POZNÁMKA K PŘÍMKOVÉ GEOMETRII ROZVINUTELNÝCH PLOCH

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Došlo dne 14. ledna 1955.) DT: 513.716.3

Každou přímkovou plochu v trojrozměrném projektivním prostoru lze vyjádřit analyticky tak, že přímkové souřadnice jejích tvořících přímek jsou funkcemi jednoho parametru. Je-li daná plocha rozvinutelná, pak derivace těchto přímkových souřadnic určují stejným způsobem další přímkovou plochu, t. zv. derivovanou plochu dané rozvinutelné plochy. V tomto článku je podána konstrukce rozvinutelné plochy, známe-li její plochu derivovanou.

1. Kleinovo zobrazení všech přímek trojrozměrného projektivního prostoru S_3 na body regulární nadkvadriky (t. zv. *K-kvadriky*), vnořené do pětirozměrného projektivního prostoru S_5, vede k tomu, že obrazem přímkové plochy z S_3 je křivka v S_5, ležící na K-kvadrice. Šest projektivních homogenních souřadnic bodů této křivky závisí pak na jednom proměnném parametru t; jejich derivace, pokud existují, určují při zvoleném faktoru úměrnosti homogenních souřadnic v S_5 druhou křivku, která už ovšem na K-kvadrice ležet nemusí. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby i tato druhá křivka ležela na K-kvadrice, čili aby byla obrazem nějaké přímkové plochy, je ta, aby první křivka byla obrazem plochy rozvinutelné. Druhá křivka je pak obrazem přímkové plochy, kterou jsem nazval derivovanou plochou dané rozvinutelné plochy. Není obtížné určit vlastnosti této derivované plochy, známe-li danou rozvinutelnou plochu. To jsem ukázal v jedné starší práci.[1]) Pro úplnost je třeba ukázat i postup obrácený, jak totiž lze rozvinutelnou plochu určiti, známe-li její plochu derivovanou. Celá konstrukce je velmi jednoduchá. Protože však jde v podstatě o hledání primitivních funkcí, omezíme se na reálné funkce reálné proměnné t. Zvolíme-li za souřadnice v S_5 Plückerovy přímkové souřadnice, budou reálným bodům na K-kvadrice v S_5 odpovídat reálné přímky v S_3. Jde tedy o přirozené doplnění výše citované práce, kde byly rovněž studovány reálné přímkové plochy s reálnými tvořícími přímkami. Také symboliku zde zachováme stejnou[2]).

[1]) *K. Havlíček* [2].
[2]) Viz také *V. Hlavatý* [4].

2. Projektivní homogenní souřadnice bodu X v trojrozměrném projektivním prostoru S_3 označme x^i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Jsou-li Y, Z dva takové body o souřadnicích y^i, resp. z^i $(i = 1, 2, 3, 4)$, pišme

$$p^{ij} = \varrho \begin{vmatrix} y^i, y^j \\ z^i, z^j \end{vmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

kde $\varrho \neq 0$ je libovolný faktor úměrnosti. Plückerovy bodové souřadnice $p^1, \ldots, p^6$ přímky, která je incidentní s body Y, Z, očíslujeme podle předpisu

$$p^1 = p^{14},\; p^2 = p^{24},\; p^3 = p^{34},\; p^4 = p^{23},\; p^5 = p^{31},\; p^6 = p^{12}.$$

Tyto souřadnice splňují kvadratickou rovnici

$$\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} = 0, \tag{2}$$

kde jsme pro stručnost označili $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} = 2\,(p^1p^4 + p^2p^5 + p^3p^6)$. Šest Plückerových souřadnic $p^1, \ldots, p^6$, jež symbolisujeme souhrnně a krátce znakem $\mathfrak{p}$, lze interpretovat jako homogenní souřadnice bodu v S_5, kde rovnice (2) představuje regulární nadkvadriku, kterou jsme označili názvem K-kvadrika. Každá přímka prostoru S_3 je tím zobrazena vzájemně jednoznačně do bodu K-kvadriky, vnořené do S_5 a obráceně jen body této K-kvadriky jsou obrazy přímek prostoru S_3. Protože každá přímková plocha v S_3 se přitom zobrazí jako křivka ležící na K-kvadrice, lze souřadnice jejích přímek vyjádřit jako funkce jednoho parametru t, symbolicky psáno

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t),$$

kde funkce $\mathfrak{p}(t)$ (t. j. funkce $p^1(t), \ldots, p^6(t)$) splňují určité předpoklady[3]) a kde parametr t probíhá nějaký interval $\mathfrak{J}$. Táž plocha je ovšem dána i rovnicemi

$$'\mathfrak{p} = f\mathfrak{p}(t), \tag{3}$$

kde $f \neq 0$ je libovolný faktor Plückerových homogenních souřadnic, který může býti také funkcí parametru t (symbolika je snadno srozumitelná). Derivaci podle parametru t označíme v dalším tečkou, druhou derivaci dvěma tečkami, tedy na příklad $\mathfrak{p}^{\cdot} = \dfrac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t}$, $\mathfrak{p}^{\cdot\cdot} = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathfrak{p}}{\mathrm{d}t^2}$. Lze dokázat následující tvrzení[4]):

Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímková plocha o rovnicích $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t)$ *byla rozvinutelná, je splnění rovnice*

$$\mathfrak{p}^{\cdot} \times \mathfrak{p}^{\cdot} = 0 \tag{4}$$

pro všechny hodnoty t intervalu $\mathfrak{J}$. Toto tvrzení je f-invariantní, t. j. nezávislé na volbě faktoru úměrnosti f Plückerových souřadnic, čili je nezávislé na transformaci (3). V případě, že daná plocha je rozvinutelná, je tedy splněna rovnice (4), takže funkce $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$ splňují rovnici K-kvadriky a určují přímkovou

[3]) *V. Hlavatý* [4], sešit I., str. 41—43.

[4]) *K. Havlíček* [2], věta (2,2), str. 2.

plochu, totiž derivovanou plochu dané rozvinutelné plochy.[5]) Protože od uveřejnění citované už mé práce uplynula delší doba, opakuji zde z ní bez důkazu některé výsledky[6]), jichž je v dalším užito a jež platí za předpokladů tam uvedených. Z nich zvlášť zdůrazňuji předpoklad o tom, že matice

$$\|\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^{\cdot}, \mathfrak{p}^{\cdot\cdot}\|$$

má pro všechny hodnoty uvažovaného intervalu hodnost $h = 3$. Tím je z našich úvah vyloučen svazek přímek procházejících jedním bodem a ležících v jedné rovině.

Každá rozvinutelná plocha je buď plochou tečen nějaké křivky nebo kuželem.

Každá hodnota t_0 parametru t určuje na rozvinutelné ploše přímku $\mathfrak{p}(t_0)$ a na její derivované ploše přímku $\mathfrak{p}^{\cdot}(t_0)$. Přímky $\mathfrak{p}(t_0)$ a $\mathfrak{p}^{\cdot}(t_0)$ se nazývají přímky *sdružené*[7]) a protínají se v kuspidálním bodě dané rozvinutelné plochy; rovina jimi určená je tečnou rovinou dané rozvinutelné plochy a dotýká se jí podél povrchové přímky $\mathfrak{p}(t_0)$. Je-li rozvinutelná plocha plochou tečen křivky C, pak body této křivky a jen tyto body jsou kuspidálními body dané plochy; protože povrchové přímky příslušné derivované plochy podle předcházejícího procházejí těmi kuspidálními body, leží křivka C i na ploše derivované; derivovaná plocha je tu tvořena přímkami $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$, jež leží v tečných rovinách plochy tečen křivky C a z nichž každá protíná sdruženou přímku $\mathfrak{p}(t)$ v bodě, ve kterém se přímka $\mathfrak{p}(t)$ dotýká křivky C. Je-li křivka C rovinná, pak příslušná derivovaná plocha je opět množina tečen jiné rovinné křivky, jež leží v téže rovině jako křivka C. — Je-li rozvinutelná plocha kuželem o vrcholu V, který je zde ovšem jediným jejím kuspidálním bodem, pak příslušná derivovaná plocha je opět kuželem o témže vrcholu V.

Protože přímka $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$ není f-invariantní, odpovídají různým volbám faktoru f v rovnicích (3) případně různé derivované plochy téže plochy rozvinutelné. K dané rozvinutelné ploše existuje tedy nekonečně mnoho derivovaných ploch. Tyto derivované plochy jsou buď všechny nerozvinutelné (což nastane tehdy, je-li daná rozvinutelná plocha plochou tečen prostorové křivky) nebo jsou všechny rozvinutelné (což nastane tehdy, je-li daná rozvinutelná plocha kuželem nebo množstvím tečen rovinné křivky) a vždy tvoří parabolickou přímkovou kongruenci.[8]) Dvěma různými faktory úměrnosti f_1, f_2 dané rozvinutelné plochy jsou určeny dvě různé derivované plochy tehdy a jen tehdy, když poměr těchto faktorů není konstantní.

---

[5]) Není-li daná plocha rozvinutelná, pak není splněna ani rovnice (4). V tom případě nelze funkce $\mathfrak{p}^{\cdot}(t)$ interpretovat jako souřadnice přímky a o derivované ploše nelze tedy hovořit. Rovnice (4) může pak být splněna jen pro isolované hodnoty parametru t, což vede k torsálním přímkám dané plochy.

[6]) Srovnej hlavně větu (2,7) a celý odstavec 6 v uvedené práci [2].

[7]) Jejich obrazy v S_5 jsou totiž dva body na K-kvadrice, které jsou vzhledem ke K-kvadrice polárně sdruženy.

[8]) Parabolickou kongruenci zde uvažuji ve smyslu definice, kterou uvádí *V. Hlavatý* [4], sešit I, str. 110—114 a 129—132.

3. K definici plochy derivované připojme pro jednoduchost vyjadřování další pojem a vyslovme obojí společnou definicí. Tučné typy $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ a pod. symbolisují i nadále Plückerovy souřadnice.

Definice. *Budiž dána rozvinutelná plocha Π rovnicemi*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t)\,. \tag{5}$$

Pak přímková plocha Ω daná rovnicemi

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(t)\,, \tag{6}$$

kde $\mathfrak{q}(t) = \mathfrak{p}^\cdot(t)$, se nazývá derivovaná plocha plochy Π. Obráceně plocha Π se nazývá primitivní plocha plochy Ω.

Poznámka. Je dobře mít stále na paměti, že primitivní plocha k dané ploše přímkové (pokud ovšem existuje) je vždy rozvinutelná. (Viz definici.)

Především doplňme předcházející výsledky ještě jednou větou, která je sice jejich jednoduchým důsledkem, ale která v minulé práci [2] nebyla výslovně uvedena.

Věta 1. *Budiž Π plocha tečen prostorové křivky* C. *Potom křivka* C *je asymptotickou křivkou na každé derivované ploše plochy Π.*

Důkaz. Plochu Π, která je ovšem rozvinutelná, vyjádříme rovnicemi (5) a její derivovanou plochu Ω rovnicemi (6). Z předcházejícího víme, že křivka C leží na ploše Ω. Zbývá dokázat, že je to asymptotická křivka na ploše Ω. Sledujme proto libovolnou oskulační rovinu ϱ křivky C. Tato rovina je zároveň tečnou rovinou plochy Π, jak je známo z elementární diferenciální geometrie. Je tedy určena dvěma sdruženými přímkami $\mathfrak{p}(t_0)$ a $\mathfrak{p}^\cdot(t_0) = \mathfrak{q}(t_0)$, jak bylo uvedeno v odstavci 2. To znamená, že rovina ϱ je zároveň tečnou rovinou plochy Ω v uvažovaném bodě křivy C, neboť je incidentní s přímkou $\mathfrak{p}^\cdot(t_0)$ plochy Ω a s tečnou $\mathfrak{p}(t_0)$ křivky C, jež na ploše Ω leží. Rovina ϱ dotýká se tedy plochy Ω v průsečíku sdružených přímek $\mathfrak{p}(t_0)$ a $\mathfrak{p}^\cdot(t_0)$, t. j. v bodě křivky C. Křivka C má tedy tu vlastnost, že její oskulační roviny jsou tečnými rovinami plochy Ω, což je známá charakteristická vlastnost asymptotických křivek. (V. Hlavatý [3], str. 319.)

Chceme-li obráceně hledat plochu primitivní k dané přímkové ploše, plyne už z věty 1, že takovou primitivní plochu musíme hledat jedině mezi plochami tečen asymptotických křivek dané plochy. Samostatně pak bude nutno řešit ty případy, kdy na dané přímkové ploše všechny asymptotické čáry jsou vesměs přímkami, takže o ploše tečen takové čáry nelze mluvit; to nastává jen u kvadrik a u ploch rozvinutelných a těch si všimneme až v odstavci 4. Obrátíme se tedy nejdřív k plochám, na nichž existují asymptotické křivky, které nejsou přímkami. Odvoďme nejdřív pomocnou větu, která se týká libovolné takové plochy, jež nemusí být nutně přímková.

Věta 2. *Budiž Ω plocha, na níž jsou dvě různé soustavy reálných asymptotických čar a budiž* C *jedna z těchto asymptotických čar, jež není přímkou. Potom plocha* *tečen křivky* C *je primitivní plochou k přímkové ploše, která je tvořena asymptotickými tečnami plochy Ω sestrojenými v bodech křivky* C, *jež nejsou tečnami křivky* C (t. j. jsou tečnami asymptotických čar plochy Ω, které patří do té soustavy, do níž nepatří křivka C).

Důkaz. Parametrické rovnice plochy Ω jsou

$$x^i = x^i(u, v)\,, \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,,$$

kde $x^i(u, v)$ jsou funkce parametrů u, v, mající spojité parciální derivace druhého řádu. Při výpočtu bude třeba určit Plückerovy souřadnice asymptotických tečen plochy Ω; tyto tečny jsou ovšem nezávislé na volbě parametrů u, v. Proto můžeme zvolit parametrický systém libovolně. Zvolme parametrickou soustavu na ploše Ω tak, aby křivky $u =$ const. byly asymptotické křivky plochy Ω té soustavy, do níž patří křivka C. Potom ve všech bodech uvažované plochy Ω je splněna rovnice[9])

$$x^i_{vv} = \alpha x^i_u + \beta x^i_v + \gamma x^i\,, \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{7}$$

kde α, β, γ jsou funkce parametrů u, v, a kde jsme pro stručnost položili

$$x^i_u = \frac{\partial x^i}{\partial u}\,, \quad x^i_v = \frac{\partial x^i}{\partial v}\,, \quad x^i_{uu} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^2}\,, \quad x^i_{vv} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial v^2}\,.$$

Plückerovy souřadnice tečen parametrických křivek $u =$ const. jsou úměrny determinantům matice

$$\left\| \begin{matrix} x^1, & x^2, & x^3, & x^4 \\ x^1_v, & x^2_v, & x^3_v, & x^4_v \end{matrix} \right\|.$$

Podle vzorce (1) můžeme pro ně psát

$$p^{ij} = \varrho \begin{vmatrix} x^i\,, & x^j \\ x^i_v\,, & x^j_v \end{vmatrix}\,, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4\,; \quad \varrho \neq 0)\,. \tag{8}$$

Podobně pro souřadnice q parametrických křivek $v =$ const. užijeme vzorců

$$q^{ij} = \varrho \begin{vmatrix} x^i\,, & x^j \\ x^i_u\,, & x^j_u \end{vmatrix}\,, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4\,; \quad \sigma \neq 0)\,. \tag{9}$$

Budiž nyní křivka C parametrickou křivkou $u = u_0$, kde u_0 je konstanta. Rovnice křivky C na ploše Ω lze pak psát ve tvaru

$$u = u_0\,, \quad v = t\,,$$

chceme-li písmenem t označit její proměnný parametr. V bodech křivky C jsou funkce, vyskytující se ve vzorcích (7), (8), (9), funkcemi jedné proměnné t a protože $\dfrac{du}{dt} = 0$, $\dfrac{dv}{dt} = 1$, platí pro každou přípustnou funkci $\varphi(u, v)$

$$\varphi^{\cdot} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,. \tag{10}$$

[9]) Viz na příklad *G. Fubini — E. Čech* [1], str. 43—46.

Ukážeme nejdřív, že faktor ϱ ve vzorcích (8) lze tak volit, aby bylo

$$(p^{ij})^{\cdot} = \tau q^{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4\,; \quad \tau \neq 0)\,, \tag{11}$$

čili podle (10)

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial v} = \tau q^{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4; \quad \tau \neq 0)\,. \tag{12}$$

Jednoduchým počtem zjistíme z rovnic (8), že je

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial v} = \varrho \begin{vmatrix} x^i, & x^j \\ x^i_{vv}, & x^j_{vv} \end{vmatrix} + \frac{1}{\varrho}\, p^{ij} \frac{\partial \varrho}{\partial v}\,.$$

Dosazením ze (7) a po jednoduché úpravě s použitím rovnic (8) a (9) máme

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial v} = \tau q^{ij} + p^{ij} \left(\beta + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial v}\right),$$

kde $\tau = \frac{\varrho\alpha}{\sigma}$. Volíme-li tedy ϱ tak, aby bylo

$$\beta + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial v} = 0\,, \tag{13}$$

pak budou splněny rovnice (12) a tedy i (11), jakmile bude $\varrho \neq 0$. Přechodem k parametru t lze podle (10) přepsat rovnici (13) na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\beta + \frac{1}{\varrho}\, \varrho^{\cdot} = 0\,. \tag{14}$$

Tato rovnice má vždy nenulové řešení pro ϱ. Lze tedy volit faktor $\varrho \neq 0$ tak, aby platily vztahy (12), resp. (11). Rovnice (14) tedy umožňuje volit faktor ϱ tak, aby derivovaná plocha plochy tečen křivky C byla tvořena tečnami parametrických křivek $v = \text{const.}$, jak ukazují rovnice (11). Odtud už plyne důkaz věty 2, neboť vzhledem k předpokladu existence dvou různých soustav reálných asymptotických čar na ploše Ω můžeme zvolit parametry asymptotické, takže i druhá soustava křivek $v = \text{const.}$ je tvořena asymptotickými čarami. Lze tedy faktor ϱ volit tak, aby derivovaná plocha tečen křivky C byla tvořena asymptotickými tečnami plochy Ω, jak je o tom ve větě 2 řeč, což jinými slovy znamená, že plocha tečen křivky C je primitivní plochou k ploše asymptotických tečen tam popsané. Tím je věta 2 dokázána.

Věta 3. *Budiž dána nerozvinutelná přímková plocha Ω, jež není kvadrikou. Pak plocha tečen kterékoli její asymptotické křivky, jež není přímkou, je primitivní plochou plochy Ω. Přímky všech primitivních ploch dané plochy Ω tvoří parabolickou přímkovou kongruenci.*

Důkaz. Jedna soustava asymptotických čar plochy Ω je tvořena jejími povrchovými přímkami, druhá soustava je od ní různá, protože předpokládáme, že plocha Ω není rozvinutelná. Protože tato plocha není kvadrikou, obsahuje asymptotické čáry, které nejsou přímkami. Jsou tedy splněny předpoklady věty 2, jejímž přímým důsledkem je první tvrzení obsažené ve větě 3. Druhé tvrzení o parabolické kongruenci je bezprostřední aplikací známé skutečnosti, že tečny asymptotických čar jedné soustavy, jež není soustavou přímek, tvoří parabolickou kongruenci[10]). Tím je věta 3. dokázána. Zároveň je podána konstrukce primitivní plochy k ploše Ω.

Jsou-li rovnice plochy Ω ve tvaru

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(t)\,, \tag{15}$$

pak i rovnice

$$'\mathfrak{q} = f\mathfrak{q}(t)\,, \quad f \neq 0 \tag{16}$$

určují tutéž plochu Ω. Různou volbou faktoru f můžeme zde dostat různé primitivní plochy k ploše Ω. Všimněme si tu jednoho detailu.

Věta 4. *Budiž Ω plocha z věty 3, vyjádřená rovnicemi* (15), *resp.* (16). *Je-li její primitivní plocha Π určena dvěma různými faktory f_1, f_2 v rovnicích* (16), *pak poměr těchto faktorů je konstantní.*

Důkaz. Buďtež $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1(t)$ a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2(t)$ rovnice dvou primitivních ploch Π_1, Π_2 plochy Ω, takže tedy

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1^{\cdot}(t) &= f_1\mathfrak{q}(t)\,, \\ \mathfrak{p}_2^{\cdot}(t) &= f_2\mathfrak{q}(t)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

kde $f_1 \neq 0$ a $f_2 \neq 0$ jsou funkce parametru t. Jsou-li obě plochy Π_1, Π_2 totožné, čili určují-li oba faktory f_1 a f_2 tutéž primitivní plochu, je nutně $\mathfrak{p}_1(t) = \varrho\mathfrak{p}_2(t)$, kde $\varrho \neq 0$ je funkce parametru t. Odtud derivováním plyne

$$\mathfrak{p}_1^{\cdot}(t) = \varrho^{\cdot}\mathfrak{p}_2(t) + \varrho\mathfrak{p}_2^{\cdot}(t)\,.$$

Po dosazení ze (17) a po jednoduché úpravě máme

$$(f_1 - \varrho f_2)\,\mathfrak{q}(t) = \varrho^{\cdot}\mathfrak{p}_2(t)\,.$$

Protože však Ω je plocha nerozvinutelná a Π_2 je plocha rozvinutelná, nejsou obě tyto plochy totožné a poslední rovnice nemůže být tedy splněna jinak než tak, že se anulují oba koeficienty

$$f_1 - \varrho f_2 = 0\,, \quad \varrho^{\cdot} = 0\,.$$

Druhá z těchto podmínek dává $\varrho =$ const. a potom z první z nich plyne $\dfrac{f_1}{f_2} = \varrho =$ const., čímž je věta 4 dokázána.

Věta 4 udává jen podmínku nutnou pro vztah dvou různých faktorů, jež vedou k téže ploše primitivní. Ale tato podmínka není postačující, jak ukazuje následující příklad.

V pravoúhlých souřadnicích nehomogenních x, y, z vyšetřujeme dvě šroubovice o rovnicích

$$x = r_a \cos t\,, \quad y = r_a \sin t\,, \quad z = kt\,, \quad (a = 1, 2)\,, \tag{18}$$

[10]) Viz na příklad *V. Hlavatý* [4], sešit I., str. 113, věta (3,2).

kde $r_1 \neq r_2$ a k jsou nenulové konstanty a parametr t probíhá interval J. Plochy tečen těchto šroubovic mají v Plückerových souřadnicích tyto rovnice:

$$\begin{aligned} p_a^1 &= r_a \sin t\,, \quad p_a^4 = kr_a (\sin t - t\cos t)\,, \\ p_a^2 &= -r_a \cos t\,, p_a^5 = -kr_a (\cos t + t \sin t)\,, \\ p_a^3 &= -k\,, \quad\quad p_a^6 = r_a r_a\,[11])\,, \quad (a = 1, 2)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

To jsou při $r_1 \neq r_2$ dvě různé plochy, jež však mají tutéž společnou plochu derivovanou, jejíž rovnice jsou

$$\begin{aligned} q^1 &= f\cos t\,, \quad q^4 = fkt \sin t\,, \\ q^2 &= f \sin t\,, \quad q^5 = -\,fkt \cos t\,, \quad (f \neq 0)\,, \\ q^3 &= 0\,, \quad\quad q^6 = 0\,, \end{aligned} \tag{20}$$

jak se snadno přesvědčíme pouhým derivováním rovnic (19). Položíme-li v rovnicích (20) $f = r_1$, resp. $f = r_2$, dostaneme první, resp. druhou z ploch (19) jako primitivní k ploše (20), při čemž poměr těchto faktorů $\frac{r_1}{r_2} = c$ je konstantní. (Plocha (20) je šroubový konoid pravoúhlý, v našem případě je to plocha hlavních normál první i druhé šroubovice (18), na níž obě tyto šroubovice jsou ovšem asymptotickými křivkami.)

K úvahám tohoto odstavce připojme ještě poznámku. Věta 3 zaručuje existenci primitivní plochy k ploše Ω, která je tam podrobně popsaná, podává i konstrukci takové primitivní plochy, ale nedává methodu pro výpočet Plückerových souřadnic jejích přímek. V podstatě jde o úlohu, k daným šesti funkcím najít takové primitivní funkce, které splňují rovnici (2) základní K-kvadriky, což není problém právě elementární. To nepřekvapuje, uvědomíme-li si, že celá úloha je ekvivalentní s hledáním asymptotických čar na ploše Ω, což samo o sobě vede na rovnici Riccatiho, kterou obecně nelze řešit pouhými kvadraturami. Je to samostatný problém z matematické analysy, kterým jsem se však nezabýval.

4. Obraťme se pro úplnost k případům, které jsme v předcházejícím odstavci vyloučili.

Věta 5. *K regulární kvadratické ploše neexistuje žádná plocha primitivní.*

Důkaz je tu nepřímý. Předpokládejme, že k regulární kvadratické ploše Ω existuje primitivní plocha Π. Mohou nastat dvě možnosti.

1. Je-li Π plochou tečen prostorové křivky C, pak podle věty 1 je C asymptotickou křivkou na ploše Ω, což je ve sporu s předpokladem, neboť na kvadratické ploše jsou asymptotické čáry vesměs přímkami. Tento případ tedy nastat nemůže.

---

[11]) Píši zde součin $r_a r_a$ místo obvyklé mocniny z toho důvodu, aby nenastala kolise s označením indexů souřadnic, jež píši vpravo nahoře, abych zachoval symboliku citovaných prací [2] a [4].

2. Je-li Π plocha tečen rovinné křivky nebo kužel, pak každá její derivovaná plocha (a tedy i plocha Ω) je rozvinutelná. Ale regulární kvadrika Ω není nikdy rozvinutelná. I druhá možnost tedy vede ke sporu a věta 5 je tím dokázána.

Věta 6. *K ploše tečen prostorové křivky neexistuje plocha primitivní.*

Důkaz nepřímý je obdobný předcházejícímu; danou plochu tečen označme Ω a předpokládejme, že k ní existuje plocha primitivní Π.

1. Je-li Π plochou tečen prostorové křivky, pak každá její derivovaná plocha, tedy i Ω, je nerozvinutelná (viz odst. 2), což je spor s předpokladem.

2. Je-li Π kuželem, resp. plochou tečen křivky rovinné, je každá její derivovaná plocha opět kuželem, resp. plochou tečen rovinné křivky, což je zase spor s předpokladem, že Ω je plocha tečen křivky prostorové. Neexistuje tedy primitivní plocha k ploše Ω, čímž je věta 6 dokázána.

Existenci primitivních ploch v posledních dvou příkladech lze nejjednodušeji prokázat výpočtem; geometricky jsou tyto případy málo zajímavé.

Věta 7. *Budiž Ω kužel o vrcholu V. Primitivní plocha plochy Ω je opět kužel o vrcholu V.*

Věta 8. *Budiž Ω množství tečen rovinné křivky* C. *Primitivní plocha plochy Ω je opět množství tečen rovinné křivky, jež leží v teže rovině jako křivka* C.

Důkazy obou vět 7 a 8 lze provést společně. Je-li totiž plocha kuželem (resp. množstvím tečen rovinné křivky C), pak souřadnice $\mathfrak{q}(t)$ běžné její tvořící přímky lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathfrak{q}(t) = m_1(t)\,\mathfrak{c}_1 + m_2(t)\,\mathfrak{c}_2 + m_3(t)\,\mathfrak{c}_3\,, \tag{21}$$

kde $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ jsou tři pevné lineárně nezávislé přímky, jdoucí vrcholem V (resp. ležící v rovině křivky C)[12]; přitom $m_a(t)$ jsou pro $a = 1, 2, 3$ funkce parametru t, o nichž předpokládáme, že k nim existují primitivní funkce $M_a(t)$, takže $M_a^{\cdot}(t) = m_a(t)$. Rovnice

$$\mathfrak{p}(t) = M_1(t)\,\mathfrak{c}_1 + M_2(t)\,\mathfrak{c}_2 + M_3(t)\,\mathfrak{c}_3 \tag{22}$$

určují zřejmě primitivní plochu k ploše (21). Derivováním (22) dostaneme totiž (21). Protože (22) jsou rovnice téhož typu jako (21), je plocha jimi určená opět kuželem o vrcholu V (resp. množstvím tečen rovinné křivky, která leží v téže rovině jako křivka C).

Závěrem ještě několik slov. Není snad třeba ani podrobně odůvodňovat, že vlastnosti, vyslovené ve větě 3 a ve větách 5—8 jsou invariantní vůči projektivní transformaci v prostoru S_3. Přejdeme-li dále od Plückerových souřadnic k jiným projektivním homogenním souřadnicím v S_5, bude mít každá přímka nové souřadnice $u^i (i = 1, \ldots, 6)$, jež s Plückerovými souřadnicemi p^i souvisí vztahem

$$u^i = \sum_{j=1}^{6} c^i_j p^j\,, \qquad (i = 1, \ldots, 6)\,,$$

---

[12]) Viz *V. Hlavatý* [4], sešit I., str. 44.

kde předpokládáme, že c_j^i jsou reálné konstanty, pro které je Det $|c_j^i| \neq 0$. Derivace souřadnic p^i se transformují ovšem stejnou transformací. I když se přitom změní rovnice (2) K-kvadriky, zůstane definice derivovaných, resp. primitivních ploch nezávislá na této transformaci. Proto mají tyto pojmy geometrický obsah.

LITERATURA

[1] *G. Fubini - E. Čech:* Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces (Gauthier-Villars et C[ie], Paris 1931.)

[2] *K. Havlíček:* Rozvinutelné plochy v přímkové diferenciální geometrii. (Rozpravy II. třídy České akademie, ročník LIII, číslo 42, Praha 1944.)

[3] *V. Hlavatý:* Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. (Jednota čs. matematiků a fysiků, Praha 1937.)

[4] *V. Hlavatý:* Differenciální přímková geometrie. (Česká akademie, Praha 1941.)

Резюме

ЗАМЕТКА К ЛИНЕЙЧАТОЙ ГЕОМЕТРИИ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Карел Гавличек (Karel Havlíček), Прага.

(Поступило в редакцию 14/I 1955)

Если линейчатые координаты Плюкера обозначены символом $\mathbf{p}$, то каждая линейчатая поверхность дана уравнениями $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, где $\mathbf{p}(t)$ — функции параметра t. Для того, чтобы линейчатая поверхность, заданная уравнениями

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \tag{1}$$

была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы производные $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$ определяли опять-таки линейчатую поверхность, уравнения которой можно писать в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Поверхность (2) называем *производной* поверхностью развертывающейся поверхности (1); наоборот, развертывающуюся поверхность (1) называем *примитивной* поверхностью к поверхности (2).

Но поверхность (1) определена также уравнениями $'\mathbf{p} = f\,\mathbf{p}(t)$, где f — коэффициент пропорциональности координат Плюкера. Отсюда следует, что к поверхности (1) существует бесконечно много производных поверхностей. Аналогичным способом получим бесконечно много поверхностей, примитивных к данной поверхности.

Важнейшие свойства этих поверхностей следующие:

кривая возврата развертывающейся поверхности является на каждой из ее производных поверхностей асимптотической кривой.

Наоборот: *Пусть Ω — произвольная линейчатая поверхность, на которой имеются асимптотические линии, не являющиеся прямыми; тогда поверхность, образованная касательными к любой из этих асимптотических линий, является примитивной поверхностью к поверхности Ω.*

Прямые всех примитивных поверхностей к поверхности Ω образуют параболическую линейчатую конгруэнцию. Аналогично и прямые всех производных поверхностей данной развертывающейся поверхности образуют также параболическую линейчатую конгруэнцию.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZUR LINIENGEOMETRIE DER ABWICKELBAREN FLÄCHEN

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Vorgelegt am 14. Jänner 1955.)

Sind Plückersche Linienkoordinaten einer Geraden mit $\mathfrak{p}$ symbolisiert, dann ist jede Regelfläche durch die Gleichungen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t)$ gegeben, wo $\mathfrak{p}(t)$ Funktionen von t sind. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Regelfäche

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t) \tag{1}$$

abwickelbar sei, ist: die Ableitungen $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ stellen wieder eine Regelfläche dar, deren Gleichungen man in der Form

$$\mathfrak{q} = \frac{d\mathfrak{p}(t)}{dt} \tag{2}$$

schreiben kann. Die Fläche (2) nennen wir *abgeleitete* Fläche der abwickelbaren Fläche (1). Umgekehrt die abwickelbare Fläche (1) nennen wir *primitive* Fläche der Fläche (2).

Die Fläche (1) wird aber auch durch die Gleichungen $'\mathfrak{p} = f\mathfrak{p}(t)$ bestimmt, wobei f ein Proportionalitätsfaktor der Plückerschen Koordinaten bedeutet. Daraus folgt, dass zur gegebenen Fläche (1) unendlich viele abgeleiteten

Flächen bestehen. Ganz ähnlich bekommt man zur gegebenen Regelfläche unendlich viele primitiven Flächen.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Flächen kann man folgendermassen zusammenfassen:

Die Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche ist eine Asymptottenlinie ihrer abgeleiteten Fläche.

Umgekehrt: *Sei Ω eine beliebige Regelfläche, welche Asymptotenlinien, die von Geraden verschieden sind, enthält; dann ist die Tangentenfläche jeder diesen Asymptotenlinien die primitive Fläche der Fläche Ω.* Daraus folgt:

Die Geraden aller primitiven Flächen der Fläche Ω bilden eine parabolische Geradenkongruenz. Und ähnlich die Geraden aller abgeleiteten Flächen einer abwickelbaren Fläche bilden auch eine parabolische Geradenkongruenz.