ÚLOHY A PROBLÉMY

Řešení úlohy 8 (autor *M. Fiedler*) z č. 4, roč. *81* (1956), str. 470.

Tvrzení je správné.

Důkaz provedeme nepřímo. Nechť naopak pro $M = \{\bar{a}_i\}_0^m$, $N = \{\bar{b}_j\}_{m+1}^n$, $0 \leqq m < n$, je stále $|\bar{a}_i - \bar{b}_j| \leqq \sqrt{2}$. Pro body na jednotkové kulové nadploše je poslední nerovnost ekvivalentní s nerovností $\bar{a}_i \,.\, \bar{b}_j \geqq 0$ (skalární součin). Z daných předpokladů plyne: Existuje jediná posloupnost čísel μ_i tak, že

$$\bar{0} = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i + \sum_{i=m+1}^n \mu_i \bar{b}_i\,, \quad \sum \mu_i = 1\,.$$

Přitom je $0 < \mu_i$.

Pak

$$0 = \bar{0} \,.\, \bar{a}_k = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i \,.\, \bar{a}_k + \sum_{i=m+1}^n \mu_i \bar{b}_i \bar{a}_k \geqq \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i \,.\, \bar{a}_k\,.$$

Nerovnosti $0 \geqq \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i \,.\, \bar{a}_k$ násobme μ_k a sečtěme; dostaneme

$$0 \geqq \sum_{i,k} \mu_i \mu_k \bar{a}_i \,.\, \bar{a}_k = \left|\sum_i \mu_i \bar{a}_i\right|^2,$$

tedy $\bar{0} = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{a}_i$, což je spor s $\mu_i > 0$.

Poznámka. Úvahu lze ihned převést na reálné unitární prostory a spočetné množiny M, N.

Otomar Hájek, Praha.

*

Úloha 4. Označme E_3 trojrozměrný eukleidovský prostor.

a) Který prostorový čtyrúhelník v E_3 o obvodu 1 má vlastnost, že objem příslušného čtyrstěnu je maximální?

b) Který pětiúhelník v E_3 o obvodu 1 má vlastnost, že objem jeho konvexního obalu je maximální?

c) Která uzavřená křivka v E_3 o délce 1 má vlastnost, že objem jejího konvexního obalu je maximální?

d) Který oblouk v E_3 o délce 1 má vlastnost, že objem jeho konvexního obalu je maximální?

Platí, že pět vrcholů pětiúhelníka z př. b), křivka z př. c) a oblouk z př. d) leží na kulové ploše?

M. Fiedler, Praha.