

Břetislav Novák

Poznámka o polynomech s celočíselnými koeficienty

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 82 (1957), No. 1, 99

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117238>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

RŮZNÉ

POZNÁMKA O POLYNOMECH S CELOČÍSELNÝMI KOEFICIENTY

BŘETISLAV NOVÁK, Chrudim.

Autor vyšetřuje polynomy, jejichž funkční hodnoty mají tvar  $6m \pm 1$ .

Je známo, že neexistuje polynom  $f$ , jehož funkční hodnota  $f(n)$  by byla prvočíslem pro každé přirozené  $n$ . Protože se však mezi čísla  $6m \pm 1$  při malém celém  $m$  vyskytuje jen malý počet složených čísel, lze očekávat, že polynom  $f$ , jehož všechny funkční hodnoty  $f(n)$  ( $n$  celé) mají tvar  $6m \pm 1$ , bude nabývat mnoha prvočíselných hodnot. Všechny takové polynomy  $f$  s celými koeficienty lze snadno udat; platí totiž tato věta:

*Buď  $f(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$  polynom s celočíselnými koeficienty. Buď  $s$  celé číslo a necht' platí  $f(j) \equiv \pm 1 \pmod{6}$  pro  $j = s - 1, s, s + 1$ . Potom je  $f(n) \equiv \pm 1 \pmod{6}$  pro každé celé  $n$ .*

Důkaz. Položme  $g(x) = f(x) - f(s)$ . Protože obě čísla  $f(s - 1), f(s)$  jsou lichá, je číslo  $g(s - 1) = f(s - 1) - f(s)$  sudé. Protože však také číslo  $g(s)$  je sudé, je  $g(n)$  sudé pro všechna  $n$ . Máme tedy  $g(n + 3) \equiv g(n) \pmod{2}$  i  $g(n + 3) \equiv g(n) \pmod{3}$ ; odtud plyne  $g(n + 3) \equiv g(n) \pmod{6}$  a tedy také  $f(n + 3) \equiv f(n) \pmod{6}$  po každé celé  $n$ . Protože  $f(j) \equiv \pm 1 \pmod{6}$  pro  $j = s - 1, s, s + 1$ , je  $f(n) \equiv \pm 1 \pmod{6}$  pro všechna celá  $n$  vůbec.

Poznáme tedy již na číslech  $f(-1), f(0), f(1)$ , zda platí  $f(n) \equiv \pm 1 \pmod{6}$  pro všechna  $n$  či nikoli.