

Vlastimil Pták

O Gauss-Seidlově iterační metodě

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 3, 356

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117198>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O GAUSS-SEIDELOVĚ ITERAČNÍ METODĚ

(Referát o přednášce MIR. FIEDLERA a VL. PTÁKA, proslovené v matematické obci pražské dne 27. února 1956.)

V přednášce byly referovány výsledky, ke kterým autoři dospěli při vyšetřování rychlosti konvergence různých iteračních metod k řešení systémů lineárních rovnic.

Máme-li řešiti systém rovnic

$$x = Ax + y \quad (1)$$

(psáno ve vektorovém tvaru), pak obvyklá iterační metoda spočívá v tom, že vyjdeme od vhodného vektoru x_0 a tvoříme posloupnost x_n podle předpisu $x_{n+1} = Ax_n + y$. Konverguje-li posloupnost x_n k nějakému vektoru x , bude potom x řešením uvedeného systému rovnic (1).

Autoři zavedli pojem zobecnění Gauss-Seidelovy metody takto: Nechť B je libovolná matice taková, že existuje $(E - B)^{-1}$. Potom splnění rovnice (1) je ekvivalentní se splněním rovnice $(E - B)x = (A - B)x + y$ neboli $x = (E - B)^{-1}(A - B)x + (E - B)^{-1}y$. Obvyklá iterační metoda aplikovaná na matici $W = (E - B)^{-1}(A - B)$ je potom ekvivalentní k metodě

$$(E - B)x_{n+1} = (A - B)x_n + y, \quad (2)$$

kterou nazývají autoři zobecněnou Gauss-Seidelovou metodou. V přednášce byl podrobně osvětlen význam volby

$$b_{ik} = a_{ik} \text{ pro } i > k, \quad b_{ik} = 0 \text{ pro } i \leq k,$$

pro kterou tato metoda přechází v klasickou iterační metodu Gauss-Seidelovu.

Je nasnadě považovati za míru rychlosti konvergence číslo $\lambda(A, B) = \max |\lambda_i|$, kdež λ_i jsou vlastní čísla matice $W = (E - B)^{-1}(A - B)$.

Konvergence této metody je potom ekvivalentní s tím, aby $\lambda(A, B) < 1$.

Referovaná práce se zabývá závislostí čísla $\lambda(A, B)$ na volbě matice B . Hlavní výsledky jsou tyto dvě věty:

Věta 1. *Nechť matice A je nezáporná a matice $E - A$ pozitivně definitní. Nechť matice B splňuje nerovnosti $0 \leq B \leq A$. Potom $\lambda(A, B) < 1$ (a tedy metoda konverguje). Jestliže jsou dány dvě matice B_1, B_2 , které splňují nerovnosti $0 \leq B_1 \leq B_2 \leq A$, je $\lambda(A, B_2) \leq \lambda(A, B_1)$ (náznorně řečeno, konvergence je tím rychlejší, čím větší jest matice B).*

Věta 2. *Nechť A je nezáporná, $E - A$ pozitivně definitní a nechť je zvolena matice $0 \leq B \leq A$. Jestliže nyní škrtneme některé neznámé a jim příslušné rovnice, bude vzniklá metoda konvergovat aspoň tak dobře jako metoda příslušná A a B . (Přesná formulace věty uvedena v příslušné práci autorů; zde se jedná o to, naznačit její význam.)*

Přednášející uvedli potom řadu aplikací těchto výsledků. Závěrem oznámili, že z jejich pozdějších výsledků plyne, že předpoklady, za nichž platí uvedené věty, lze značně zeslabit.

Vlastimil Pták, Praha.