Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Čermák

Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 224--228

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117190`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA O LIMITNÍM PŘECHODU DIFERENČNÍCH ROVNIC V ROVNICE DIFERENCIÁLNÍ

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Došlo dne 15. května 1955.)

Jako příklad na použití jedné metody řešení homogenních lineárních systémů diferenciálních a diferenčních rovnic s konstantními koeficienty založené na jistých pojmech maticového počtu, které zavedl EDUARD WEYR, je v tomto článku ukázáno, že fundamentální soustava řešení lineárního systému diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

$$\underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

za určitých předpokladů přejde v limitě pro $\omega \to 0$ ve fundamentální soustavu řešení systému diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

1. Tato poznámka souvisí úzce s nedávno uveřejněným článkem prof. O. BORŮVKY [1] a mým článkem [2], kde jsem metodou použitou prof. Borůvkou v [1] odvodil explicitní vzorce pro obecné řešení homogenního lineárního systému diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Vzhledem k účelu následujících úvah použiji těchto vzorců v poněkud pozměněném tvaru.

Systém diferenciálních rovnic můžeme za jistých předpokladů pokládati za limitní případ vhodného systému rovnic diferenčních. Naskýtá se otázka, zda při limitním přechodu, který převede systém diferenčních rovnic v systém rovnic diferenciálních, také řešení systému diferenčních rovnic přejdou v řešení odpovídajícího systému diferenciálních rovnic. Zde se budu zabývati velmi speciálním případem, totiž že systémy, jež přicházejí v úvahu, jsou homogenní lineární s konstantními koeficienty. Protože methoda, jíž je použito v [1] a [2], dává explicitní vzorce pro řešení takových systémů, nečiní porovnání řešení obtíží. Podobný problém pro přechod lineární diferenční rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty v diferenciální rovnici stejného typu podrobně studoval A. WALTHER v [3]. Protože diferenční rovnici n-tého řádu lze převésti na systém n rovnic, je část jeho výsledků, která se týká homogenní rovnice, obsažena ve výsledcích tohoto článku.

Otázky tohoto druhu, které jsou v numerickém počtu známy pod názvem metoda sítí, jsou předmětem stálého zájmu a podrobného studia a jak známo [4], výsledky dosažené v tomto směru jsou mnohem obecnější než výsledek této poznámky, která se týká pouze velmi speciálního systému rovnic. Nicméně tato poznámka může býti užitečná z toho důvodu, že vyšetřování je zde provedeno za předpokladu, že jak proměnná x tak rozpětí ω nabývají komplexních hodnot, zatím co při vyšetřováních, která jsou zaměřena k numerickým výpočtům, proměnná i rozpětí jsou omezeny na reálný obor.

2. Uvažujme o systému diferenčních rovnic

$$\underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad \underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \frac{u_i(x+\omega) - u_i(x)}{\omega}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{1}$$

v maticové notaci[1]) $\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{u}(x) = A\,\mathbf{u}(x)$, kde x je proměnná v množině komplexních čísel, rozpětí ω komplexní číslo a A je konstantní čtvercová matice n-tého řádu, jejíž prvky a_{ij} jsou komplexní čísla.

Přejdeme-li k limitě pro $\omega \to 0$, přejde systém (1) v homogenní lineární systém diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x} = A\,\mathbf{u}(x)\,. \tag{2}$$

Předpokládejme, že řešení systému (1) je tvaru

$$\mathbf{u}(x) = \lambda^x\,\mathbf{y}(x)\,, \tag{3}$$

kde λ je dosud neurčené číslo a $\mathbf{y}(x)$ vektor, jehož složky jsou vhodnými funkcemi neodvisle proměnné x.

Použijeme-li vztahů

$$\underset{\omega}{\Delta}[\mathbf{y}(x)\,\lambda^x] = \mathbf{y}(x)\,\underset{\omega}{\Delta}\lambda^x + \lambda^{x+\omega}\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x)\,, \quad \underset{\omega}{\Delta}\lambda^x = \frac{1}{\omega}\,\lambda^x(\lambda^\omega - 1)\,,$$

snadno zjistíme, že $\mathbf{y}(x)$ musí býti řešením rovnice

$$\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x) = \frac{1}{\lambda^\omega}\left[A - \frac{\lambda^\omega - 1}{\omega}\,E\right]\mathbf{y}(x)\,. \tag{4}$$

Položme

$$\frac{\lambda^\omega - 1}{\omega} = \lambda^*\,. \tag{5}$$

Potom rovnice (4) bude

$$\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x) = \frac{1}{\lambda^*\omega + 1}\,[A - \lambda^* E]\,\mathbf{y}(x)\,. \tag{6}$$

---

[1]) Tučnými písmeny budeme označovati vektory v n-rozměrném vektorovém prostoru a budeme je identifikovati s jednosloupcovými maticemi o n prvcích (složkách vektoru). Matice budeme značit velkými písmeny. E je jednotková matice.

3. Nyní nechť a je jeden z charakteristických kořenů matice A o násobnosti α. Ke kořenu a existuje $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \alpha$ lineárně nezávislých vektorů, které tvoří t. zv. normální soustavu vektorů příslušnou k charakteristickému kořenu a. Označíme je

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}, \ldots, \mathbf{a}_{1,\alpha_r}, \\ \mathbf{a}_{21}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_r}, \mathbf{a}_{2,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_{r-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_r}, \mathbf{a}_{r,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}}, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_1}. \end{array} \tag{7}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $(\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_r)$ jsou Weyrova charakteristická čísla příslušná ke kořenu a. Vektory (7) splňují tyto vztahy:

$$(A - aE)\,\mathbf{a}_{\mu\nu} = \begin{matrix} \mathbf{a}_{\mu+1,\nu} \text{ pro } 1 \leqq \mu \leqq r-1 \\ 0 \quad \text{pro} \qquad \mu = r \end{matrix} \Bigg\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{8}$$

Položme dále

$$\mathbf{a}^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{a\omega + 1}\right)^{\mu-1} \mathbf{a}_{\mu\nu}, \quad 1 \leqq \mu \leqq r, \; \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{9}$$

Vektory (9) jsou zřejmě nezávislé a splňují vztahy podobné vztahům (8):

$$\frac{1}{a\omega + 1}(A - aE)\mathbf{a}^{\mu\nu} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{a}^{\mu+1,\nu} \text{ pro } 1 \leqq \mu \leqq r-1 \\ 0 \quad \text{pro} \qquad \mu = r \end{matrix}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{10}$$

Dále pro ně platí $\lim\limits_{\omega\to 0} \mathbf{a}^{\mu\nu} = \mathbf{a}_{\mu\nu}$, $1 \leqq \mu \leqq r$, $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}$.

4. S pomocí vztahů (10), (5) a (3) plyne, jak jsem ukázal v [2], toto tvrzení: *Vektory*

$$\mathbf{u}^{\mu\nu} = (1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}} \left\{ \mathbf{a}^{\mu\nu} + \frac{x}{1!}\mathbf{a}^{\mu+1,\nu} + \frac{x(x-\omega)}{2!}\mathbf{a}^{\mu+2,\nu} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{x(x-\omega)\ldots(x - \overline{r-\mu-1}\,\omega)}{(r-\mu)!}\mathbf{a}^{r\nu} \right\} \tag{11}$$

pro

$$\mu = 1, 2, \ldots, r-1\,; \quad \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1} \tag{11}$$

a

$$\mathbf{u}^{\mu\nu} = (1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}} \mathbf{a}^{\mu\nu} \quad \textit{pro} \quad \mu = r;\; \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_1$$

tvoří α lineárně nezávislých řešení systému (1).

Takto každému charakteristickému kořenu matice A odpovídá množina nezávislých řešení systému (1), která se skládá právě z tolika řešení, kolik činí násobnost příslušného charakteristického kořene.

Označíme-li $a, b, \ldots, f$ všechny navzájem různé charakteristické kořeny matice A a jejich násobnosti $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$, dostaneme podle uvedeného tvrzení celkem $\alpha + \beta + \ldots + \varphi = n$ řešení, které tvoří, jak je také v [2] ukázáno, fundamentální soustavu řešení systému (1).

5. Vidíme nyní, že právě nalezenou fundamentální soustavu řešení systému (1) tvoří vektory, jejichž složky jsou při pevném x mnohoznačné funkce proměnné ω. Tyto funkce mají jednoduchý charakter. Konečné body rozvětvení jsou v číslech $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, \ldots, -\frac{1}{f}$. Vedeme-li v ω-rovině řezy od bodů rozvětvení do bodu ∞, na př. ve směru radiusvektorů spojujících počátek s body rozvětvení, a volíme-li nyní v takto řezy opatřené rovině za logaritmy veličin $1 + a\omega, 1 + b\omega, \ldots, 1 + f\omega$, hlavní hodnoty $\operatorname{Log}(1 + a\omega)$, $\operatorname{Log}(1 + b\omega)$, $\operatorname{Log}(1 + f\omega)$, které pro $\omega \to 0$ jsou rovny nule, potom můžeme provésti limitní přechod $\omega \to 0$. Při tomto přechodu přejde systém (1) v systém diferenciálních rovnic (2) a vektory nalezené fundamentální soustavy řešení systému (1) přejdou ve vektory,[2]) z nichž vypíšeme pouze skupinu odpovídající kořenu a:

$$\mathfrak{u}_{\mu\nu} = e^{ax} \left\{ \mathfrak{a}_{\mu\nu} + \frac{x}{1!} \mathfrak{a}_{\mu+1,\nu} + \frac{x^2}{2!} \mathfrak{a}_{\mu+2,\nu} + \ldots + \frac{x^{r-\mu}}{(r-\mu)!} \mathfrak{a}_{r\nu} \right\}, \tag{12}$$

$$1 \leqq \mu \leqq r, \ \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1} .$$

Tyto vektory tvoří podle [1] fundamentální soustavu řešení systému diferenciálních rovnic (2).

Ukázali jsme tedy, že námi nalezená fundamentální soustava řešení systému diferenčních rovnic (1) přejde za předpokladů uvedených v tomto odstavci při limitním přechodu, který převede systém (1) v odpovídající systém diferenciálních rovnic (2), ve fundamentální soustavu řešení systému (2) ve tvaru, který odvodil prof. Borůvka v [1].

LITERATURA

[1] *O. Borůvka*: Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systému diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, Časopis pro pěst. mat., 2 (79), 1954, 151—156.

[2] *J. Čermák*: On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients, Annales Mathematici Polonici, t. *1* (1954), fasc. 1, 195—202.

[3] *A. Walther*: Zum Grenzübergange von Differenzengleichungen in Differentialgleichungen, Math. Annalen, *95* (1926), 257—266.

[4] Na př. *L. V. Kantorovič* i *V. I. Krylov*: Približennye metody vysšego analiza, Moskva 1952, 179—256.

[2]) Podrobněji o limitním přechodu $\lim_{\omega \to 0} (1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}}$ viz na př. v [3], s. 261—262.

Резюме

ЗАМЕТКА О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

ЙИРЖИ ЧЕРМАК (Jiří Čermák), Брно.

(Поступило в редакцию 15/V 1955 г.)

Рассмотрим однородную линейную систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами (1). В статье показано, что при определенных условиях фундаментальная система решений этой системы перейдет при предельном переходе $\omega \to 0$ в фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2), в которую перейдет система (1) при $\omega \to 0$. В этом результате содержатся результаты А. Вальтера [3], касающиеся подобного рода проблемы относительно однородного линейного разностного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZUM GRENZÜBERGANGE VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN IN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Eingelangt 15. V. 1955.)

Es sei vorgelegt das homogene lineare System von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten (1). In der Arbeit ist gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen das Fundamentalsystem der Lösungen von (1) bei dem Grenzübergange $\omega \to 0$ in das Fundamentalsystem der Lösungen des Systems von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (2) übergeht, in welches sich (1) für $\omega \to 0$ verwandelt. In diesem Resultat sind ähnliche Resultate des Herrn A. Walther [3] über die homogene lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten enthalten.