Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O POLYNOMECH S CELOČÍSELNÝMI KOEFICIENTY

BŘETISLAV NOVÁK, Chrudim.

Autor vyšetřuje polynomy, jejichž funkční hodnoty mají tvar $6m \pm 1$.

Je známo, že neexistuje polynom f, jehož funkční hodnota $f(n)$ by byla prvočíslem pro každé přirozené n. Protože se však mezi čísly $6m \pm 1$ při malém celém m vyskytuje jen malý počet složených čísel, lze očekávat, že polynom f, jehož všechny funkční hodnoty $f(n)$ (n celé) mají tvar $6m \pm 1$, bude nabývat mnoha prvočíselných hodnot. Všechny takové polynomy f s celými koeficienty lze snadno udat; platí totiž tato věta:

Buď $f(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$ *polynom s celočíselnými koeficienty. Buď s celé číslo a nechť platí* $f(j) \equiv \pm 1 \pmod 6$ *pro* $j = s - 1, s, s + 1$. *Potom je* $f(n) \equiv \pm 1 \pmod 6$ *pro každé celé n.*

Důkaz. Položme $g(x) = f(x) - f(s)$. Protože obě čísla $f(s - 1), f(s)$ jsou lichá, je číslo $g(s - 1) = f(s - 1) - f(s)$ sudé. Protože však také číslo $g(s)$ je sudé, je $g(n)$ sudé pro všechna n. Máme tedy $g(n + 3) \equiv g(n) \pmod 2$ i $g(n + 3) \equiv g(n) \pmod 3$; odtud plyne $g(n + 3) \equiv g(n) \pmod 6$ a tedy také $f(n + 3) \equiv f(n) \pmod 6$ po každé celé n. Protože $f(j) \equiv \pm 1 \pmod 6$ pro $j = s - 1, s, s + 1$, je $f(n) \equiv \pm 1 \pmod 6$ pro všechna celá n vůbec.

Poznáme tedy již na číslech $f(-1), f(0), f(1)$, zda platí $f(n) \equiv \pm 1 \pmod 6$ pro všechna n či nikoli.