

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 82 (1957), No. 2, 229

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117243>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÚLOHY A PROBLÉMY

Řešení úlohy 8 (autor *M. Fiedler*) z č. 4, roč. 81 (1956), str. 470.

Tvrzení je správné.

Důkaz provedeme nepřímou. Nechť naopak pro $M = \{\bar{a}_i\}_0^m$, $N = \{\bar{b}_j\}_{m+1}^n$, $0 \leq m < n$, je stále $|\bar{a}_i - \bar{b}_j| \leq \sqrt{2}$. Pro body na jednotkové kulové nadploše je poslední nerovnost ekvivalentní s nerovností $\bar{a}_i \cdot \bar{b}_j \geq 0$ (skalární součin). Z daných předpokladů plyne: Existuje jediná posloupnost čísel μ_i tak, že

$$\bar{0} = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i + \sum_{i=m+1}^n \mu_i \bar{b}_i, \quad \sum \mu_i = 1.$$

Přitom je $0 < \mu_i$.

Pak

$$0 = \bar{0} \cdot \bar{a}_k = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_k + \sum_{i=m+1}^n \mu_i \bar{b}_i \bar{a}_k \geq \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_k.$$

Nerovnosti $0 \geq \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i \cdot \bar{a}_k$ násobme μ_k a sečtème; dostaneme

$$0 \geq \sum_{i,k} \mu_i \mu_k \bar{a}_i \cdot \bar{a}_k = \left| \sum_i \mu_i \bar{a}_i \right|^2,$$

tedy $\bar{0} = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i$, což je spor s $\mu_i > 0$.

Poznámka. Úvahu lze ihned převést na reálné unitární prostory a spočetné množiny M, N .

Otomar Hájek, Praha.

*

Úloha 4. Označme E_3 trojrozměrný eukleidovský prostor.

a) Který prostorový čtyřúhelník v E_3 o obvodu 1 má vlastnost, že objem příslušného čtyřstěnu je maximální?

b) Který pětiúhelník v E_3 o obvodu 1 má vlastnost, že objem jeho konvexního obalu je maximální?

c) Která uzavřená křivka v E_3 o délce 1 má vlastnost, že objem jejího konvexního obalu je maximální?

d) Který oblouk v E_3 o délce 1 má vlastnost, že objem jeho konvexního obalu je maximální?

Platí, že pět vrcholů pětiúhelníka z př. b), křivka z př. c) a oblouk z př. d) leží na kulové ploše?

M. Fiedler, Praha.