Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

REFERÁTY

O SPOJITÉ ZÁVISLOSTI NA PARAMETRU A JISTÝCH ZOBECNĚNÍCH V THEORII OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Vlastní referát o přednášce proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 3. prosince 1956.)

Dobře známou větu o spojité závislosti řešení obyčejné diferenciální rovnice na parametru zobecnili M. A. Krasnoselskij a S. G. Krejn tímto způsobem:

Nechť funkce $f_k(x, t)$ jsou definované a spojité pro $x \in G$ otevř. $\subset E_n$, $0 \leqq t \leqq T$, $f_k(x, t) \in E_n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ a nechť existuje jediné řešení $x_0(t)$ rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_0(x, t) \tag{1}$$

splňující počáteční podmínku $x_0(0) = x_0$ a nechť toto řešení je definované pro $0 \leqq t \leqq T$. Dále nechť $x_k(t)$ je řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_k(x, t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

a nechť toto řešení je definované na intervalu $\langle 0, T\rangle$.

Věta 1. *Nechť jsou splněny tyto podmínky:*

α) $\int_0^t f_k(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_0^t f_0(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau$ *pro* $k \to \infty$, $x \in G$, $t \in \langle 0, T\rangle$,

β) *funkce* $f_k(x, t)$ *pro* $k = 0, 1, 2, \ldots$, $t \in \langle 0, T\rangle$ *tvoří soustavu stejně spojitých funkcí proměnné* x,

γ) *funkce* $f_k(x, t)$ *jsou stejnoměrně ohraničené.*

Potom $x_k(t) \to x_0(t)$ *pro* $k \to \infty$ *stejnoměrně.*[1])

Protože platí γ), konvergence v podmínce α) je stejnoměrná. Věta 1 zůstane v platnosti, vypustíme-li předpoklad γ) a požadujeme-li, aby konvergence v podmínce α) byla stejnoměrná vzhledem k (x, t). Tento výsledek uveřejní přednášející společně se Z. Vorlem.

[1]) Viz *М. А. Красносельский и С. Г. Крейн*, О принципе усреднения в нелинейной механике, Успехи математических наук, *10*; *3* (1955), 147—152. Větu 1 cituji s nepodstatnými změnami. Autoři nezávadějí předpoklad, že funkce $f_k(x, t)$ jsou spojité v (x, t) a neprecisují, v jakém smyslu rovnice (1), (2) mají řešení. Jest na př. možné čísti citovanou práci s předpokladem, že při pevném k jsou splněny Carathéodoryho předpoklady pro existenci řešení rovnic (1), (2). Jak autoři uvádějí v poznámce, není třeba předpokládat, že funkce $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ jsou definovány na intervalu $\langle 0, T\rangle$, stačí pouze předpoklad o $x_0(t)$. O souvislosti věty 1 s přiblížením v průměru (принцип усреднения) lze se poučit v práci Krasnoselského a Krejna, kde je též uvedena starší literatura.

Všimněme si speciálně rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xk^{1-\alpha}\cos kt + k^{1-\beta}\sin kt = f_k(x, t)\,, \quad x(0) = 0 \quad (x \in E_1\,, \quad k = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = f_0(x, t)\,, \quad x(0) = 0\,. \tag{3}$$

Podle věty Krasnoselského a Krejna $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně pro $\alpha = \beta = 1$, $k \to \infty$. Z uvedeného výsledku přednášejícího a Z. Vorla plyne, že $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně pro $\alpha = 1$, $0 < \beta \leqq 1$. Přímým výpočtem snadno zjistíme, že $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně, jestliže $0 < \alpha \leqq 1$, $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha + \beta > 1$. (Je-li však $\alpha + \beta = 1$, pak $x_k(t) \to -\frac{1}{2}t$ skoro stejnoměrně.) Naším cílem je objasnit příčiny podobných konvergenčních zjevů.

Nejdříve zavedeme zobecněný Perronův integrál. Nechť $\tau_* < \tau^*$. Množina $S \subset E_2$ patří do systému $\mathbf{S}$, jestliže ke každému $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ lze udat takové $\delta(\tau) > 0$, že $[\tau, t] \in S$ pro $t \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle \cap (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$. Konečnou posloupnost $A = (\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \tau_2, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \tau_l, \alpha_l)$ nazýváme rozdělením intervalu $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$, jestliže $\tau_* = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ $\ldots < \alpha_l = \tau^*$, $\alpha_0 \leqq \tau_1 \leqq \alpha_1 \leqq \tau_2 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \tau_l \leqq \alpha_l$. Říkáme, že rozdělení A intervalu $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$ je podřízeno množině $S \in \mathbf{S}$ a píšeme $A \in \mathbf{A}(S)$, jestliže $(\tau_j, t) \in S$ pro $\alpha_{j-1} \leqq$ $\leqq t \leqq \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Vždy je $\mathbf{A}(S) \neq \emptyset$.

Nechť funkce $U(\tau, t)$ je definována na některé množině $S_1 \in \mathbf{S}$. Je-li $A \in \mathbf{A}(S_1)$, pak klademe $B(A) = \sum_{j=1}^{l} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})]$. Funkci U nazýváme *integrovatelnou*, lze-li ke každému $\varepsilon > 0$ udat takové $S \in \mathbf{S}$, $S \subset S_1$, že $|B(A)_1 - B(A_2)| \leqq \varepsilon$, jakmile $A_1, A_2 \in \mathbf{A}(S)$. Snadno lze ukázat, že v tomto případě existuje jediné číslo, které nazýváme *integrálem* z DU od τ_* do τ^* a označujeme $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$ a které má tuto vlastnost: ke každému ε existuje takové $S \in \mathbf{S}$, $S \subset S_1$ že $|\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU - B(A)| \leqq \varepsilon$, jakmile $A \in \mathbf{A}(S)$. Pro $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$ platí základní věty theorie integrálu a je-li speciálně $U(\tau, t) = f(\tau)\,\varphi(t)$, kde funkce $\varphi(t)$ má konečnou variaci $(-\infty < f(\tau) < \infty)$, potom $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$ existuje právě tehdy, existuje-li $\int_{\tau_*}^{\tau^*} f(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau)$ v Perronově smyslu; oba integrály jsou si potom rovny. Jestliže funkce $U(\tau, t) =$ $= (U_1(\tau, t), \ldots U_n(\tau, t))$ má hodnoty v E_n, pak klademe

$$\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU = \left(\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_1, \ldots, \int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_n\right).$$

Nechť množina $R_{n+2} \subset E_{n+2}$ má tuto vlastnost: Jestliže $x \in E_n$, $(x, \tau, \tau) \in R_{n+2}$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $(x, \tau, t) \in R_{n+2}$, jakmile $|\tau - t| < \delta$. Nechť funkce $F(x, \tau, t)$ je definovaná pro $(x, \tau, t) \in R_{n+2}$, $F(x, \tau, t) \in E_n$. Říkáme, že funkce $x(\tau)$ definovaná pro $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ je řešením *zobecněné diferenciální rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, \tau, t)\,, \tag{4}$$

je-li $(x(\tau), \tau, \tau) \in R_{n+2}$ pro $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ a platí-li

$$x(\tau_4) = x(\tau_3) + \int_{\tau_3}^{\tau_4} DU\,, \quad U(\tau, t) = F(x(\tau), \tau, t) \tag{5}$$

pro všechna $\tau_3, \tau_4 \in \langle\tau_1, \tau_2\rangle$ [2]).

---

[2]) Přirozeně klademe $\int_{\tau_3}^{\tau_3} DU = 0$, $\int_{\tau_4}^{\tau_3} DU = -\int_{\tau_3}^{\tau_4} DU$.

Jestliže funkce $F(x, \tau, t)$ má parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, t)$, která spojitě závisí na (x, t) a vůbec nezávisí na τ, potom každé řešení $x(\tau)$ zobecněné rovnice (4) je současně řešením rovnice $\frac{dx}{d\tau} = f(x, t)$ v obyčejném smyslu a naopak.

Buďte $\alpha_1, \beta_1, \sigma, K_1, K_2$ kladná čísla. Nechť symbol $\mathbf{F}$ znamená množinu funkcí $F(x, t)$, které jsou definované pro $x \in G$ otevř. $\subset E_n$, $t \in \langle 0, T \rangle$, $F(x, t) \in E_n$ a splňují podmínky $\|F(x, t_2) - F(x, t_1)\| \leqq K_2 |t_2 - t_1|^{\beta_1}$ pro $x \in G$, $t_1, t_2 \in \langle 0, T \rangle$, $|t_2 - t_1| \leqq \sigma$, $\|F(x_2, t_2) - F(x_2, t_1) - F(x_1, t_2) + F(x_1, t_1)\| \leqq \|x_2 - x_1\| K_1 |t_2 - t_1|^{\alpha_1}$ pro $x_1, x_2 \in G$, $t_1, t_2 \in \langle 0, T \rangle$, $\|x_2 - x_1\| \leqq 2K_2\sigma^{\beta_1}$, $|t_2 - t_1| \leqq \sigma$. Předpokládejme, že $F(x, t) \in \mathbf{F}$, $\alpha_1 + \beta_1 > 1$. Funkci $x(\tau)$ nazýváme *regulárním* řešením zobecněné rovnice (4) na intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, platí-li (5) pro všechna $\tau_3, \tau_4 \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ a existuje-li funkce $\sigma_2(\tau) > 0$, $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ taková, že $\|x(\tau_4) - x(\tau_3)\| \leqq 2K_1 |\tau_4 - \tau_3|^{\beta_1}$ pro $\tau_3, \tau_4 \in \langle \tau_0 - \sigma_2(\tau_0), \tau_0 + \sigma_2(\tau_2) \rangle \cap \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, $\tau_0 \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$.

Za těchto předpokladů platí:

1. *Je-li $x_0 \in G$, $\tau_0 \in \langle 0, T \rangle$, potom v nějakém okolí čísla τ_0 existuje regulární řešení $x(\tau_0)$ rovnice (4), $x(\tau_0) = x_0$.*

2. *Jestliže $F_k(x, t) \in \mathbf{F}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $F_k \to F_0$ stejnoměrně pro $k \to \infty$ a existuje-li jediné regulární řešení $x_0(\tau)$ rovnice $\frac{dx}{d\tau} = DF_0(x, t)$, $x(0) = x_0$, na intervalu $\langle 0, T \rangle$, potom pro všechna dosti veliká k existují řešení $x_k(\tau)$ rovnice $\frac{dx}{d\tau} = DF_k(x, t)$, $x(0) = x_0$, která jsou regulární na intervalu $\langle 0, T \rangle$. Tato řešení nemusejí být určena jednoznačně, ale v každém případě $x_k(\tau) \to x_0(\tau)$ stejnoměrně pro $k \to \infty$.*

Chceme-li těchto výsledků použít pro rovnici (3), položíme $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \min(\alpha, \beta)$ a dostáváme: $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně, jestliže $0 < \alpha_1 \leqq 1$, $0 < \beta_1 \leqq 1$, $\alpha_1 + \beta_1 > 1$, to znamená, jestliže $0 < \alpha \leqq 1$, $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Přirozeně každé řešení rovnice (3) má spojitou derivaci a je tedy regulární. Chování rovnice (3) není ovšem plně objasněno, neboť dostáváme dodatečnou podmínku $\alpha > \frac{1}{2}$.

Poznamenejme na konec, že dosažené výsledky lze interpretovat pomocí theorie distribucí. Nechť $F(x, t) \in \mathbf{F}$, $\alpha_1 + \beta_1 > 1$ a položme $\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, t)$, kde derivaci bereme ve smyslu theorie distribucí. $f(x, t)$ je speciální distribuce při pevném x. Je-li funkce $y(\tau)$ definovaná pro $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$, $y(\tau) \in G$ a platí-li

$$\|y(\tau_4) - y(\tau_3)\| \leqq K|\tau_4 - \tau_3|^{\gamma}, \quad K > 0, \quad \gamma > 1 - \alpha, \quad \tau_4, \tau_3 \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \tag{6}$$

potom existuje integrál $\int_{\tau_0}^{\xi} DF(y(\tau), t) = g(\xi)$, $\tau_0, \xi \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ a závisí spojitě na ξ. Můžeme definovat dosazení funkce $y(\tau)$ za parametr x do $f(x, t)$ vztahem

$$f(y(\tau), \tau) = \frac{d}{d\xi} g(\xi).$$

Funkce $y(\tau)$ je řešením rovnice

$$\frac{dy}{d\tau} = f(y(\tau), \tau), \tag{7}$$

je-li splněno (6) a jsou-li distribuce na obou stranách rovnice (7) rovné. $y(\tau)$ je řešením rovnice (7) právě tehdy, je-li regulárním řešením rovnice (4).

Jaroslav Kurzweil, Praha.