Karel Karták
Věta o substituci pro Denjoyovy integrály

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 410--419

VĚTA O SUBSTITUCI PRO DENJOYOVY INTEGRÁLY

KAREL KARTÁK, Praha.

(Došlo dne 27. října 1955.)

DT:517.65

V článku je dokázáno několik vět o substituci. Z odvozených vět plyne na př. formule

$$\int_a^b \frac{g(x)}{G(x)}\,\mathrm{d}x = \lg G(b) - \lg G(a)\,,$$

kde kladná funkce G je neurčitým Perronovým integrálem funkce g v intervalu $\langle a, b\rangle$.

I. Úvod

(1,1) Nejprve zavedeme některá označení a úmluvy. Je-li $V(x)$ nějaký výrok, pak $\{x|V(x)\}$ znamená množinu těch x (z nějaké základní množiny E), pro něž $V(x)$ je pravdivý. Je-li E nějaká množina reálných čísel, pak symbol $|E|$ značí její vnější Lebesgueovu míru. Funkcemi se rozumějí konečné reálné funkce. Symbol $\Omega(f; E)$ značí oscilaci funkce f na množině E. Budeme psát $F \in \mathrm{Lip}\ 1$, jestliže existuje $M \geq 0$ tak, že platí $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ pro všechna čísla x, y z definičního oboru.

(1,2) V integrálním počtu se dokazuje formule

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \qquad (S)$$

za předpokladu, že funkce f, φ splňují jisté jednoduché podmínky; integrál se obvykle pojímá ve smyslu Newtonově nebo Riemannově. Je přirozené zabývat se platností formule (S) pro obecnější definice integrálu. Tak pro Lebesgueův integrál se dokazuje věta o substituci za těchto podmínek:

(1,3) Věta. *Buď f lebesgueovsky integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Buď φ absolutně spojitá a neklesající v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, nechť $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Pak platí formule ($S$).*

Důkaz. Viz na příklad [1], str. 55.

(**1,4**) J. Mařík položil otázku, zda platí formule $\int_a^b \frac{g(x)}{G(x)}\,dx = \lg \frac{G(b)}{G(a)}$, je-li kladná funkce G neurčitým Perronovým integrálem funkce g v intervalu $\langle a, b\rangle$.[1]) V tomto článku ukážeme, že odpověď je kladná; dokážeme obecnější větu (2,7). Důkaz této věty nebudeme provádět pro Perronův integrál, t. j. přímou konstrukcí majorant a minorant, nýbrž pro jemu ekvivalentní t. zv. Denjoyův integrál v užším smyslu (D_*-integrál); vzhledem ke zmíněné ekvivalenci se také říká Denjoy-Perronův integrál.

II. Denjoy-Perronův integrál

(**2,1**) Je známo, že theorii Lebesgueova integrálu je možno vybudovat deskriptivně, totiž tak, že se vyjde z vlastností neurčitého integrálu, t. j. absolutně spojitých funkcí. Při definici Denjoyova D_*-integrálu budeme postupovat také deskriptivně. Nejprve uvedeme několik definic.

(**2,2**) **Definice.** Funkce F buď spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$; nechť $E \subset \langle a, b\rangle$. Řekneme, že F je absolutně spojitá na E, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n,\, a_i, b_i \in E,\, \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon\,.$$

(**2,3**) **Definice.** Nechť $E \subset (-\infty, \infty)$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Je-li $E \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$, pak budeme množinu $E \cap \langle \alpha, \beta\rangle$ nazývat *porcí* množiny E.

(**2,4**) **Definice.** Buď F spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že F je *zobecněná absolutně spojitá funkce v užším smyslu* na $\langle a, b\rangle$, nebo krátce, že F je ACG_*, jestliže každá uzavřená množina $E \subset \langle a, b\rangle$ obsahuje porci $\Pi \subset E$ tak, že

(α) F je absolutně spojitá na Π,

(β) řada oscilací funkce F na intervalech styčných k množině Π konverguje.

Poznámka. Připojme bez důkazu tyto základní vlastnosti funkcí ACG_*: *Každá funkce ACG_* má skoro všude konečnou derivaci. Je-li F ACG_* a je-li $F'(x) = 0$ skoro všude, pak F je rovna konstantě.*

(**2,5**) **Definice D_*-integrálu.** Buď f funkce definovaná skoro všude v intervalu $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že f je *D_*-integrovatelná* na intervalu $\langle a, b\rangle$,

[1]) Definici Perronova integrálu a důkazy jeho základních vlastností je možno najít v knize [2] nebo článku [3].

jestliže existuje funkce F tak, že F je ACG_* na $\langle a, b \rangle$ a platí $F'(x) = f(x)$ pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Položíme pak

$$(D_*) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Vzhledem k poznámce v (2,4) je integrál určen jednoznačně. Poznamenejme dále, že $\int_a^b F'(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$; je tedy vztah mezi primitivní funkcí a derivací symetrický jako v případě Lebesgueova integrálu.

(2,6) Věta (Hake-Looman-Alexandrov). *Perronův integrál funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje, když a jen když existuje Denjoyův D_*-integrál. Oba integrály mají pak stejnou hodnotu.*

Důkaz: [2], kapitola VIII, § 3. Tato věta umožňuje převést studium Perronova integrálu na studium Denjoyova integrálu.

Nyní přejdeme k větám o substituci.

(2,7) Věta. *Buď f funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť existuje funkce F_1 tak, že $F_1 \in \mathrm{Lip}\ 1$ a $F_1'(x) = f(x)$ až na spočetnou množinu bodů v $\langle a, b \rangle$. Nechť φ je ACG_* na $\langle \alpha, \beta \rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Pak platí formule (S) (kde integrál na pravé straně je D_*-integrál).*

Dokážeme nejprve tuto pomocnou větu:

(2,8) Lemma. *Buď $F \in \mathrm{Lip}\ 1$ na $\langle a, b \rangle$, buď φ ACG_* na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Nechť je $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Pak složená funkce $F(\varphi)$ je ACG_* na $\langle \alpha, \beta \rangle$.*

Důkaz. Buď E uzavřená část intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Protože funkce φ je ACG_* na $\langle \alpha, \beta \rangle$, existuje porce Π množiny E tak, že φ je absolutně spojitá na Π a řada oscilací φ na intervalech styčných k Π konverguje. Protože $F \in \mathrm{Lip}\ 1$, existuje $M \geq 0$ tak, že $|F(x') - F(x'')| \leq M|x' - x''|$, kdykoli $x', x'' \in \langle a, b \rangle$; je tedy

$$\sum_{i=1}^{n} |F(\varphi(\beta_i)) - F(\varphi(\alpha_i))| \leq M \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)|\,,$$

kdykoli $\alpha_i, \beta_i \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Odtud snadno plyne, že funkce $F(\varphi)$ je absolutně spojitá na Π. Pro libovolný interval $I \subset \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$\Omega(F(\varphi); I) = \sup_{t', t'' \in I} |F(\varphi(t')) - F(\varphi(t''))| \leq M\Omega(\varphi; I)\,;$$

řada oscilací funkce $F(\varphi)$ na intervalech styčných k Π je tedy také konvergentní.

Přistoupíme k důkazu věty (2,7). Položme $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$, $a \leq x \leq b$. Je tedy $F = F_1 + c$, kde c je konstanta, takže také $F \in \mathrm{Lip}\ 1$. Podle (2,8) je $\Phi = F(\varphi)$ ACG_* na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Dokážeme, že platí $[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ skoro všude v $\langle \alpha, \beta \rangle$. Buďte $x_1, x_2, \ldots$ ty body z intervalu $\langle a, b \rangle$, pro které neplatí

$F'(x) = f(x)$. Buď $E_i = \{t \mid t \in \langle\alpha, \beta\rangle,\ \varphi(t) = x_i\}$. Protože φ je spojitá, je E_i uzavřená. Buď $E_i = S_i \cup D_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ rozklad E_i na spočetnou a dokonalou část. Buď $N = \{t \mid \varphi'(t)$ neexistuje$\}$. Pak $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \cup N$ je množina míry nula. Dokážeme, že pro $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle - Q$ je $\Phi'(t_0) = f(\varphi(t_0))\, \varphi'(t_0)$.

(A) Buď $t_0 \in D_i$ pro některé i. Podle předpokladu $\varphi'(t_0)$ existuje; platí

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in D_i}} \ldots = 0\,.$$

Jestliže $t \bar{\in} E_i$, je

$$\left|\frac{F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0))}{t - t_0}\right| = \left|\frac{F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0))}{\varphi(t) - \varphi(t_0)}\right| \cdot \left|\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\right| \leq M \left|\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\right|;$$

je-li $t \in E_i$, $t \neq t_0$, je ovšem $\left|\dfrac{F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0))}{t - t_0}\right| = 0$. Odtud plyne ihned

$$\Phi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0))}{t - t_0} = 0 = f(\varphi(t_0))\, \varphi'(t_0)\,.$$

(B) Nechť $t_0 \bar{\in} \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Pak platí $F'(\varphi(t_0)) = f(\varphi(t_0))$ a $\varphi'(t_0)$ existuje. Vztah plyne z věty o derivaci funkce složené.

Funkce $F(\varphi)$ je tedy ACG_* a skoro všude v $\langle\alpha, \beta\rangle$ platí $[F(\varphi)]' = f(\varphi)\, \varphi'$, takže $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Dále je $F \in \mathrm{Lip}\ 1$, $F'(x) = f(x)$ až na spočetnou množinu; F je tedy tím spíše absolutně spojitá, $F'(x) = f(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, takže $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, \mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Tím je věta (2,7) dokázána.

Poznámka. Předpoklady věty budou zřejmě splněny, bude-li f spojitá. Obecněji můžeme předpokládat, že f je omezená a že existuje spojitá F tak, že $F'(x) = f(x)$ s možnou výjimkou spočetně mnoha $x \in \langle a, b\rangle$. Pak je totiž F neurčitým Perronovým integrálem funkce f (viz [3], str. 129), a z omezenosti f zřejmě vyplývá $F \in \mathrm{Lip}\ 1$.

(2,9) Všimněme si nyní tvrzení, které vznikne, zaměníme-li v (1,3) Lebesgueův integrál D_*-integrálem. Dokážeme, že toto tvrzení je pravdivé; užijeme při tom postupu, kterým dokázal G. P. Tolstov obdobnou větu pro Denjoy-Chinčinův integrál (o tom viz odstavec III tohoto článku).

(2,10) Věta. *Nechť funkce F je ACG_* v intervalu $\langle a, b\rangle$. Buď φ absolutně spojitá a neklesající v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; nechť $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro všechna $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Pak funkce $F(\varphi)$ je ACG_* v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$.*

Důkaz. Funkce $F(\varphi)$ je zřejmě spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Buď P uzavřená množina, $P \subset \langle\alpha, \beta\rangle$; potom je $\varphi(P) = \{x \mid x = \varphi(t), t \in P\}$ rovněž uzavřená.

Podle předpokladu existuje porce Π množiny $\varphi(P)$ tak, že funkce F je absolutně spojitá na Π a že řada oscilací funkce F na intervalech styčných k Π konverguje. Můžeme psát $\Pi = \langle c, d\rangle \cap \varphi(P)$, při čemž $(c, d) \cap \varphi(P) \neq \emptyset$. Buď $\langle\gamma, \delta\rangle = \varphi^{-1}(\langle c, d\rangle) = \{t | c \leq \varphi(t) \leq d\}$. Zřejmě $(\gamma, \delta) \cap P \neq \emptyset$, takže $S = \langle\gamma, \delta\rangle \cap P$ je porce množiny P. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce F je absolutně spojitá na Π, existuje $\eta > 0$ tak, že platí $\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon$, kdykoli $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \ldots \leq x_n \leq y_n$, $x_i, y_i \in \Pi$, $\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \eta$. Protože funkce φ je absolutně spojitá, existuje $\delta = \delta(\eta) > 0$ tak, že ze vztahů $\alpha \leq t_1 < v_1 \leq t_2 < v_2 \leq \ldots \leq t_m < v_m \leq \beta$, $\sum_{j=1}^{m} (v_j - t_j) < \delta$ plyne $\sum_{j=1}^{m} (\varphi(v_j) - \varphi(t_j)) < \eta$. Platí-li nyní $t_1 < v_1 \leq \ldots \leq t_m < v_m$, $t_i, v_i \in S$, $\sum_{i=1}^{m} (v_i - t_i) < \delta$, platí $\varphi(t_i), \varphi(v_i) \in \Pi$, $\sum_{i=1}^{m} (\varphi(v_i) - \varphi(t_i)) < \eta$, tedy $\sum_{i=1}^{m} |F(\varphi(v_i)) - F(\varphi(t_i))| < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že funkce $F(\varphi)$ je absolutně spojitá na S.

Buď nyní (α_1, β_1) styčný interval množiny S, tedy $\alpha_1, \beta_1 \in S$, $(\alpha_1, \beta_1) \cap S = \emptyset$. Je-li $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\beta_1)$, je funkce $F(\varphi)$ konstantní v (α_1, β_1), takže $\Omega(F(\varphi); (\alpha_1, \beta_1)) = 0$. Je-li však $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\beta_1)$, pak interval $(\varphi(\alpha_1), \varphi(\beta_1))$ je styčným intervalem množiny Π a zřejmě platí $\Omega(F(\varphi); (\alpha_1, \beta_1)) = \Omega(F; (\varphi(\alpha_1), \varphi(\beta_1))$. Odtud plyne ihned, že také řada oscilací funkce $F(\varphi)$ na intervalech styčných k S konverguje. Tím je věta dokázána.

(2,11) Věta. *Buď f funkce D_*-integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Buď φ absolutně spojitá a neklesající v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; nechť $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro všechna $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Pak platí formule (S).*

Důkaz. Uveďme nejprve dvě pomocné věty; jejich důkazy a další odkazy (pro obecnější předpoklady) jsou podány v [4].

(2,12) *Nechť F je ACG_* v $\langle a, b\rangle$; nechť φ je monotonní v $\langle\alpha, \beta\rangle$ a nechť $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro všechna $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Položme $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Potom má Φ derivaci skoro všude v $\langle\alpha, \beta\rangle$ a skoro všude v $\langle\alpha, \beta\rangle$ platí*

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) \quad \textit{nebo} \quad \Phi'(t) = \varphi'(t) = 0\,.$$

(2,13) *Buď φ absolutně spojitá v intervalu I; buď $E \subset I$. Nechť platí $|\{x | x = \varphi(t), t \in E\}| = 0$. Potom je $\varphi'(t) = 0$ skoro všude na E.*

Buď nyní $F(x) = \int_a^x f(y)\, dy$. Podle (2,10) je funkce $\Phi = F(\varphi)$ ACG_* v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Buď E množina těch $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pro něž existuje vlastní $\varphi'(t) \neq 0$, ale neplatí $\Phi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$. Pro $t \in E$ tedy neplatí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$; protože však $F'(x) = f(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, má množina $\varphi(E)$ míru nula a podle (2,13) je $\varphi'(t) = 0$ skoro všude na E, takže má též množina E míru nula.

Podle (2,12) je $\Phi'(t) = 0$ skoro všude tam, kde je $\varphi'(t) = 0$; je tedy $\Phi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ pro skoro všechna t. Dostáváme tak opravdu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tím je věta (2,11) dokázána.

III. Denjoy-Chinčinův integrál

(3,1) D_*-integrál, o kterém jsme pojednávali v odstavci II, zavedl A. Denjoy v roce 1912. Ve sděleních z roku 1916 zavedli Denjoy a Chinčin další zobecnění integrálu; označme je podle [2] krátce D-integrál.

Definice D-integrálu zase vyžaduje předběžného zavedení dalších pojmů a vět. Omezíme se na velmi stručný přehled. Pro podrobný výklad viz [2]. Je-li A bodová množina a x_0 je jejím hromadným bodem, pak je možno zřejmým způsobem definovat $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \in A}} F(x)$, kde F je funkce definovaná na A. Je-li E nějaká množina reálných čísel a I interval, pak funkcí míry množiny E nazveme funkci intervalu $L_E(I) = |E \cap I|$. Existuje-li limita $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{L_E(I_n)}{|I_n|}$, kde $x \in I_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a délka I_n se blíží k nule, nazveme ji derivací funkce L_E v bodě x a označíme $L'_E(x)$; body, v nichž je $L'_E(x) = 1$, nazveme body hustoty množiny E. Zřejmě žádný isolovaný bod množiny E není jejím bodem hustoty. Řekneme, že funkce F má v bodě x asymptotickou derivaci, má-li derivaci v bodě x vzhledem k měřitelné množině E, kde x je bod hustoty množiny E[2]) (t. j. existuje $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ x \in E}} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}$ ve smyslu předchozí poznámky); označení $F'_{as}(x)$.[3])

Dříve, než přejdeme k definici D-integrálu, zavedeme ještě funkce ACG (zobecněné absolutně spojité); řekneme, že F je ACG na $\langle a, b\rangle$, jestliže splňuje podmínky z (2,4) pro funkce ACG_* s výjimkou podmínky (β), které nemusí vyhovovat; je tedy $ACG_* \subset ACG$ ve zřejmém smyslu. Pro funkce ACG platí tyto základní věty: *Každá funkce ACG má skoro všude asymptotickou derivaci; je-li asymptotická derivace funkce ACG skoro všude rovna nule, je tato funkce konstantní.* Teď je možno zavést D-integrál podobně, jako byl zaveden D_*-integrál v (2,5).

(3,2) Definice D-integrálu. Buď f funkce definovaná skoro všude v intervalu $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že f je *D-integrovatelná* na $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje funkce F tak,

---

[2]) V [2] jsou uvedeny poněkud jiné definice.

[3]) Dá se dokázat, že hodnota derivace nezávisí na volbě E.

že F je ACG na $\langle a, b\rangle$ a její asymptotická derivace se rovná $f(x)$ pro skoro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Položíme pak

$$(D) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Vzhledem ke tvrzením o funkcích ACG na konci (3,1) je číslo $F(b) - F(a)$ určeno jednoznačně.

Přejdeme k větám o substituci. Už jsme se zmínili o tom, že G. P. Tolstov dokázal pro D-integrály větu obdobnou větě (1,3) pro Lebesgueovy integrály. Vyslovme její přesné znění.

(3,3) Věta. *Je-li f D-integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, a je-li φ absolutně spojitá a neklesající na $\langle \alpha, \beta\rangle$, při čemž $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, pak platí formule* (S).

Důkaz. [4], str. 19—22.

Všimněme si teď věty (2,7); dokážeme, že je ji možno zobecnit pro případ D-integrálu.

(3,4) Věta. *Buď f funkce v $\langle a, b\rangle$. Nechť existuje funkce F_1 tak, že $F_1 \in$ Lip 1 a $F'_1(x) = f(x)$ až na spočetnou množinu bodů v $\langle a, b\rangle$. Nechť φ je ACG na $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Pak platí formule (S) (kde integrál na pravé straně je D-integrál).*

Důkaz. Základ důkazu tvoří následující elementární pomocná věta, zobecňující větu o derivaci funkce složené (všude se rozumí vlastní derivace):

(3,5) *Buď F funkce definovaná v intervalu (a, b); nechť $x_0 \in (a, b)$, $F'(x_0)$ existuje. Buď φ definována na množině E, $t_0 \in E$, $\varphi(t_0) = x_0$, t_0 buď hromadný bod množiny E, $\varphi'_E(t_0)$[4]) nechť existuje. Pak platí $[F(\varphi(t_0))]'_E = f(\varphi(t_0))\,\varphi'_E(t_0)$.*

Důkaz se provede obvyklou methodou.

Nyní je důkaz věty (3,4) analogický důkazu věty (2,7). Především se lehce dokáže, že $F(\varphi)$, kde $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$, je ACG na $\langle \alpha, \beta\rangle$. Konstruujme množiny E_i, S_i, D_i jako v důkaze (2,7). Buď $N = \{t | \varphi'_{as}(t)$ neexistuje$\}$. Pak $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \cup N$ je množina míry nula. Dokážeme, že pro skoro všechna $t_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle - Q$ je $\Phi'_{as}(t_0) = f(\varphi(t_0))\,\varphi'_{as}(t_0)$.

(A) Nechť t_0 je bodem hustoty některé množiny D_i. (To platí pro skoro všechna $t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$; každá množina D_i je totiž měřitelná a podle známé věty jsou skoro všechny její body jejími body hustoty). Podle předpokladu $\varphi'_{as}(t_0)$ existuje; je tedy

$$\varphi'_{as}(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in D_i}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \lim \frac{0}{t - t_0} = 0\,.$$

---

[4]) φ'_E značí derivaci vzhledem k množině E.

Dále postupujeme jako v (2,7).

(B) Není-li $t_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, platí $\Phi'_{as}(t_0) = f(\varphi(t_0))\, \varphi'_{as}(t_0)$ podle (3,5).

IV. Poznámky a problémy

(**4,1**) Větu (1,3) je možno odvodit z věty (2,11). (V [1] je důkaz proveden rozšiřováním integrálu na obou stranách formule (S) Rieszovou methodou.) Je-li totiž f lebesgueovsky integrovatelná, máme na levé straně formule (S) ovšem Lebesgueův integrál; napravo však také, protože $\int_a^t f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du = F(\varphi(t))$, a $F(\varphi)$ je absolutně spojitá. Podobně je možno odvodit větu (2,11) z věty (3,3).

(**4,2**) Je-li f omezená měřitelná, je $F = \int f$ v třídě Lip 1, tedy Φ, kde $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, je podle (2,8) ACG_* pro φ ACG_*. Nevím však, zda platí (2,7) také pro omezenou měřitelnou f. Bylo by zajímavé podat důkaz (2,7) přímou konstrukcí majorant.

(**4,3**) V článku [3] je dokázána řada vět o substituci pro Perronův integrál elementárně, t. j. bez předběžné znalosti theorie míry. Důkazy jsou dokonce dány pro Perron-Stieltjesův integrál. Věta v odstavci 45 na str. 291 je poněkud méně obecná, než věty (2,11), (3,3), zato je však symetrická (t. j. existuje-li levá strana v (S), rovná se pravé a obráceně). V témže odstavci je vyslovena věta obrácená k (2,11), t. j. z existence pravé strany plyne existence a rovnost levé.

(**4,4**) Ve větách (2,11) a (3,3) se vyskytuje silný předpoklad o φ: monotonie. Tento předpoklad je možno redukovat stejnou methodou, jako v [3], str. 292. V obou větách stačí předpokládat, že každý interval $\langle \gamma, \delta \rangle \subset (\alpha, \beta)$ je možno rozdělit na konečně mnoho intervalů, na kterých je φ monotonní (a absolutně spojitá). K důkazu se použije faktu, že operace, kterou se vytvářejí nevlastní integrály, nezobecňuje Denjoyovy integrály.

LITERATURA

[1] *F. Riesz, B. Sz.-Nagy:* Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest 1952.

[2] *S. Saks:* Theory of the Integral, Warszawa 1937.

[3] *J. Mařík:* Základy theorie integrálu v euklidových prostorech. Časopis pro pěstování matematiky *77* (1952), str. 1—51, 125—145, 267—301.

[4] *Г. П. Толстов:* О криволинейном и повторном интеграле. Труды мат. инст. В. А. Стеклова, *XXXV*, М—Л 1950.

Резюме

ТЕОРЕМА О ПОДСТАНОВКЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ДАНЖУА

КАРЕЛ КАРТАК (Karel Karták), Прага.

(Поступило в редакцию 27/X 1955 г.)

В работе доказана формула (S) при различных предположениях об интеграле и функциях f, φ. Терминология и обозначения взяты из книги [2].

(2,7) *Пусть f — ограниченная функция в $\langle a, b\rangle$. Пусть существует непрерывная функция F_1 такая, что $F_1'(x) = f(x)$ за исключением счетного множества $x \in \langle a, b\rangle$. Пусть φ ACG_* в $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ для всех $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда справедлива формула (S).*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму:

(2,8) *Пусть $F \in \mathrm{Lip}\ 1$ в $\langle a, b\rangle$, пусть φ ACG_* в $\langle \alpha, \beta\rangle$. Пусть $a \leq \varphi(t) \leq b$ для всякого $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда $F(\varphi)$ ACG_* в $\langle \alpha, \beta\rangle$.*

Не трудно обобщить (2,7) для случая интеграла Данжуа-Хинчина [теорема (3,4)]. Я не знаю, имеют ли эти теоремы место также для ограниченной измеримой функции f.

В предыдущем утверждении ,,общей'' являлась та функция, по которой проводилась подстановка. Обобщения известной теоремы о подстановке для случая суммируемой функции f и неубывающей φ даны в теоремах (2,11), (3,3).

(2,11) *Пусть f — D_*-интегрируема в $\langle a, b\rangle$; пусть φ — абсолютно непрерывная и неубывающая функция в $\langle \alpha, \beta\rangle$; пусть $\alpha \leq \varphi(t) \leq b$ для всех $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда имеет место (S).*

Если мы здесь напишем ,,D-интегрируема'' вместо ,,D_*-интегрируема'', получаем теорему (3,3), которая доказана в [4] Г. П. Толстовым.

Если мы воспользуемся известной теоремой о равносильности интегралов Перрона и Данжуа, и теоремой о подстановке, доказанной в [3], стр. 292, то можем высказать следующую теорему:

Теорема. *Пусть f — функция, определенная в $\langle a, b\rangle$. Пусть φ — непрерывная функция в $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ для всех $t \in \langle \alpha, b\rangle$. Пусть всякий интервал $\langle \gamma, \delta\rangle \subset (\alpha, \beta)$ можно разделить на конечное множество таких интервалов, что на каждом из них функция φ монотонна и абсолютно непрерывна. Тогда имеет место (S) (речь идет об интегралах Перрона) в том случае, если или $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ или $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ существует.*

Zusammenfassung

DER SATZ ÜBER DIE SUBSTITUTION IN DENJOY-INTEGRALEN

KAREL KARTÁK, Praha.

(Eingelangt 27. Oktober 1955.)

In diesem Artikel wurde die Gültigkeit der Formel (S) unter verschiedenen Voraussetzungen über das Integral und die Funktionen f, φ bewiesen.

(2,7) *Es sei f eine beschränkte Funktion in $\langle a, b\rangle$. Es soll eine stetige Funktion F so existieren, dass mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen $x \in \langle a, b\rangle$ $F'(x) = f(x)$ ist. φ sei ACG_* in $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Dann gilt die Formel (S).*

Dem Beweis dieses Satzes liegt folgendes Lemma zugrunde:

(2,8) *Es seien folgende Bedingungen erfüllt: $F \in \mathrm{Lip}\ 1$ in $\langle a, b\rangle$, φ ACG_* auf $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Dann ist die Funktion $F(\varphi)$ ACG_* in $\langle \alpha, \beta\rangle$.*

Es ist nicht schwer, (2,7) für den Fall des Denjoy-Integrals im weiteren Sinne [Satz (3,4)] zu verallgemeinern. Es ist mir nicht bekannt, ob diese Sätze auch für jede beschränkte messbare Funktion f gültig sind.

In diesen Behauptungen war die Funktion „allgemein", nach der substituiert wurde. Die Verallgemeinerungen des bekannten Satzes über die Substitution für Lebesgue-integrable f und monotone φ [Satz (1,3)] sind in den Sätzen (2,11), (3,3) enthalten.

(2,11) *Es sei: f Denjoy-integrabel im engeren Sinne in $\langle a, b\rangle$; φ totalstetig und nicht fallend in $\langle \alpha, \beta\rangle$; $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Dann gilt (S).*

Wenn wir in (2,11) „im weiteren Sinne" anstatt „im engeren Sinne" schreiben, bekommen wir den Satz (3,3), der in [4] von G. P. TOLSTOV bewiesen wurde.

Wenn wir weiter den bekannten Satz von Hake-Looman-Alexandrov über die Äquivalenz des Perron- und Denjoy-Perron Integrals, und den Satz über die Substitution, der in [3], Seite 292 bewiesen ist, benutzen, können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz. *Es sei f eine Funktion, die in $\langle a, b\rangle$ definiert ist. Es sei φ stetig in $\langle \alpha, \beta\rangle$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ für alle $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$; es seien alle Intervalle $\langle \gamma, \delta\rangle \subset (\alpha, \beta)$ in endlich viele solche Intervalle teilbar, dass auf jedem φ monoton und totalstetig ist. Dann gilt (S) (es handelt sich um ein Perron-Integral), immer dann, wenn entweder $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$ oder $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ existiert.*