RECENSE

M. K. Grebenča a *S. I. Novoselov*: **Učebnice matematické analysy I, II.** Z ruského originálu přeložili I. díl dr *Alois Apfelbeck, Miroslav Křížek,* dr *Miloš Lánský*; II. díl — kromě uvedených dr *Alfons Bašta.* Vydalo nakladatelství ČSAV, sekce matematicko-fysikální, Praha 1955. Stran 636 + 656, obrázků 359 + 309, cena I. dílu Kčs 72,—, II. dílu Kčs 54,40.

Asi před šesti lety se na našem knižním trhu objevilo 1. vydání dvousvazkové učebnice „Kurs matematičeskogo analiza" sovětských autorů Grebenči a Novoselova. Ačkoliv je tato učebnice určena především pro budoucí učitele matematiky, studenty fakult matematicko-fysikálních, stala se záhy vyhledávanou učební pomůckou i na našich technikách, které dodnes nemají vhodné učebnice matematiky. To byl pravděpodobně také jeden z důvodů, proč se nakladatelství ČSAV rozhodlo vydat překlad zmíněné učebnice. Rozhodnutí to bylo jistě správné, neboť toto dílo si zaslouží plné pozornosti po všech stránkách.

Vzhledem k tomu, že ruské vydání bylo u nás již velmi obšírně recensováno Doc. dr *L. Riegrem* (Časopis Sovětská věda — Matematika—Fysika—Astronomie 1953, č. 6), nebudu zde podrobně probírat obsah učebnice kapitolu za kapitolou a odkazuji v tomto směru na vyčerpávající recensi Riegrovu. Pro přehled jen uvádím, že I. díl obsahuje základy diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné, včetně počátků theorie nevlastních integrálů. Do tohoto dílu však nebyly zařazeny řady, které čtenář najde až ve druhém dílu, ačkoliv by svou elementárností a způsobem výkladu daleko lépe zapadly do látky I. dílu. Druhý díl obsahuje kromě zmíněných již řad (číselných i funkčních, včetně elementů řad Fourierových) základy diferenciálního a integrálního počtu funkcí více proměnných, integrály s parametrem, nevlastní integrály vícerozměrné a končí vhodným dodatkem, v němž jsou vyloženy základní pojmy z theorie topologických a metrických prostorů.

Výběrem látky a způsobem výkladu splňuje toto dvousvazkové dílo v nejhojnější míře požadavky kladené na dobrou učebnici matematiky a může být vzorem vysokoškolské učebnice. Pojmy jsou přesně definovány, výklady jasné, věcně správné a přitom názorné, čemuž značně napomáhá značný počet obrázků. Důkazy vět jsou při rozumné stručnosti dobře srozumitelné. Autoři velmi správně dovedli vystihnout, kdy příliš obecné předpoklady vět by důkazy zbytečně zkomplikovaly, při čemž zisk by byl pramalý. Nevyslovují tudíž všechny věty v plné obecnosti, nýbrž za předpokladů více omezujících. Zato věnují velkou péči výběru příkladů, na nichž ukazují, jaký význam mají předpoklady vět a co se může stát, jestliže není některý předpoklad splněn. Nezapomínají ani na výcvik v početní technice, takže v této učebnici najdeme i samostatné paragrafy sledující výhradně tento cíl. Ve srovnání s našimi učebnicemi akademika *V. Jarníka*, jimž se učebnice Grebenči a Novoselova přibližuje způsobem výkladu a přesností, má tato učebnice přednost v důsledné geometrisaci, což čtenáři značně usnadňuje pochopení veškeré látky. (Naši studenti budou mít při studiu prvních paragrafů učebnice určitou malou nevýhodu v tom, že se zde od začátku předpokládá jistá znalost funkcí cyklometrických, které se na našich jedenáctiletkách neprobírají.)

Všimněme si nyní toho, jakým způsobem se překladatelé zhostili svého úkolu, v čem dílo autorů zlepšili i jakých chyb se při překladu dopustili a jak by bylo možno příští vydání, kterého se tato výborná učebnice i v českém překladu jistě dočká, ještě lépe upravit.

To, v čem se český překlad od ruského originálu hlavně liší, najdeme až na konci každého z obou svazků. Jsou to vzorně vypracované rejstříky, které ruské vydání neobsahuje. Za tuto ohromnou maličkost je třeba překladatele v první řadě pochválit. Dále je nutno ocenit také snahu všech překladatelů, aby vlivem překladu neutrpěla jasnost, srozumitelnost a přesnost výkladu autorů. Na četných místech těžili z připomínek uvedených v Riegrově recensi a zpřesnili formulaci originálu. (Tak na př. v I. dílu na str. 57 při výkladu o vlastnostech periodické funkce zdůraznili, že množinu $\mathfrak{M}_k$ obdržíme z množiny $\mathfrak{M}_0$ rovnoběžným posunutím každého bodu $x \in \mathfrak{M}_0$ do bodu $x + kl$, což v originále chybí. Na str. 540 doplnili předpoklad, že funkce $\varphi(x)$ musí být integrace schopná v daném intervalu. Na str. 550 opravili špatný závěr o diskriminantu kvadratického trojčlenu. Odstranili chyby ve výpočtech neurčitých integrálů na př. na str. 457, 471 a mnoho jiných nedopatření.) Některé chyby originálu však překladatelům unikly a je třeba, aby si je čtenáři opravili. Tak na str. 65 nedostaneme zavedením nového parametru substitucí $\tau = \operatorname{tg} t$ výsledek v knize uvedený. Proto také nesouhlasí text s obrázkem 61. Na str. 142 dole mají být neostré nerovnosti. Na str. 180 je nedůslednost v označení (ve větě se mluví o bodech x', x'', v důkaze pak o bodech x_1, x_2). V důkaze l'Hospitalova pravidla je v originále několik chyb, z nichž jen některé překladatelé odstranili. Zůstala tam ještě na str. 362 (asi v polovině stránky) chyba: Místo limity podílu derivací má být správně limita podílu funkčních hodnot. Na konci téže stránky má být obrácená nerovnost.

Nepřesnosti, jichž se dopustili sami překladatelé a které se v originále nevyskytují, uvedu přehledně v závěru společně s tiskovými chybami. Na tomto místě snad postačí zmínka, že převážná většina těchto nedopatření se nahromadila v I. dílu, kdežto druhý díl jich obsahuje jen nepatrný počet. Pravděpodobný důvod spočívá asi v tom, že korektury I. dílu dostali překladatelé v době, kdy pracovali na II. dílu. To je ovšem pouze vysvětlení, které nemůže být dostatečnou omluvou. I když těchto nedopatření vzhledem k rozsahu obou svazků není přemrštěně mnoho, jsou přece jen nepříjemné. Vždyť přece stačilo držet se přesně znění originálu! Mám tu na mysli zejména hrubou chybu na str. 107, kde na 1. řádku shora místo „Neexistuje-li ani jedna z jednostranných limit“ má být správně „... aspoň jedna ...“. Podobně na str. 125 má konec věty X. správně znít „... není-li limita jmenovatele rovna nule“ místo nesprávného „není-li jmenovatel roven nule“. Takové chyby se v překladu druhého dílu nevyskytují a jistě bylo možné se jich i v prvním dílu vyvarovat. Recensentovi zůstává také záhadou, proč v četných důkazech překladatel skoro důsledně uvádí: Označíme-li δ (nebo zvolíme-li za δ) menší z čísel $\delta_1, \delta_2, \ldots$, když v originálu je daleko přesnější „nejmenší z čísel ...“. Přesně vzato není přece vždycky možné zvolit ze dvou v úvahu přicházejících čísel menší (jsou-li si obě taková čísla rovna). Tady je originál úzkostlivě přesný (u nás se v takových případech mluvívá o Jarníkovské přesnosti), což nelze říci o překladu. (Str. 107, 108, 156, 191 a na mnoha jiných místech v I. i ve II. dílu.) Snad bylo možno všude užít obvyklého symbolu $\min(\delta_1, \delta_2)$ tak, jak to učinil překladatel na str. 65 a 67 v I. dílu. (Má to tady ovšem tu nevýhodu, že tento symbol není nikde v celé knize definován. To však by asi tolik nevadilo, protože naši čtenáři tento symbol většinou znají a mimo to by bylo lehké to spravit stručnou poznámkou pod čarou.)

Jak už bylo řečeno, je velkou předností učebnice důsledná geometrisace. Veškeré výklady jsou pak velmi názorné, k čemuž přispívá i velký počet obrázků. Ty jsou v překladu provedeny a vytištěny ještě mnohem lépe než v ruském originálu. (Jistý nedostatek vykazují jenom obr. č. 41 a 42 na str. 51, které mají znázorňovat graf funkce rostoucí, resp. klesající, kdežto na obrázcích má začátek grafu charakter — i když velmi mírně — přece jen právě opačný.) Snad by bylo možno vytknout jedině to, že z celkového počtu obrázků jsou mnohé obrázky velmi titěrné (stejně jako v originále) a bylo by knize jenom na prospěch, kdyby v příštím vydání byly trochu zvětšeny.

Tisk i úprava obou svazků jsou velmi dobré. A přece ani tady si nemohu odpustit dvě poznámky.

1. Na několika místech (na př. na str. 55 dole) zřejmě pro úsporu místa byly některé nerovnosti nebo rovnice vsazeny přímo do textu na rozdíl od originálu, kde jsou vysázeny na zvláštním řádku, aby z textu více vynikly. Toto zhuštění matematického textu není právě pro čtenáře výhodné. Uvědomíme-li si však, že i při takovýchto úpravách má český překlad mnohem více stran než ruský originál (I. díl 636 místo 544, II. díl 656 místo 560), je nápadné, že ruské knihy jsou štíhlejší. Nebylo by vhodné tisknout také naše matematické knihy na podobném formátu?

2. V našich matematických knihách se už skoro důsledně tisknou věty a definice odlišným způsobem od ostatního textu. S tím je nutno jistě bezvýhradně souhlasit. Otázkou však zůstává, zda je právě vhodné sázet věty a definice kursivou, když stejné písmo je reservováno pro matematické značky. Nahromadí-li se pak v takové větě či definici několik nešťastných písmenek *a*, trpí tím značně při prvním čtení srozumitelnost. (V ruském textu tato nesnáz odpadá, protože v tomto případě ke kolisi azbuky s latinkou nemůže prakticky dojít.) Vysvětlení, že písmenko *a* značící bod se v sazbě odliší od spojky a jednoduše tak, že se udělá větší mezera, rozhodně nemůže postačit, zvláště když tento způsob není důsledně uplatňován. (Viz na př. definice a věty na str. 91, 141, 154, 159, 168, 176, 178 v I. dílu — a samozřejmě na mnoha jiných místech jak v I. tak i ve II. dílu.) Snad by bylo možné tisknout definice i věty stejně jako ostatní text (antikvou) a připojit po straně tučnou čáru nebo celou větu či definici zarámečkovat. Spolu s tučným označením **Věta,** resp. **Definice** by to k odlišení od ostatního textu stačilo.

Konečně je možno připomenout, že se překladatelé při své práci drželi důsledně terminologie a označení u nás obvyklých, i když jsou někdy odlišné od znění originálu. Lze tu snad jenom namítnout, že u nás se zpravidla mluví o funkcích goniometrických (místo trigonometrických). Mimo to v I. dílu na str. 46 je v překladu termín „aritmetická hodnota" místo u nás obvyklého „absolutní hodnota". V obou dílech upozornili překladatelé na práce *B. Bolzana* alespoň tím, že na příslušných místech užívají názvů Bolzano-Cauchyovo kriterium, Bolzano-Cauchyova podmínka a pod. (V originále je jen Cauchy.) Na několika místech museli překladatelé hledat nový termín, který by dobře vyjádřil smysl ruského textu. To se jim vcelku podařilo. V definici složené funkce (I. díl, str. 30) nenalezli vhodný termín pro pojem „proměžutočnyj argument" a tak z definice tuto nepatrnou část vypustili. Před stejným problémem se však octli znovu na str. 37, kde pak užili docela vhodného názvu „pomocná proměnná". V horší situaci však byli na str. 152 (konec paragrafu 29), kde se nedokázali přesně vypořádat s ruským textem. Požadavek, aby každý následující interval ležel celý uvnitř předcházejícího, nevyjadřuje totéž co následující nerovnosti! Snad by bylo možné upravit zde český text asi takto: „... aby pro každé dva po sobě jdoucí intervaly platily ostré nerovnosti". (V ruském textu je užito slova „strogo".) Špatně je přeložen text na str. 205 (2. řádek zdola): „Uvedená definice pojmu křivky ..." (nikde v této učebnici dosud nebyla křivka definována!). Správně: „Původně byla definice pojmu křivky ...". Konečně ještě na str. 167 je text za nerovností (1) špatně srozumitelný, stačí tu však trochu pozměnit slovosled: „... nerovnost (1) pro funkce spojité v bodě *a* je splněna i v bodě *a* ...". Jinak lze po jazykové stránce vytknout překladu jenom to, že je v něm občas užito v příkladech zbytečně infinitivu pro rozkazovací tvary. (Dokázat, že platí ... místo lepšího a správnějšího: Dokažte, že platí ...)

Na první pohled se snad může zdát, že je v této recensi příliš mnoho výtek. Přesto si však troufám tvrdit, že překlad je vcelku zdařilý. Je třeba si uvědomit, že celá učebnice má skoro 1300 stran a že výtky jsou většinou drobného rázu a byly zde uvedeny jen proto, aby příští vydání bylo ještě lepší. Tato výborná učebnice, jakou učebnice Grebenči a Novoselova nesporně je, si zaslouží, aby byla stále zlepšována. Je však možno i toto první vydání učebnice vřele doporučit pozornosti našich studentů a poděkovat nakladatelství ČSAV za to, že překlad vydalo.

Končím přáním, aby si způsobu výkladu povšimli i autoři celostátní učebnice matematiky pro techniky, která se připravuje.

Na závěr uvádím ještě některá nedopatření, aby si je čtenáři mohli opravit. (Neuvádím drobné tiskové chyby, které si každý snadno opraví sám.)

I. díl

Str.: 10, příklad 1: Místo: ...které nepatří do $\mathfrak{N}$..., má být: ...které nepatří do $\mathfrak{M}$...

20, příklad 1: Místo: ...Zvolíme-li si libovolné číslo k..., má být: ...zvolíme-li si libovolné kladné číslo k...

51_{11} Místo: ...a platí..., má být: ...a platí-li...

54, definice 2: Místo: ...změní-li funkční hodnota znaménko..., má být: ...změní-li funkční hodnota jenom znaménko...

59^8 Místo: $x = f(y)$, má být: $x = \bar{f}(y)$.

60^{10} Místo: množina vzorců, má být: množina vzorů.

74^1 Místo: $x = a(\mp + \infty)$, má být: $x = a(\mp - \infty)$.

79_4 má být obrácená nerovnost.

83^{17} výraz v absolutní hodnotě má znít $f(x) - b$.

85^5 Místo: 2,88, má být: 2,89.

102, př. 2: Místo: $(, + \infty)$, má být: $(0, + \infty)$.

104^3 Místo: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, má být: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B(x \in \mathfrak{M}_1)$; totéž na konci následujícího řádku.

124^8 Jmenovatel zlomku má být $f(x)$.

133_7 Ve jmenovateli zlomku oprav znaménko : $4 + \pi^2$.

135_9 Interval má být otevřený.

135_4 Na začátku řádku doplň slovo: shora...

136 V definici supréma, resp. infima množiny se zbytečně mluví o množině shora, resp. zdola omezené (na rozdíl od originálu; tato vlastnost množiny vyplývá z existence supréma, resp. infima, podle věty na str. 138).

138^{15} Místo: pro nějaký trojúhelník, má být: pro každý trojúhelník.

143 Svorka v rovnici pro s_n má uzavírat jen exponent, nikoliv základ. Mimo to nerovnost na 3. ř. zdola má znít: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} < 2$.

144_5 Na začátku řádku chybí závorka.

149^{12} Místo: ... a racionálními koeficienty, má být: ...s racionálními koeficienty.

156_2 Svorka má končit už za poslední dvojkou.

157^7 Na levé straně nerovnosti uzavři absolutní hodnotu.

162_{13} Místo: ...je sporné..., lépe: ...je ve sporu...

167^{12} Místo: ...odpovídající..., má být: ...odpovídajícím...

179_2 Místo: ...bodu platí..., má být: ...bodu ξ platí...

180^3 Místo: Označme..., lépe: Mějme...

210^9 Místo: ...třetího řádu..., má být: ...třetího stupně...

210_5 Místo: ...a vrcholy..., má být: ...s vrcholy...

214[11] Místo: (x_1, x_3), má být: (x_1, x_2).
V dolní polovině téže stránky (v případě $a_0/b_0 > 0$) jsou navzájem zaměněny symboly $+\infty$ a $-\infty$.

461 V determinantu nejsou jasně od sebe odděleny 1. a 2. sloupec. Uprav jeho první řádek takto: $p\gamma - \delta$; $-\gamma$.

II. díl

140_1 Místo: $\varphi(x^2 - y)^2$ v čitateli zlomku má být: $\varphi(x^2 - y^2)$.

211 Nahoře: Bylo by dobře označit rovnici Descartesova listu (F) — nebo ještě raději jiným písmenem. (Další text se totiž dovolává rovnice (F), která je uvedena už o dvě strany dříve, a to jen pro obecný případ.)

266_4 Místo: ...diverguje ..., má být: ...osciluje ...

269 V Bolzano-Cauchyově kriteriu místo (určené předpisem ε) bylo by jasnější (určené volbou čísla ε). (Celkem dvakrát.)

274 Nejasná formulace textu příkladu. Uprav: Níže uvedené seskupení ...

František Kejla, Praha.

Vojtěch Jarník, **Integrální počet II.** Vydalo nakladatelství ČSAV (sekce mat.-fys.), Praha 1955, stran 760, náklad 6600, cena vázaného výtisku Kčs 42,80.

U této Jarníkovy učebnice vyniká ještě více než u jeho dříve sepsaných učebnic do popředí úsilí překonat obtíže, které se zpravidla vyskytují v souvislosti s probíranou látkou. Ve světové literatuře se dosud vyskytují v podstatě dva druhy učebnic, v nichž se mluví o vícerozměrném integrálu. První z těchto druhů se vyznačuje logicky správným výkladem, ale kniha při tom zpravidla obsahuje jen málo látky, která je důležitá v jiných partiích matematické analysy; na př. ve známé Saksově učebnici není ani zmínky o transformaci vícerozměrných integrálů (tedy ani o vyjádření dvourozměrného integrálu „v polárních souřadnicích" a pod.). Takovéto učebnice se obyčejně jmenují „theorie integrálu". Učebnice druhého druhu mají pak zpravidla název „integrální počet"; obsahují sice látku, důležitou v konkretních případech, vyskytují se v nich však zpravidla logické mezery zásadního rázu.

Jarníkův integrální počet je jednou z mála knih, která pojednává o vícerozměrném integrálu, kterou však nelze zařadit do žádné z uvedených dvou skupin. Že se v Jarníkově knize nevyskytují logické skoky, není třeba zdůrazňovat; přitom je zpracována látka zásadně důležitá jak pro theoretickou výstavbu matematické analysy, tak i pro nejrůznější aplikace matematiky.

První kapitola je věnována theorii míry, druhá měřitelným funkcím, třetí theorii Lebesgue-Stieltjesova integrálu (v m-rozměrném kartézském prostoru E_m); integrál je definován pomocí míry. Čtvrtá kapitola pojednává o převodu integrace $(r + s)$-rozměrné na sled integrace r-rozměrné a s-rozměrné (Fubiniova věta) a o geometrickém významu integrálu nezáporné funkce. V páté kapitole je dokázána věta o derivaci funkcí s konečnou variací, dále věta, že funkce je neurčitým Lebesgueovým integrálem (v E_1), právě když je absolutně spojitá, a konečně věta o integraci per partes a druhá věta o střední hodnotě. Hlavním obsahem šesté kapitoly je věta o záměně proměnných ve vícerozměrném integrálu. Sedmá kapitola je věnována početní technice Lebesgueova integrálu. Je uvedeno několik důležitých příkladů na výpočet integrálů; používá se zejména záměny pořadí integrace (podle Fubiniovy věty), zavádění nových integračních proměnných a derivace a integrace podle parametru. V této kapitole je dobře vidět, jak je v konkretních případech užitečná obecná theorie. Některé z uvedených příkladů lze ovšem řešit též „elementárně" (bez theorie vícerozměrného integrálu). Příslušný postup, uvedený v některých učebnicích integrálního počtu, je však buď podstatně složitější nebo — obyčejně — nekorektní (používá se často na př. záměny pořadí integrace nebo i jiných operací bez náležitého odůvodnění). Osmá kapitola je věnována nevlastním integrálům (definovaným předpisem $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, kde napravo je vlastní limita Lebesgueových integrálů, a pod.); tato kapitola má (stejně jako předcházející) hlavně ráz početní. Devátá kapitola obsahuje hlavní věty o funkcích s konečnou variací. — Dosud byl definován integrál $\int_M f\,d\mu$ jen pro případ, že funkce μ je nezáporná; tento předpoklad je odstraněn v desáté kapitole. Jsou zde dokázány různé věty o závislosti integrálu $\int_M f\,d\mu$ na funkci μ a je studován též Stieltjesův integrál (podle původní Stieltjesovy definice). Jedenáctá kapitola je věnována Riemannovu integrálu v E_m, dvanáctá Perronovu integrálu v E_1. Je dokázána věta, že Lebesgueův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je roven $F(b) - F(a)$, jestliže funkce F je konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$ a jestliže s výjimkou nejvýše spočetně mnoha x z tohoto intervalu platí $F'(x) = f(x)$ (vlastní derivace).

Další kapitoly nejsou již věnovány přímo integrálnímu počtu, nýbrž spíše jeho aplikacím na některé jiné části matematické analysy. V třinácté kapitole pojednává autor o Fourierových řadách, o Poissonově sumační formuli, o aproximaci funkcí polynomy a trigonometrickými polynomy a o Fourierově integrálu. Ve čtrnácté kapitole je napřed obecný výklad o orthogonálních systémech; dosažených výsledků se dále používá ke zkoumání orthogonálních polynomů, zejména Legendreových, Čebyševových, Jacobiových, Hermiteových a Laguerreových. Patnáctá kapitola má název „Asymptotické rozvoje". Jsou vyšetřovány asymptotické vlastnosti integrálů $\int_a^b \varphi(x)\,(f(x))^\alpha\,dx$ a $\int_a^b \varphi(x)\, e^{i\alpha f(x)}\,.$ $.\,dx$ pro $\alpha \to +\infty$. Z obecných vět pak autor odvozuje některé důležité vlastnosti Besselových funkcí. V šestnácté kapitole je ukázáno, jak lze používati Euler-Maclaurinovy formule jednak k výpočtu integrálů, jednak jako sumační formule. Sedmnáctá kapitola je věnována t. zv. mechanické kvadratuře, osmnáctá kapitola funkci Γ, devatenáctá (poslední) kapitola eliptickým integrálům. V předmluvě jsou též pokyny pro studium této knihy; zejména je poznamenáno, že kapitoly IX—XII, které mají převážně theoretický ráz, nemusí čtenář studovat, zajímá-li se na př. o kapitoly XIII a XIV. Důležitou součást knihy tvoří cvičení; na př. je ve cvičeních k § 3, kap. IV uvedena věta Vitali-Carathéodoryova o aproximaci měřitelné funkce polospojitými funkcemi, ve cvičeních k § 10, kap. XIII je probrán Poissonův integrál (řešení Dirichletovy úlohy pro kruh) a pod. U obtížnějších cvičení je vždy návod.

Zhodnocení Jarníkovy knihy bylo vlastně provedeno hned na začátku recense. Kniha je psána srozumitelně; i nejobtížnější partie jsou psány se stejnou přesností jako třeba základní věty z *Úvodu do diferenciálního počtu*. „Integrální počet" o těchto vlastnostech by se asi v celé světové literatuře nenašel. Přitom je Jarníkova kniha, jak již bylo zdůrazněno, opravdu integrálním počtem (nejen „theorií integrálu"); to jasně ukazuje na př. několik kapitol věnovaných hlavně otázkám početního rázu. Dále je třeba kladně hodnotit i Jarníkův plynulý sloh a elegantní způsob vyjadřování.

Nyní by bylo třeba zmínit se o tom, jak by se kniha mohla ještě doplnit nebo zlepšit. V podstatě tyto věci vystihuje autor v předmluvě sám. Píše: „... Dále převládá v mé knize poněkud jednostranně aritmetické stanovisko — málo se uplatňují vztahy ke geometrii a vůbec ne vztahy k funkcionální analyse. Za třetí: naše literatura v analyse nebude úplná, dokud nebudeme míti vedle učebnic dostatečně bohaté sbírky úloh. Všechny tyto mezery by ovšem sotva bylo možno odstranit v rozsahu jediné knihy o integrálním počtu, která nadto má svým způsobem výkladu býti přístupna studentům středních semestrů. Ale skutečně vážným nedostatkem mé knihy je, že neobsahuje theorii k-rozměrných integrálů v n-rozměrném prostoru pro $k < n$, na př. theorii plošných integrálů, tak důležitou m. j. pro fysiku." Otázku vybudování ucelené theorie k-rozměrného integrálu v n-rozměrném prostoru pro $k = 1, \ldots, n$ nelze ovšem rozřešit nějakou „úpravou" Jarníkovy knihy. Myslím však, že poněkud jinak vypadá otázka vztahů k funkcionální analyse. Jarník definuje integrál pomocí míry, avšak vyslovuje definici jen pro míry v E_n. Zdá se mi, že by bylo přirozenější definovat $\int_P f \, \mathrm{d}\mu$ hned pro případ, že μ je míra na nějaké σ-algebře na abstraktní množině P, a chápat n-rozměrný integrál jen jako speciální případ. Kapitola X (a částečně i kapitola IX) by byla ucelenější, kdyby byla dokázána věta o vyjádření jedné míry integrálem podle druhé míry. Dále poznamenávám, že theorie, které používá Jarník k definici a odvození základních vlastností pojmu integrálu, je dosti složitá; používá se methody „funkce intervalu—míra—integrál". Na př. teprve na str. 111 je uvedena věta, že integrál ze součtu je roven součtu integrálů. Myslím, že tato methoda nebyla šťastně volena a že změnou definice integrálu by se dalo dosáhnout jak zjednodušení theorie, tak i jejího sblížení s funkcionální analysou.

Konečně zdůrazňuji, že Jarníkův Integrální počet II přímo navazuje na tři již dříve vydané jeho učebnice, totiž *Úvod do počtu diferenciálního*, *Úvod do počtu integrálního* a *Diferenciální počet*; nikde se nepředpokládá nic více než znalost těchto knih. Recensovanou knihu může tedy bez obtíží studovat posluchač středních semestrů university.

Jan Mařík, Praha.

Н. Н. Боголюбов и *Ю. А. Митропольский:* **Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.** Gos. izd. tech.-teor. lit., Moskva 1955. Str. 448, obr. 117, cena váz. výtisku 13 r. 40 k.

Asymptotické rozvoje umožňují zvládnout prakticky důležité případy nelineárních oscilací. Jak píší autoři v předmluvě, cílem knihy je vyložit současný stav asymptotických rozvojů podle mocnin malého parametru v aplikacích na úlohy nelineární mechaniky. Z této knihy se mohou bez obtíží poučit technici, kterým asymptotické metody mohou býti velmi užitečné, neboť s výjimkou poslední kapitoly autoři předpokládají u čtenáře znalosti pouze v rozsahu přednášek na vysokých školách technického směru a ilustrují své výklady řadou příkladů.

V první kapitole jsou vyšetřovány vlastní kmity v soustavách s jedním stupněm volnosti, které jsou blízké k lineárním konservativním soustavám. Druhá kapitola je věnována fázové rovině. Ve třetí kapitole se vyšetřují oscilační soustavy, které jsou pod vlivem vnějších periodických sil. Ve čtvrté kapitole je vyloženo tak zv. „přiblížení v průměru".[1])

Zatím co v prvních čtyřech kapitolách jsou opominuty některé matematické otázky (existence, konvergence), do poslední páté kapitoly jsou soustředěny čistě matematické výsledky. Pátá kapitola má tři paragrafy. První z nich § 21 obsahuje důkaz věty o přiblížení v průměru. Odkazujeme čtenáře na práci Krasnoselského a Krejna [1], která vyšla brzy po knize Bogoljubova a Mitropolského a kde je táž věta dokázána jednodušeji a za obecnějších předpokladů. Krasnoselskij a Krejn dokázali, že při přiblížení v průměru v podstatě jde o jistý druh spojité závislosti řešení diferenciální rovnice na parametru.

---

[1]) Rusky метод усреднения.

Všimněme si podrobněji § 22, 23. Nechť funkce $X(t, x)$ ($X \in E_n$, $x \in E_n$, $t \in E_1$) je definovaná a spojitá pro $\|x\| < \varrho$, $-\infty < t < \infty$, nechť existují ohraničené a stejnoměrně spojité derivace $\frac{\partial X}{\partial x_j}$. Konečně nechť

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(\sigma, x)\, d\sigma \to X_0(x) \quad \text{pro} \quad T \to \infty \tag{1}$$

stejnoměrně vzhledem k t. Za těchto předpokladů ukážeme, že funkce $X_0(x)$ má spojité derivace prvního řádu a platí

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X_{x_j}(\sigma, x)\, d\sigma \to \frac{\partial}{\partial x_j} X_0(x) \quad \text{pro} \quad T \to \infty\,.$$

Nechť e je jednotkový vektor ve směru osy x_j. Platí

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{X(\sigma, x + \lambda e) - X(\sigma, x)}{\lambda}\, d\sigma = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{\partial X}{\partial x_j}(\sigma, x)\, d\sigma + \varrho =$$

$$= \frac{X_0(x + \lambda e) - X_0(x)}{\lambda} + r\,,$$

kde $\varrho \to 0$, jestliže $\lambda \to 0$ a $r \to 0$, jestliže $T \to \infty$. Z poslední rovnosti plyne nejdříve existence limity $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{\partial X}{\partial x_j}(\sigma, x)\, d\sigma$, ze vztahu

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{\partial X}{\partial x_j}(\sigma, x)\, d\sigma = \frac{X_0(x + \lambda e) - X_0(x)}{\lambda} + \tilde{r}$$

pak dostáváme, že existují spojité $\frac{\partial X_0}{\partial x_j}$.

Vyšetřujme rovnici

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x)\,. \tag{2}$$

Při úvahách o rovnici (2) bývá účelné zavést t. zv. pomalý čas $\tau = \varepsilon t$, čímž rovnice (2) přejde v rovnici

$$\frac{dx}{d\tau} = X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right)\,. \tag{3}$$

Jestliže ε se blíží k nule, potom funkce $X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right)$ velmi rychle osciluje okolo své průměrné hodnoty $X_0(x)$ a je přirozené porovnávat rovnici (3) s rovnicí

$$\frac{dx}{d\tau} = X_0(x)\,, \tag{4}$$

resp. porovnávat rovnici (2) s rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x) . \tag{5}$$

Předpokládejme, že rovnice (4) má stacionární řešení ξ_0. Proveďme substituci $x = \xi_0 + b$ a položme $H = \left(\frac{\partial X_{0i}}{\partial x_j}\right)$, kde dosazujeme $x = \xi_0$. Rovnice (2) přejde v

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, b) , \tag{6}$$

kde $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} B(t, b)\, d\sigma \to B(b) = X_0(\xi_0 + b) — Hb$ a kde funkce $B(b)$ je malá ve srovnání s lineární funkcí (přesněji $B(0) = 0$, $\|B(b') — B(b'')\| \leqq \eta(\sigma)\|b' — b''\|$ pro $\|b'\| < \sigma$, $\|b''\| < \sigma$ a $\eta(\sigma) \to 0$ pro $\sigma \to 0$). Dále autoři pracují jen s těmito vztahy pro funkce $B(t, b)$ a $B(b)$, takže dosažené výsledky platí za předpokladů poněkud obecnějších, než jsme zavedli.

Pišme rovnici (6) v ekvivalentním tvaru

$$\frac{db}{d\tau} = Hb + B\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, b\right), \quad \tau = \varepsilon t . \tag{7}$$

Při metodě malého parametru obvykle vyšetřujeme soustavu

$$\frac{du}{d\tau} = U_1(\tau, u) + \varepsilon\, U_2(\tau, u, \varepsilon)$$

a porovnáváme ji pro malá ε se soustavou $\frac{du}{d\tau} = U_1(\tau, u)$. Naproti tomu při malém ε rovnice (7) je blízká rovnici

$$\frac{db}{d\tau} = Hb + B(b) \tag{8}$$

pouze v tom smyslu, že $\int_0^1 B\left(\frac{\tau + \tau_0}{\varepsilon}, b\right) d\tau \to B(b)$. Avšak autoři ukázali, že i v případě rovnice (6) jde ve skutečnosti o obvyklý problém malého parametru. Existuje totiž transformace $b = h + \varepsilon v_\varepsilon(t, h)$, která převádí rovnici (6) v rovnici

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon\, Hh + \varepsilon\Gamma(t, h, \varepsilon) , \tag{9}$$

kde spojitá funkce Γ splňuje podmínky

$$\|\Gamma(t, 0, \varepsilon)\| \leqq M(\varepsilon) , \quad M(\varepsilon) \to 0 \quad \text{pro} \quad \varepsilon \to 0 , \tag{10}$$

$$\|\Gamma(t, h', \varepsilon) — \Gamma(t, h'', \varepsilon)\| \leqq \lambda(\sigma, \varepsilon)\| h' — h''\| \quad \text{pro} \quad \|h'\| \leqq \sigma,\ \|h''\| \leqq \sigma , \tag{11}$$
$$\lambda(\sigma, \varepsilon) \to 0 \quad \text{pro} \quad \sigma \to 0 , \quad \varepsilon \to 0 .$$

Dále funkce $\Gamma(t, h, \varepsilon)$ má periodu ω v proměnné t (pro všechna h a ε), jestliže funkce $B(t, h)$ má periodu ω proměnné t.

Aby pro rovnici (9) mohli odvodit podrobné výsledky, zavádějí autoři tento podstatný předpoklad:

Reálné části charakteristických čísel matice H jsou vesměs různé od nuly. Vyšetřujme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = Hh + Q(\tau, h, \varepsilon)\,, \tag{12}$$

kde spojitá funkce Q splňuje předpoklady (10) a (11). Řešení rovnice (12) mají obdobné vlastnosti jako řešení rovnice $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = Hh$, je-li ε malé:

Existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ rovnice (12) má jediné řešení $h(\tau) = f_\varepsilon(\tau)$ ohraničené pro $-\infty < \tau < \infty$. Při tom je $\|f_\varepsilon(\tau)\| < D(\varepsilon)$, $D(\varepsilon) \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$. Řešení $f_\varepsilon(\tau)$ má periodu ω, jestliže funkce $Q(\tau, h, \varepsilon)$ má periodu ω v proměnné τ.

Naznačme důkaz. Obecný integrál rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} h(\tau) = Hh(\tau) + \omega(\tau) \tag{13}$$

můžeme psát ve tvaru

$$h(\tau) = \exp\{H\tau\}\, c + \int_0^\tau \{H(\tau - \sigma)\}\, \omega(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matici H lze rozložiti na pole $H = \begin{pmatrix} \overset{+}{H}, 0 \\ 0, \overset{-}{H} \end{pmatrix}$, kde reálné části charakteristických čísel matice $\overset{+}{H}$ jsou vesměs kladné a reálné části charakteristických čísel matice $\overset{-}{H}$ jsou vesměs záporné. Položme $H_1 = \begin{pmatrix} \overset{+}{H} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overset{-}{H} \end{pmatrix}$. Je-li $\omega(\tau)$ ohraničená, potom

$$\int_0^\tau \exp\{H(\tau - \sigma)\}\, \omega(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \exp\{H\tau\} \int_0^\tau \exp\{(-H_1 - H_2)\, \sigma\}\, \omega(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \exp\{H\tau\}\, [\int_{-\infty}^\tau \exp\{-H_1\sigma\}\, \omega(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma + c_1 + \int_\tau^\infty \exp\{-H_2\sigma\}\, \omega(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma + c_2]\ ^2) =$$

$$= (\exp\{H\tau\}(c_1 + c_2) + \int_{-\infty}^\infty J(\tau - \sigma)\, \omega(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,,$$

---

[2]) Položme $w = w_1 + w_2$, kde $w_1 = \begin{pmatrix} \overset{+}{w_1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{-}{w_2} \end{pmatrix}$, pak

$$\exp\{(-H_1 - H_2)\, \sigma\}\, (w_1 + w_2) = \exp\{-H_1 \sigma\}\, w_1 + \exp\{-H_2\sigma\}\, w_2 =$$

$$= \exp\{-H_1\sigma\}\, w + \exp\{-H_2\sigma\}\, w\,.$$

kde $J(\sigma) = \exp\{-H_1\sigma\}$, jestliže $\sigma < 0$, $J(\sigma) = \exp\{-H_2\sigma\}$, jestliže $\sigma > 0$. Obecný integrál rovnice (13) je

$$h(\tau) = \exp\{H\tau\}\,\bar{c} + \int_{\infty}^{\infty} J(\tau - \sigma)\,\omega(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Rovnice (13) má jediný integrál ohraničený pro $-\infty < \tau < \infty$ a to

$$h_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau - \sigma)\,\omega(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

a integrál $h(\tau)$ rovnice (12), který splňuje nerovnost $\|h(\tau)\| < \varrho$, $-\infty < \tau < \infty$, nutně splňuje integrální rovnici $h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau - \sigma)\,Q(\sigma, h(\sigma), \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma$. Nechť L je množina funkcí $l(\sigma)$ splňujících nerovnosti $\|l(\sigma)\| < c_1$, $\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\,l(\sigma)\right\| < c_2$, kde c_1, c_2 jsou vhodné konstanty. Z podmínek (10) a (11) snadno plyne, že pro dosti malá ε zobrazení

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau - \sigma)\,Q(\sigma, h(\sigma), \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma$$

zobrazuje množinu L do sebe a má pevný bod $\bar{h}(\tau) \in L$ a tato funkce $\bar{h}(\tau)$ je hledané řešení $f_\varepsilon(\tau)$ rovnice (12).

Dále platí: *Nechť počet charakteristických čísel matice H, jejichž reálné části jsou záporné, je s. Označme $U_\eta = \underset{x}{E}[\|x\| < \eta]$. Existují čísla ε_1, γ, C, $\sigma_0 < \sigma_1$ tak, že ke každému τ_0 a ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ existuje s-dimensionální varieta $\mathfrak{M}(\tau_0, \varepsilon) \subset U_{\sigma_0}$ a platí:*

1. *je-li $h(\tau)$ řešení rovnice (12), $h(\tau_0) \in U_{\sigma_0}$, $h(\tau_0) \,\tilde{\in}\, \mathfrak{M}(\tau_0, \varepsilon)$, potom existuje takové $\bar{\tau}$, že $h(\bar{\tau}) \,\tilde{\in}\, U_{\sigma_1}$,*

2. *je-li $h(\tau_0) \in \mathfrak{M}(\tau_0, \varepsilon)$, potom $\|h(\tau) - f_2(\tau)\| \leqq Ce^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\|h(\tau_0) - f_\varepsilon(\tau_0)\|$ pro všechna $\tau \geqq \tau_0$,*

3. *jestliže $s = 0$, potom $\mathfrak{M}(\tau_0, \varepsilon)$ obsahuje jediný bod,*

4. *jestliže $s = n$, potom $\mathfrak{M}(\tau_0, \varepsilon) = U_{\sigma_0}$.*

Také tento výsledek se dokazuje podobným způsobem jako existence funkce $f_\varepsilon(\tau)$. Poznamenejme, že tyto výsledky jsou silnější než výsledky, které plynou z Waževského topologického principu (viz [2]), neboť obecný topologický princip nemůže tak dokonale zachytit roli lineárního členu Hh v rovnici (12). Obdobné výsledky lze vyslovit pro rovnice (2), (3). V knize Bogoljubova a Mitropolského je místo předpokladu, že rovnice (4) má stacionární řešení, soustavně studován obecnější případ, že rovnice (4) má periodické řešení.

Konečně autoři ukazují, že některé známé skutečnosti z teorie malého parametru plynou z výsledků zde dosažených. Vyšetřujme na př. rovnici

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x})\,, \tag{14}$$

kde funkce $f(x, \dot{x})$ má spojité derivace prvního řádu (pro všechna x, $\dot{x}$). Tato rovnice byla studována nejdříve metodou rozvojů mocninné řady — o tom viz na př. monografii [3]. Metody postupných aproximací k podobným úlohám použil I. G. Malkin v práci [4]. Pro rovnici (14) této metody nezávisle použili N. G. Bulgakov [5] a J. Kurzweil [6]; z jejich výsledků plyne, že pro každé ε dosti malé existuje periodické řešení $y(t)$ rovnice

(14) s periodou $\omega + \alpha(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$, blízké k řešení $x(t) = a_0 \cos \omega t$ rovnice $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, jestliže jsou splněny podmínky

$$B(a_0) = 0\,, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} B(r)\big|_{r=a_0} \neq 0\,, \tag{16}$$

kde $B(r) = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(r \cos \omega t, - r\omega \sin \omega t) \sin \omega t \,\mathrm{d}t$.

Abychom tento výsledek dokázali, proveďme v rovnici (14) substituci $x = a \cos \psi$ Rovnice (14) přejde v soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi\,, \\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega a} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Odtud dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\psi} = \varepsilon X(\psi, a, \varepsilon)\,,$$

kde

$$X(\psi, a, \varepsilon) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi}{1 - \dfrac{\varepsilon}{a\omega^2} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi}\,.$$

Rovnice prvního přiblížení je

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\psi} = X_0(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega^2} \int\limits_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \,\mathrm{d}\psi\,. \tag{19}$$

(Rovnice (18) liší se od rovnice (2) tím, že funkce X závisí na ε, ale to není podstatné, protože všechny úvahy lze provést stejným způsobem i v tomto obecnějším případě.)

Rovnice (18) má stacionární řešení $a = a_0$ právě tehdy, je-li splněna podmínka (15). Je-li $X_0'(a_0) \neq 0$, potom rovnice (17) má pro dosti malé ε jediné ohraničené řešení $a(\psi)$, které má periodu 2π. Odtud již snadno plyne, že rovnice (14) má v okolí funkce $x(t) = a_0 \cos \omega t$ jediné ohraničené řešení, které je periodické s periodou blízkou k $2\pi/\omega$.

Ve srovnání s metodou postupných aproximací dostáváme navíc, že toto periodické řešení je stabilní, jestliže $X_0'(a_0) < 0$, a že je nestabilní, jestliže $X_0'(a_0) > 0$. Naproti tomu v pracích [5], [6] je vyšetřován obecný případ soustavy n-rovnic. Vzniká otázka, zda i tento případ nelze vyšetřit na základě výsledku Bogoljubova a Mitropolského. Podmínka (15), která je nutná k tomu, aby existovalo periodické řešení rovnice (14) v okolí funkce $a_0 \cos \omega t$, objeví se při metodě mocninných řad i při metodě postupných aproximací z důvodů dosti formálních: Umožňuje použít jistý algoritmus. Naproti tomu opíráme-li se o metodu Bogoljubova a Mitropolského, podmínka (15) dostává hlubší interpretaci — podmínka (15) znamená, že rovnice prvního přiblížení má stacionární řešení. Je zřejmé, že výsledky Bogoljubova a Mitropolského přinášejí podstatné a originální rozvití teorie malého parametru.

LITERATURA

[1] *М. А. Красносельский, С. Г. Крейн:* О принципе усреднения в нелинейной механике. Успехи математических наук, т. *10*, *3* (*65*), (1955), 147—152.

[2] *T. Ważewski:* Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. Annales de la Soc. Pol. Math. *XX* (1947), 279—313.

[3] *И. Г. Малкин:* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Москва-Ленинград 1949.

[4] *И. Г. Малкин:* Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. Прикладная математика и механика, т. *14* (1950), 13—22.

[5] *Н. Г. Булгаков:* Колебания квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы и неаналитической характеристикой нелинейности. Прикладная математика и механика, т. *19* (1955), 265—272.

[6] *Й. Курцвейль:* К теории колебаний автономной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Чехословацкий математический журнал, т. *5* (*80*) (1955), 517—531.

Jaroslav Kurzweil, Praha.