Václav Doležal

Matematická problematika theorie elektrických obvodů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 4, 475--476

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117216`

VIII. *Existuje aspoň jedna množina z $n + 1$ lineárně nezávislých bodů, ale každých m bodů při $m > n + 1$ je lineárně závislých.*

Mějme naopak množinu nějakých objektů, které budeme nazývat lineárními podprostory dimense $0, 1, \ldots, n$ a označovat $S_0, S_0', \ldots, S_1, S_1', \ldots, S_n$. Mezi těmito lineárními podprostory mějme definován jakýsi vztah $S_p \subset S_q$ (S_p je částí S_q, S_q obsahuje S_p). Lineární podprostory dimense 0 budeme nazývat body. $k + 1$ bodů nazveme lineárně závislými, jestliže existuje lineární podprostor dimense $q < k$, který je všechny obsahuje. Nechť jsou splněny vlastnosti I—VIII. Budiž S množina všech bodů $S_0, S_0', \ldots$ Pak v případě $n > 2$ lze sestrojit takové těleso T, že S je pravostranným n-rozměrným projektivním prostorem nad T, při čemž ke každému k-rozměrnému lineárnímu podprostoru tohoto prostoru existuje takové S_k, že tento podprostor je právě množina těch bodů X, pro které $X \subset S_k$. Pro $n = 2$ takové těleso obecně neexistuje, nýbrž existuje právě tehdy, jestliže mezi objekty $S_0, S_0', \ldots, S_1, S_1', \ldots, S_n$ je splněna známá Desarguesova věta.

Miloslav Jůza, Bratislava.

MATEMATICKÁ PROBLEMATIKA THEORIE ELEKTRICKÝCH OBVODŮ

(Referát o přednášce VÁCLAVA DOLEŽALA, přednesené v Matematické obci pražské dne 16. dubna 1956.)

V přednášce jsem se pokusil ilustrovat povahu problémů v theorii lineárních elektrických obvodů se soustředěnými parametry na příkladě synthesy $2n$-pólu.

Pod pojmem $2n$-pól rozumí se v elektrotechnice jistý útvar, kterému je možno jednoznačně přiřaditi charakteristickou matici, která vystihuje jeho fysikální vlastnosti a která je maticí semipositivní. Pod synthesou rozumíme pak sestrojení takového $2n$-pólu, jehož charakteristická matice je rovna předepsané matici.

Označme Γ množinu všech komplexních čísel λ, pro něž $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\overline{\Gamma}$ pak její uzávěr.

Semipositivní matici zavedeme definicí:

Řekneme, že čtvercová matice $\|w_{st}\|$ n-tého řádu je semipositivní maticí, jestliže:

1. její prvky jsou racionálními funkcemi proměnné λ, které jsou reálné pro λ reálné,

2. $w_{st} = w_{ts}$ pro všechna $s, t \leqq n$,

3. pro každý systém reálných čísel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a pro každé $\lambda \in \Gamma$, které není pólem žádné w_{st}, je splněna nerovnost

$$\operatorname{Re} \sum_{s,t} w_{st} x_s x_t \geqq 0 .$$

Je-li nadto splněna nerovnost $\|\operatorname{Re} w_{st}(i\omega)\| \equiv 0$ (ω reálné), nazveme $\|w_{st}\|$ reaktanční maticí. Pak platí tyto věty:

Věta 1. *Buď $\|w_{st}\|$ semipositivní matice n-tého řádu; nechť žádná z funkcí w_{st} nemá na množině $\overline{\Gamma} - \Gamma$ póly jinde než v bodech $0, \infty, i\omega_r, -i\omega_r$ ($\omega_r > 0$; $r = 1, 2, \ldots, m$). Potom je*

$$\|w_{st}\| = \frac{1}{\lambda} H^{(0)} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_r^2} H^{(r)} + \lambda H^{(\infty)} + \|z_{st}\| ,$$

kde $H^{(0)}, H^{(r)}, H^{(\infty)}$ jsou číselné matice positivně semidefinitních kvadratických forem, při čemž $\|z_{st}\|$ je semipositivní matice, jejíž prvky nemají pólů v $\overline{\Gamma}$.

Věta 2. *Buď $\|w_{st}\|$ semipositivní matice n-tého řádu, jejíž žádný prvek nemá pólů na imaginární ose a v ∞, a pro niž matice $\|\operatorname{Re} w_{st}(i\omega)\|$ má hodnost 1.*

Pak existuje reaktanční matice $\|u_{st}\|$ *řádu* $n+1$ *tak, že platí*

$$w_{st} = u_{st} - \frac{u_{s,n+1}\, u_{t,n+1}}{1 + u_{n+1,n+1}}, \quad s, t = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Věta 3. Buď $\|w_{st}\|$ *semipositivní matice n-tého řádu té vlastnosti, že žádné* w_{st} *nemá pólů na imaginární ose a v* ∞. *Pak existují semipositivní matice* $\|w_{st}^{(p)}\|$, $p = 1, 2, \ldots, k \leqq n$ *tak, že* $\|\mathrm{Re}\, w_{st}^{(p)}(i\omega)\|$ *má hodnost* 1 *a* $\|w_{st}\| = \sum_{p=1}^{k} \|w_{st}^{(p)}\|$.

Závěrem přednášky jsem naznačil, kterak je možno pomocí vět 1, 2, 3 uskutečnit Oonovu synthesu $2n$-pólu na základě pojmů paralelního spojení konečného počtu $2n$-pólů a redukce $2(n + 1)$-pólu na $2n$-pól.

Václav Doležal, Praha.

GREENOVA VĚTA

(Referát o přednášce doc. dr Jana Maříka, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 26. března 1956.)

Přednášející vyložil hlavní výsledky článku o Greenově větě, který připravují do tisku J. Král a J. Mařík. Úkolem onoho článku je ukázat souvislost křivkového integrálu s dvojným integrálem, která se obvykle (za určitých předpokladů o funkcích P, Q a o křivce K) vyjadřuje formulí

$$\int_K P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,;$$

K bývá zpravidla Jordanova křivka a G její vnitřek.

Budiž f až do konce pevně daná komplexní spojitá funkce s konečnou variací v intervalu $\langle a, b\rangle$. (Tím je míněno, že $f = f_1 + if_2$, kde f_1, f_2 jsou reálné funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$.) Buď E_2 množina všech (konečných) komplexních čísel; položme $K = f(\langle a, b\rangle)$.[1])

Je-li g komplexní spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, klademe

$$\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f(t) = \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f_1(t) + i \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}f_2(t)\,.$$

Dá se ukázat, že pro všechna $z \in E_2 - K$ jest

$$\exp\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t) - z}\right) = \frac{f(b) - z}{f(a) - z}\,.^{2)} \tag{1}$$

[1]) Tedy naše „křivka" K má sice konečnou délku, ale jinak se může mnohonásobně protínat, může být mnohonásobně probíhanou úsečkou nebo bodem. Nelze proto mluvit o nějakém jejím vnitřku, nýbrž jenom o komponentách množiny $E_2 - K$.

[2]) Tedy i pro naši „křivku" K lze zachránit známou formuli $\int_K \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv \mathrm{Log}\,(\zeta(b) - z) - \mathrm{Log}\,(\zeta(a) - z) \pmod{2\pi i}$.