O GAUSS-SEIDELOVĚ ITERAČNÍ METODĚ

(Referát o přednášce MIR. FIEDLERA a VL. PTÁKA, proslovené v matematické obci pražské dne 27. února 1956.)

V přednášce byly referovány výsledky, ke kterým autoři dospěli při vyšetřování rychlosti konvergence různých iteračních metod k řešení systémů lineárních rovnic.

Máme-li řešiti systém rovnic

$$x = Ax + y \tag{1}$$

(psáno ve vektorovém tvaru), pak obvyklá iterační metoda spočívá v tom, že vyjdeme od vhodného vektoru x_0 a tvoříme posloupnost x_n podle předpisu $x_{n+1} = Ax_n + y$. Konverguje-li posloupnost x_n k nějakému vektoru x, bude potom x řešením uvedeného systému rovnic (1).

Autoři zavedli pojem zobecnění Gauss-Seidelovy metody takto: Nechť B je libovolná matice taková, že existuje $(E - B)^{-1}$. Potom splnění rovnice (1) je ekvivalentní se splněním rovnice $(E - B)\, x = (A - B)x + y$ neboli $x = (E - B)^{-1} (A - B)\, x + (E - B)^{-1}\, y$. Obvyklá iterační metoda aplikovaná na matici $W = (E - B)^{-1} (A - B)$ je potom ekvivalentní k metodě

$$(E - B)\, x_{n+1} = (A - B)\, x_n + y\,, \tag{2}$$

kterou nazývají autoři zobecněnou Gauss-Seidelovou metodou. V přednášce byl podrobně osvětlen význam volby

$$b_{ik} = a_{ik} \quad \text{pro} \quad i > k\,, \quad b_{ik} = 0 \quad \text{pro} \quad i \leqq k\,,$$

pro kterou tato metoda přechází v klasickou iterační metodu Gauss-Seidelovu.

Je nasnadě považovati za míru rychlosti konvergence číslo $\lambda(A, B) = \max |\lambda_i|$, kdež λ_i jsou vlastní čísla matice $W = (E - B)^{-1} (A - B)$.

Konvergence této metody je potom ekvivalentní s tím, aby $\lambda(A, B) < 1$.

Referovaná práce se zabývá závislostí čísla $\lambda(A, B)$ na volbě matice B. Hlavní výsledky jsou tyto dvě věty:

Věta 1. *Nechť matice A je nezáporná a matice $E - A$ positivně definitní. Nechť matice B splňuje nerovnosti $0 \leqq B \leqq A$. Potom $\lambda(A, B) < 1$ (a tedy metoda konverguje). Jestliže jsou dány dvě matice B_1, B_2, které splňují nerovnosti $0 \leqq B_1 \leqq B_2 \leqq A$, je $\lambda(A, B_2) \leqq \lambda(A, B_1)$ (názorně řečeno, konvergence je tím rychlejší, čím větší jest matice B).*

Věta 2. *Nechť A je nezáporná, $E - A$ positivně definitní a nechť je zvolena matice $0 \leqq B \leqq A$. Jestliže nyní škrtneme některé neznámé a jim příslušné rovnice, bude vzniklá metoda konvergovat aspoň tak dobře jako metoda příslušná A a B. (Přesná formulace věty uvedena v příslušné práci autorů; zde se jedná o to, naznačit její význam.)*

Přednášející uvedli potom řadu aplikací těchto výsledků. Závěrem oznámili, že z jejich pozdějších výsledků plyne, že předpoklady, za nichž platí uvedené věty, lze značně zeslabit.

Vlastimil Pták, Praha.