Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Driml

# Znáhodněná analysa

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 81 (1956), No. 4, 471--473

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117214`

# REFERÁTY

## ZNÁHODNĚNÁ ANALYSA

(Referát o přednášce dr ANTONÍNA ŠPAČKA konané v matematické obci pražské dne 16. ledna 1956.)

Přednášející promluvil o možnosti „znáhodnění" některých pojmů matematické analysy.

Nechť $X$ a $Y$ jsou neprázdné množiny a nechť $F$ je množina všech zobrazení $X$ do $Y$. Budiž dána transformace $V$ systému podmnožin množiny $X$ do systému podmnožin množiny $F$. Je-li $f \in V(A)$, říkáme, že zobrazení $f$ má vlastnost $(V)$ na množině $A$.

Uvedeme příklad. Za $X$ i $Y$ zvolíme množinu reálných čísel. Je zřejmé, že příkladem transformace $V$ je zobrazení, při němž obrazem množiny $A \subset X$ je množina všech reálných funkcí spojitých na množině $A$.

Ve funkcionální analyse nás zajímají velmi často zobrazení, která mají vlastnost $(V)$ na celé množině $X$ (na př. aditivita a spojitost u lineárních funkcionálů). Většina vlastností, kterými se zabýváme, splňuje tyto dvě podmínky: 1. vlastnost $(V)$ je dědičná, t. j. je-li $A \subset B \subset X$, je $V(B) \subset V(A)$; 2. vlastnost $(V)$ je rozšiřitelná vzhledem k vhodně zvolenému systému $\mathfrak{D}$ podmnožin množiny $X$ na celý prostor $X$. Tak na př. je-li $D$ libovolná spočetná množina na přímce a je-li $f \in F$ funkce stejnoměrně spojitá na $D$, pak existuje $g \in F$ taková, že $g(x) = f(x)$ pro všechna $x \in D$ a $g$ je stejnoměrně spojitá na $X$.

Je jistě účelné uvažovat o znáhodnění pojmů funkcionální analysy. Snadno zavedeme náhodné transformace $T$ jako zobrazení kartézského součinu $\Omega \times X$ do množiny $Y$. Předpokládejme, že je dána $\sigma$-algebra $\mathfrak{B}$ podmnožin množiny $Y$. Budiž $\mathfrak{S}$ minimální $\sigma$-algebra podmnožin množiny $\Omega$, vzhledem k níž je transformace $T(\cdot, x)$ měřitelná pro každé pevné $x \in X$. Budiž dále na $\sigma$-algebře $\mathfrak{S}$ dána pravděpodobnostní míra $\mu$. Poznamenejme ještě, že za $\sigma$-algebru $\mathfrak{B}$ se volívá $\sigma$-algebra borelovských množin na $Y$, je-li $Y$ alespoň topologický prostor.

V poslední době se theorie pravděpodobnosti velmi často zabývá otázkami tohoto druhu: Lze stochastický proces určitého typu realisovat v prostoru funkcí s danou vlastností? Je proto přirozené položit si také v našich úvahách otázku, za jakých předpokladů lze náhodnou transformaci $T$ (což není ostatně nic jiného než určité zobecnění pojmu stochastického procesu) realisovat v prostoru zobrazení $T(\omega, \cdot)$ s vlastností $(V)$. Jak dokázal DOOB ve známé větě (viz [1]), lze to provést tehdy a jen tehdy, je-li

$$\bar{\mu}\{\omega : T(\omega, \cdot) \in V(X)\} = 1\,,$$

kde $\bar{\mu}$ značí vnější míru indukovanou mírou $\mu$. Ovšem ověření této podmínky bývá někdy velmi obtížné. Přednášející dokázal v práci [2] větu, která to v mnoha případech usnadňuje, když náhodná transformace $T$ je $V$-regulární. Vysvětlíme nejprve, co nazýváme $V$-regulární náhodnou transformací.

Budiž $\mathfrak{D}$ neprázdný systém podmnožin množiny $X$, který splňuje tyto dvě podmínky: $\bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D = X$; je-li $D_i \in \mathfrak{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, existuje $D_0 \in \mathfrak{D}$ tak, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset D_0$.

Řekneme, že náhodná transformace $T$ je $V$-regulární, splňuje-li tyto podmínky:

je-li $A \subset B \subset X$, je

$$\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(B)\} \subset \{\omega\colon T(\omega, .) \in V(A)\}\,; \tag{1}$$

je-li $D \in \mathfrak{D}$, je

$$\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(D)\} \in \mathfrak{S}\,; \tag{2}$$

je-li $D \in \mathfrak{D}$, $\omega_0 \in \{\omega\colon T(\omega, .) \in V(D)\}$, je

$$\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(X)\} \cap \bigcap_{x \in D} \{\omega\colon T(\omega, x) = T(\omega_0, x)\} \neq 0\,. \tag{3}$$

(1) je zřejmě obdobou dědičnosti vlastnosti $(V)$ a (3) obdobou její rozšiřitelnosti vzhledem k systému $\mathfrak{D}$.

Věta 1 v práci [2] zní pak takto:

*Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby $\bar{\mu}\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(X)\} = 1$ pro $V$-regulární náhodnou transformaci $T$, je, aby pro každé $D \in \mathfrak{D}$ bylo $\mu\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(D)\} = 1$.*

V práci [2] je tato věta aplikována na případ stejnoměrně spojitých funkcí, funkcí splňujících Lipschitzovu podmínku a aditivních funkcí na Booleových $\sigma$-algebrách.

Ukazuje se však, že ani ověření podmínek námi uvedené věty není mnohdy nikterak snadné. Kromě toho se vyskytuje i řada jiných otázek týkajících se náhodných transformací, jako otázka měřitelnosti množiny $\{\omega\colon T(\omega, .) \in V(X)\}$ a jiné. Bylo dosaženo celé řady výsledků, které jsou obsaženy v pracích [3] až [9]. V přednášce jsme slyšeli jen o některých z nich. Zmíníme se o těch, které nebyly dosud uveřejněny.

Práce [5] řeší otázku, kdy je náhodné zobrazení separabilního prostoru typu $G$ do sebe realisovatelné v prostoru lineárních zobrazení a otázku inverse náhodné lineární transformace.

Práce [6] zavádí pojem náhodné množinové funkce, zabývá se otázkou jejich realisovatelnosti v prostoru množinových funkcí absolutně spojitých vzhledem k dané množinové funkci a obsahuje „znáhodněnou" Radon-Nikodymovu větu.

V práci [7] byl zaveden pojem náhodné Schwartzovy distribuce a dokázána nutná a postačující podmínka její existence.

Konečně práce [8] a [9] obsahují některé tvary silného zákona velkých čísel pro zobecněné náhodné proměnné (měřitelná zobrazení $\Omega$ do Banachova prostoru $Y$); je jich využito ke studiu zobecněných stochastických aproximací.

Na řešení otázek tohoto druhu se i dále pracuje. V seznamu literatury jsou pod čísly [10] až [15] uvedeny práce, které spadají sice do téže oblasti problémů, ale vznikly později.

## Literatura


[1] *J. L. Doob*: Probability in function-space. Bull. Amer. Math. Soc., vol. *53* (1947), str. 15—30.

[2] *A. Špaček*: Regularity properties of random transforms. Czechoslovak Math. J. *5* (1955), str. 143—151.

[3] *A. Špaček*: Zufällige Gleichungen. Czechoslovak Math. J. *5* (1955), str. 462—466.

[4] *A. Špaček*: Note on K. Menger's probabilistic geometry. Czechoslovak Math. J. *6* (1956), str. 72—74.

[5] *A. Špaček*: Sur l'inversion des transformations aléatoires presque sûrement linéaires. Vyjde v Acta Math.

[6] *A. Špaček*: Zufällige Mengenfunktionen. Vyjde v Math. Nachrichten.

[7] *K. Winkelbauer*: К теории обобщенных случайных процессов. Vyjde v Czechoslovak Math. J.

[8] *O. Hanš*: The strong law of large numbers for generalized random variables. Bull. Acad. Polonaise Sci. Vol. IV, str. 15—17.

[9] *O. Hanš*: Zobecněné náhodné veličiny a náhodné transformace. Kandidátská disertační práce.

[10] *A. Špaček*: Prolongement des transformations aléatoires. Připraveno k publikaci.

[11] *O. Hanš*: Reduzierende zufällige Transformationen. Vyjde v Czechoslovak Math. J.

[12] *O. Hanš*: Inverse and adjoint transforms of random linear transforms. Připraveno k publikaci.

[13] *O. Hanš*: O vlastnostech náhodných transformací. Písemná práce pro kandidátské zkoušky.

[14] *M. Ullrich*: Theorie náhodných distribucí. Připravovaná kandidátská disertační práce.

[15] *M. Driml*: Distribuční a charakteristické funkcionály pro zobecněné náhodné proměnné. Připravovaná kandidátská disertační práce.

*Miloslav Driml*, Praha.

## LINEÁRNÍ ALGEBRA A PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

(Referát MILOSLAVA JŮZY přednesený v matematické obci pražské dne 12. března 1956.)

Obsahem referátu byla 5. a 6. kapitola knihy HODGE-PEDOE: *Methods of Algebraic Geometry*, pojednávající o vztahu algebraické a synthetické definice projektivního prostoru.

Budiž $T$ těleso, ne nutně komutativní. Uspořádanou množinu $n + 1$ prvků $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tělesa $T$ takovou, že nejsou všechna $a_i$ rovna nule, nazveme aritmetickým bodem $n$-rozměrného číselného projektivního prostoru nad $T$. Dva aritmetické body $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_n)$ nazveme ekvivalentní zprava, jestliže existuje $\lambda \in T$ tak, že $a_i = b_i\lambda$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. Každou třídu sobě ekvivalentních aritmetických bodů nazveme bodem pravostranného $n$-rozměrného číselného projektivního prostoru nad $T$, množinu všech takových bodů pravostranným $n$-rozměrným číselným projektivním prostorem nad $T$. Podobně definujeme levostranný $n$-rozměrný číselný projektivní prostor nad $T$.

Budiž $(a_{ij})$ regulární matice $n$-tého stupně nad $T$. Budiž $\pi$ zobrazení, které aritmetickému bodu $(x_0, \ldots, x_n)$ přiřazuje aritmetický bod $(y_0, \ldots, y_n)$, při čemž $y_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j$ pro $i = 0, \ldots, n$. Snadno zjistíme, že obrazy bodů ekvivalentních zprava jsou opět body ekvivalentní zprava a že je to prosté zobrazení pravostranného projektivního prostoru na sebe. Zobrazení $\pi$ nazýváme projektivní transformací tohoto prostoru.

Budiž $S$ množina a mějme dáno prosté zobrazení množiny $S$ na pravostranný $n$-rozměrný číselný projektivní prostor nad $T$. Pak množinu $S$ nazveme pravostranným $n$-roz-