyb je periodický.

Integrací rovnice (5.2) dostaneme

$$i\mu t = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta[1 + \zeta h(\zeta)]} = \int_{z_0}^{z} \left[\frac{1}{\zeta} - \frac{h(\zeta)}{1 + \zeta h(\zeta)}\right] d\zeta =$$

$$= \lg \frac{z}{z_0} - \int_{z_0}^{z} \frac{h(\zeta)}{1 + \zeta h(\zeta)}\, d\zeta = \lg \frac{z}{z_0} - \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta$$

a odtud

$$z - z_0 e^{i\mu t} e^{\int_{z_0}^{z} H(\zeta) d\zeta} = 0\,.$$

Položíme-li $t = \dfrac{2\pi}{\mu}$, dostaneme pro příslušnou hodnotu $z_1 = z\left(\dfrac{2\pi}{\mu}\right)$ rovnici:

$$z_1 - z_0 \exp \int_{z_0}^{z_1} H(\zeta)\, d\zeta = 0\,.$$

Tato rovnice má jedno zřejmé řešení, totiž $z_1 = z_0$. Dokážeme-li, že toto řešení je v kruhu K jediné, bude vše dokázáno.

K důkazu této okolnosti užijeme Rouchéovy věty. Funkce z a funkce $-z_0 \exp \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta$ jsou zřejmě holomorfní a jednoznačné uvnitř i na kružnici K. Na obvodu této kružnice je $|z| = R$ a

$$\left|- z_0 \exp \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta\right| \leqq r \exp \zeta\, |z - z_0| \max |H(z)| \leqq r \exp \{(r + R)\, M\}\,,$$

kde jsme položili $\max\limits_{z \in G} |H(z)| = M < \infty$; délku integrační cesty při odhadu integrálu $\int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta$ můžeme odhadnout veličinou $|z - z_0|$, neboť funkce $H(z)$ je v G holomorfní a hodnota integrálu při integraci po libovolné cestě je táž, jako když integrujeme po úsečce spojující body z a z_0. Nyní stačí zvolit, je-li to nutné, $r' < r$ tak, aby platilo $r' \exp \{(r' + R)\, M\} < R$, aby byla ještě splněna podmínka, že na kružnici K je $|z| > |-z_0 \exp \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta|$ pro všechna z_0, pro něž $|z_0| \leqq r'$. Jelikož funkce z má v G jediný nulový bod, má podle Rouchéovy věty také funkce $z - z_0 \exp \{\int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta\}$ v G jediný nulový bod a tím je $z = z_0$. Tím jsme tedy dokázali, že všechny integrály počínající uvnitř kružnice s dostatečně malým poloměrem r' jsou periodické a mají touž periodu $\dfrac{2\pi}{\mu}$, q. e. d.

Poznámka 1. Předpoklad, že všechna c_k ($k = 2, 3, \ldots$) jsou konstantní, je podstatný, neboť jsou-li některá c_k funkcí času t (byť i libovolně malá), může být stabilita pohybu porušena. Na př. rovnice $\dot{z} = iz + \varepsilon e^{-it}z^2$ má řešení $z = z_0 e^{it}(1 + \varepsilon z_0 t)^{-1}$ a triviální řešení je zřejmě nestabilní, ať zvolíme $|\varepsilon|$ jakkoli malé.

Vraťme se nyní k soustavě (5.1). Nyní již můžeme vyslovit větu:

Věta 5.1. *Triviální řešení soustavy* (5.1) *je stabilní.*

Důkaz plyne okamžitě z té okolnosti, že problém stability rovnice (5.2) se řeší konečným počtem členů — totiž prvním — a jsou tedy zřejmě splněny všechny podmínky lemmatu 3.2, z něhož tvrzení věty okamžitě plyne.

Poznámka 2. Případ jednoho ryze imaginárního kořenu je tedy „kritický“ pouze v tom smyslu, že o stabilitě triviálního řešení nedovedeme rozhodnout na základě známých vět teorie prvého přiblížení, a nikoliv v tom smyslu, jak o „kritických“ případech zpravidla mluvíme v reálném oboru, že bychom totiž vhodnou volbou nelineárních členů mohli dosáhnout podle libosti jak stability tak nestability.

LITERATURA

[1] *E. T. Frommer:* Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, Math. Annalen *99* (1928), 222—272.

[2] *А. М. Ляпунов:* Общая задача об устойчивосто движения, 1892.

[3] *А. И. Лурье:* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Москва 1951.

[4] *И. Г. Малкин:* Теория устойчивости движения, Москва 1952.

[5] *В. В. Немыцкий-В. В. Степанов:* Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва 1949.

[6] *O. Perron:* Ueber Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, Math. Zeitschrift *29* (1929), 129—160.

[7] *O. Perron:* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, Math. Zeitschrift *32* (1930), 703—728.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

ОТТО ВЕЙВОДА (Otto Vejvoda), Прага.

(Поступило в редакцию 9/I 1956 г.)

В работе исследуется устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений (0.1), где z_j — комплексные функции действительного переменного, c_{jk} — комплексные постоянные и функции

$Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)$ удовлетворяют определенным предположениям, которые будут указаны в дальнейшем.

В § 1 введены фундаментальные определения и общие теоремы об устойчивости прямого метода Ляпунова, очень схожие с соответствующими определениями и теоремами, хорошо знакомыми из действительной области.

В § 2 доказываются теоремы первого приближения для системы (0.1), причем функции Z_j подчинены следующим условиям: а) Z_j определены и непрерывны в области $\|z\| \leqq H$, $t \geqq 0$, б) $\lim\limits_{\|z\| \to 0} \dfrac{Z_j}{\|z\|} = 0$ равномерно относительно t. Эти теоремы при тех же самых предположениях были доказаны Перроном с помощью теорем о непрерывной зависимости решений от начальных значений и от правых частей уравнений. В настоящей работе они доказываются прямым методом Ляпунова, дающим лучшую возможность оценить область асимптотической устойчивости, чем метод Перрона.

Для теорем устойчивости по первому приближению являются основными две леммы:

Лемма 2.2. *Уравнение* (2.3) *имеет по крайней мере одно решение типа* (*). *Все собственные значения* λ_m *этого уравнения для решений типа* (*) *даются выражениями* $\lambda_m = \varrho_j + \bar{\varrho}_k$ $(m = 1, 2, \ldots, n^2;\ j, k = 1, 2, \ldots, n)$, *где* ϱ_j — *корни характеристического уравнения* (2.4).

Лемма 2.3. *Если* $\varrho_j + \bar{\varrho}_k \neq 0$ *для всех* $j, k = 1, 2, \ldots, n$, *то для произвольной формы* U *типа* (*) *существует одно и только одно решение уравнения* (2.7). *Это решение будет формой Эрмита, если* U*—форма Эрмита.*

Тогда в случае, когда характеристическое уравнение (2.4) имеет а) только корни с отрицательными действительными частями, б) по крайней мере один корень с положительной действительной частью, то получим теорему об а) асимптотической устойчивости, б) неустойчивости тривиального решения, аналогичные соответствующим теоремам в действительной области. Функции Ляпунова, использованные для доказательства этих теорем, возможно всегда выбрать как формы Эрмита.

В случае, когда характеристическое уравнение (2.4) имеет по крайней мере один корень с действительной частью, равной 0, и не имеет ни одного корня с положительной действительной частью, мы не умеем построить функции Ляпунова и по этому должны воспользоваться другими методами, чтобы обнаружить, устойчиво ли тривиальное решение или нет. Эти случаи мы называем критическими.

В § 4 и 5 из этих критических случаев рассматриваются самые простые, а то при условии что Z_j — голоморфные функции от переменных, начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка и не зависящие от t.

В § 3 высказаны две леммы, касающиеся систем (3.1) и (3.5), которые позволяют нам в обоих случаях рассматривать только „критические" уравнения вместо всей системы. Их формулировка та же, как в действительной области.

В § 4 исследуется система (4.1), т. е. случай, когда характеристическое уравнение (2.4) имеет один нулевой корень. Вследствие лемм из § 3 достаточно исследовать уравнение (4.2). Для него имеет место

Лемма 4.1. *Тривиальное решение уравнения* (4.2) *устойчиво, если все* $c_m = 0$ $(m = k, k + 1, \dots)$ *и неустойчиво, если* $c_k \neq 0$.

Доказательство первой части утверждения очевидно. Доказательство второй части основано на теории Фроммера исключительных направлений.

О полной системе (4.1) можем высказать следующую

Теорему 4.1. *Если* $Z_j(z, u_1(z), \dots, u_n(z)) = 0$ $[u_j(z)$ — *решения системы* $\varrho_s u_s + \alpha_s u_{s-1} + Z_s(z, u_1, \dots, u_n) = 0$ $(s = 1, 2, \dots, n;\ \alpha_1 = 0)]$, *то тривиальное решение системы* (4.1) *устойчиво, существует одно-параметрическая система решений* $z = c$, $z_s = u_s(c)$ $(s = 1, 2, \dots, u)$ *и каждое решение, начинающееся достаточно близко начала стремится к одному из этих решений. Если* $Z_j(z, u_1(z), \dots, u_n(z)) \not\equiv 0$, *то тривиальное решение неустойчиво.*

В § 5 исследуется система (5.1), т. е. случай одного чисто мнимого корня характеристического уравнения (2.4). Сначала доказываем

Лемму 5.1. *Тривиальное решение системы* (5.2) *устойчиво и все решения, начинающиеся достаточно близко начала, — периодические с периодом* $\frac{2\pi}{\mu}$.

Эта лемма доказывается при помощи теоремы Руше.

Из леммы 5.1 мы получим легко

Теорему 5.1. *Тривиальное решение системы* (5.1) *устойчиво.*

Summary

THE STABILITY OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE COMPLEX DOMAIN

OTTO VEJVODA, Prague.

(Received January 9, 1956.)

In this paper the stability of the trivial solution of a system of differential equations (0.1) is studied, where z_j are complex functions of the real variable t, c_{jk} are complex numbers and the functions $Z_j(t, z_1, \dots, z_n)$ satisfy certain conditions, which will be mentioned later.

In § 1 the fundamental definitions and general Lyapunov's "second method" theorems on stability, very analogous to those well known from the real domain, are formulated.

In § 2 the theorems on the first approximation for the system (0.1) are derived under the assumption that the functions $Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)$ satisfy conditions (P):

a) Z_j are defined and continuous in the region $\|z\| \leqq H$, $t \geqq 0$;

b)
$$\lim_{\|z\| \to 0} \frac{|Z_j|}{\|z\|} = 0 \text{ uniformly in } t, t \geqq 0 .$$

These theorems under the same assumptions were proved first by Perron [6] by means of theorems on the continuous dependence of the solutions on the initial conditions and on right sides. In this paper they are proved by means of the second Lyapunov's method, which offers better possibility to estimate the domain of asymptotic stability than that of Perron's.

These two lemmas are fundamental for the theory of the first approximation:

Lemma 2.2. *The equation* (2.3) *has at least one solution of the type* (*). *All eigenvalues* λ_m *of this equation for the solutions of the type* (*) *are given by the expressions* $\lambda_m = \varrho_j + \bar{\varrho}_k$ $(m = 1, 2, \ldots, n^2;\ j, k = 1, 2, \ldots, n)$, *where* ϱ_j *are the roots of the characteristic equation* (2.4).

Lemma 2.3. *If for all* $j, k = 1, 2, \ldots, n$ *holds* $\varrho_j + \bar{\varrho}_k \neq 0$, *then for an arbitrary form* U *of the type* (*) *there exists one and only one solution of the equation* (2.7). *This solution is hermitian, if* U *is hermitian.*

Then in the case that the characteristic equation (2.4) has a) all roots with negative real parts, b) at least one root with positive real part, we obtain the theorems a) on the asymptotic stability, b) on unstability of the trivial solution, quite analogous to those of the real domain. The Lyapunov's functions used can be always chosen as hermitian forms.

In the case that the characteristic equation (2.4) has besides the roots with negative real parts at least one root with zero real part and no root with positive real part, we cannot construct the Lyapunov's functions and we must use other methods to decide about the stability of the trivial solution. We call these cases "critical" ones.

In §§ 4—5 the simplest from these "critical" cases are studied under the assumption that the functions Z_j are holomorphic functions in the variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ the Taylor's series of which began with members of the second degree at least and non depending on t.

In § 3 we mention two lemmas concerning systems (3.1) and (3.5) which enable us to reduce the study of the whole system to the study of the "critical" equations only. They have the same form as in the real domain.

In § 4 the system (4.1) is investigated, i. e. the case of one zero root of the characteristic equation (2.4). According to the lemmas of § 3, it is sufficient examine the equation (4.2). For this equation we have

lemma 4.1. *The trivial solution of the equation* (4.2) *is stable if all* $c_m = 0$ $(m = k, k + 1, \ldots)$ *and is unstable if* $c_k \neq 0$.

The proof of the first part of the assertion is obvious. The proof of the second part is carried out by means of Frommer's theory of "remarkable directions". For the whole system (4.1) we can pronounce the following

theorem 4.1. *If* $Z_j(z, u_1(z). \ldots, u_n(z)) \equiv 0$ $[u_j(z)$ *are solutions of the system* $\varrho_s u_s + \alpha_s u_{s-1} + Z_s(z, u_1, \ldots, u_n) = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 = 0)]$, *then the trivial solution of the system* (4.1) *is stable, there exist a one-parameter system of solutions* $z = c,\ z_j = u_j(c)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *and every solution beginning sufficiently near to the origin converges to one of these solutions. If* $Z_j(z, u_1(z), \ldots, u_n(z)) \neq 0$, *then the trivial solution is unstable.*

In § 5 the system (5.1) is investigated, i. e. the case of one pure imaginary root of the characteristic equation (2.4). We prove first

lemma 5.1. *The trivial solution of the equation* (5.2) *is stable and all solutions beginning sufficiently near to the origin are periodical with the same period* $\dfrac{2\pi}{\mu}$.

This lemma is proved by means of Rouché's theorem.

From lemma 5.1 we get readily

theorem 5.1. *The trivial solution of* (5.1) *is stable.*