Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1950)

O ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC METODOU SÍTÍ

I. BABUŠKA, Praha a L. MEJZLÍK, Brno.

(Došlo dne 10. února 1955.) DT:517.944

Metoda sítí se dnes stává jednou z nejužívanějších metod numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic. Velká část nejdůležitějších technických problémů vedoucích na parciální dif. rovnice je dnes řešena touto metodou. Užití velkých matematických strojů staví metodu sítí ještě více do popředí. V tomto článku bychom chtěli shrnout nejzávažnější práce tohoto oboru a upozornit praktiky na rozsáhlou theoretickou matematickou problematiku související s touto metodou.

Obsah

I. Úvod

1. Hlavní myšlenka metody sítí. Hlavní myšlenka metody sítí je ve své podstatě velmi prostá. Při řešení diferenciální rovnice nahradíme derivace diferencemi a řešíme potom soustavu takto vzniklých algebraických lineárních diferenčních rovnic. Řešíme je metodami pro řešení soustavy lineárních rovnic. (Theorie diferenčních rovnic zde však nenachází aplikace.)

Hledané řešení diferenciální rovnice má rozmanitý fysikální význam. Může popisovat na př. rozdělení tepla nebo napětí v tělese, šíření vln v prostoru atd.

Na základě dosažených výsledků usuzuje technik dále o chování konstrukce a provádí dimensování atp. Veškeré tyto závěry jsou ovlivněny řadou technických okolností, které nejsou přesně zachyceny ve výpočtu. Jsou ovlivněny tím, že některé závislosti a vztahy zjednodušujeme třeba i na úkor správnosti, aby bylo vůbec možno přijít k nějakým numerickým závěrům. Není proto výjimkou, že i přesné theoretické řešení se od skutečnosti poměrně dost liší (o 10—20—30 %). Pak ovšem je zbytečné provádět výpočet s přehnanými nároky na přesnost, ale je velmi užitečné znát odhad chyby, které se dopustíme při výpočtu prováděném určitým způsobem, aby výpočet nebyl zbytečně pracný. (Jde na př. o to, abychom nevolili zbytečně hustou síť, neprováděli příliš mnoho iteračních kroků a pod.)

Hlavní myšlenku metody sítí lze v jednotlivých případech interpretovat i fysikálně (myšlenka převedení na rošty a pod.). Srv. na př. Marcus [1]. Intuitivně má pěkně rozvinutou myšlenku převodu diferenciálních rovnic na diferenční také Southwell [6], [9].

2. Rozsah použitelnosti, výhody a nevýhody metody sítí. a) Z hlavní myšlenky metody sítí jest patrno, že metoda je použitelná u celkem libovolných typů parciálních diferenciálních rovnic. Zatím se jí však většinou používá jen u lineárních diferenciálních rovnic, neboť po nahrazení derivací dostaneme soustavu lineárních rovnic, na jejichž řešení máme vypracovánu řadu metod. U nelineárních rovnic naproti tomu narážíme na potíže jak technického rázu, tak na některé nevyjasněné otázky rázu theoretického (konvergenční otázky a pod.). Pro řešení nelineárních diferenčních rovnic užil metody sítí Fox [4].

b) Dále je celkem patrno, že metoda sítí je tím vhodnější, čím hladší jsou funkce a derivace, které vyjadřujeme diferenčním způsobem. Řada otázek souvisící s problémy různých nespojitostí není dnes ani prakticky ani theoreticky uspokojivě řešena. Na štěstí se v technické praxi podobné problémy vyskytují zřídka. Viz Motz [2].

c) Důležitou a prakticky významnou otázkou je problém nekonečných definičních oblastí, které se v praxi poměrně často vyskytují. Takovou oblastí může být na př. polorovina nebo rovina s výřezem a pod. Síť, která by konečnými oky pokryla celou oblast, by měla nekonečně (spočetně) mnoho ok a tím bychom dostali soustavu o nekonečně mnoha neznámých. Naopak, abychom zachovali konečný počet rovnic, museli bychom se uchýlit k okům o nekonečné velikosti, čím se však z celkem pochopitelných důvodů značně sníží přesnost. Zdá se nám, že není ani praktického ani theoretického důvodu k tomu, abychom užívali nekonečných ok. Doporučujeme proto užívat v podstatně systému nekonečně mnoha rovnic, které se řeší metodou redukované soustavy (srv. Kantorovič a Krylov [1], kde je také uvedena příslušná literatura), která spočívá v tom, že položíme rovny nule všechny neznámé s výjimkou vybraného konečného počtu. (Viz ještě dále technickou intepretaci.)

Někdy se však postupuje tak, že nějakou jinou metodou než metodou sítí určíme chování hledané funkce v okolí nekonečna, čehož potom užijeme v kombinaci s metodou sítí. Jinými slovy to lze vyjádřit také tak, že místo nekonečné oblasti uvažujeme definiční oblast konečnou a okrajové podmínky předepíšeme přibližně. Uvedeme technický případ laminárního permanentního proudění podzemní vody pod vodní stavbou. Problém vede na parciální diferenciální rovnici druhého řádu v polorovině. Z theoretických úvah i praktických zkušeností plyne, že voda je v dostatečné hloubce v klidu. Proto můžeme zavést jakousi „fiktivní" hranici, na níž bude okrajová podmínka vyjadřovat tu skutečnost, že voda je v klidu. V daném příkladě můžeme postupovat také jinak: V dostatečné vzdálenosti budou proudnice prakticky kružnicemi, jak plyne z analysy vyjádření funkce v okolí nekonečna, a tak můžeme „fiktivní" hranici vytvořit ve tvaru kružnice s předepsaným rovnoměrným spádem potenciálu.

d) Použitelnost metody sítí je dnes omezena také možností řešit velké soustavy lineárních (diferenčních) rovnic.[1] V literatuře se udává maximální zvládnutelný počet uzlových bodů sítě (který je totožný s počtem lineárních rovnic) pro řešení Dirichletova problému relaxační metodou kolem 4000. Pro řešení biharmonického problému se udává tento počet asi na 400. Je třeba, aby řešitel těchto velkých sítí měl značnou praxi a zkušenost, aby vůbec mohl tento problém zvládnout; ještě vhodnější je, aby se práce zúčastnila celá skupina počtářů.

Autoři tohoto článku mají větší zkušenosti pouze s přímými metodami řešení. Přímé řešení rovnic o 150 neznámých pro problém Laplaceovy rovnice se podařilo provést jednomu z autorů bez zvláštních potíží asi během 100 pracovních hodin při naprosto dostatečné přesnosti.

Byl řešen rovněž biharmonický problém převedený na 65 diferenčních rovnic.[2]

Domníváme se, že by bylo možno řešit přímými metodami v přijatelném čase systém asi o 300 až 400 neznámých pro Laplaceovou rovnici a do 150 neznámých při biharmonickém problému. Při tak velkých systémech rovnic je důležitý účinný systém kontroly. (Viz dále kapitolu o řešení diferenčních rovnic.) S hlediska omezených možností řešit rozsáhlé systémy rovnic je dnes metoda sítí prakticky, při nejmenším u nás, omezena na problémy rovinné.

e) Velkou předností oproti druhým metodám je nezávislost způsobu užití metody sítí vzhledem k tvaru definiční oblasti a okrajovým podmínkám.

f) Další výhodou je velká jednoduchost metody sítí, která je velmi málo náročná na odbornou kvalifikaci řešitele. Vyšší kvalifikace v podstatě vyžaduje jedině návrh sítě, převod diferenciální rovnice na diferenční a odhad chyby

---

[1]) Zatím nemají autoři zkušenosti s použitím samočinných počitačů. Proto veškeré úvahy se týkají možností daných obyčejnými kalkulačními stroji.

[2]) Výpočet byl proveden na stroji Rheinmetall-SASL.

(pokud je proveditelný). Zbytek je prací více méně mechanickou a pouze při relaxacích rozsáhlejších systémů je třeba větší zkušenosti — ne však vyšší kvalifikace.

Návrh sítě a sestavení rovnic je také prací nepříliš složitou a zvládne ji každý vysokoškolsky vzdělaný technik. Pouze při analyse přesnosti je třeba větších matematických znalostí.

Uvedená přednost je pro praxi velmi značná a metoda sítí poměrně zatlačuje jiné metody pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, a to i tehdy, když by snad jiné analytické metody byly numericky výhodnější.

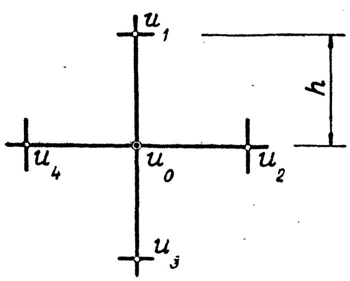
g) Nevýhody metody sítí jsou však dodnes také velké. Je to především množství počtářských prací. Jako příklad uveďme, že pro vyřešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu dvou proměnných pomocí sítí o 100 uzlech přímými metodami je třeba asi 10 000 početních výkonů.

Theoreticky je metoda sítí málo propracována. Řada zásadních otázek je dodnes buď vůbec neřešena, nebo řešena naprosto neuspokojivě.

Přesto jsme však přesvědčeni, že pokrok ve stavbě samočinných počitačů zvětší ještě význam metody sítí.

II. Způsob převodu na diferenční rovnice

Převedení derivací na diference může být provedeno několika způsoby. Nejobvyklejší metodou je interpolační vyjádření derivací. Tato metoda záleží v tom, že několika body sítě se proloží interpolační polynom a počítá se derivace tohoto polynomu.



Obr. 1.

Derivaci dané funkce lze takto vyjádřit pomocí diferencí a nějakého zbytku, který závisí na derivacích uvažované funkce. Tak na př. pro Laplaceův operátor platí (obr. 1):

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{h^2}\,[u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0] + R_0$$

a

$$R_0 = \frac{2h^2}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \frac{2h^4}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right) + \ldots .$$

Uvedený zbytek pak zanedbáme a dostáváme diferenční vyjádření Laplaceova operátoru. (Podrobnější výklad viz na př. Kantorovič - Krylov [1].) Laplaceův operátor jsme zde vyjádřili diferenčním způsobem pomocí pěti bodů, při čemž chyba je řádu h^2. Užijeme-li více bodů, můžeme zvýšit řád chyby, což zpravidla znamená její zmenšení. (Srv. práce Š. E. Mikeladzeho [1], [2], [10],

[12].) Jak zvýšiti přesnost tímto způsobem, ukazuje také Southwell [11]. Odhady zbytků viz také COLLATZ [2].

O zavedení zbytků do výpočtu se pokusil Fox [4]. Podobným způsobem odvozují vzorce také PANOV [5], BICKLEY [2], [3], VARVAK [14]a jiní.

Druhý způsob odvození diferenčních vzorců může být takový, že hledáme jednotlivé koeficienty v diferenčních výrazech tak, aby výraz byl přesný pro nejširší třídu funkcí.

Z dalších způsobů se někdy vyskytuje i odvození fysikální a pod.

ALBRECHT [1] užívá pro nahrazení operátoru Δu a $\Delta\Delta u$ Taylorova rozvoje ve zvlášť přehledném tvaru a podává vzorce různé přesnosti pro různé typy sítí.

Ve většině knih a učebnic jsou udávány diferenční vzorce pro pravidelné sítě. Vzorec pro nepravidelné sítě viz na př. MEJZLÍK [1] a Varvak [14].

III. O typech sítí

A) **Dvojdimensionální sítě.** Metoda sítí zde našla největší uplatnění a proto pojednáme o tomto případu podrobněji. Tvar sítě je ovlivněn několika okolnostmi. Je to tvar integrační oblasti, druh diferenciální rovnice a okolnosti, nutící nás ke změně hustoty uzlových bodů.

1. Pravoúhlé sítě. Pravoúhlé sítě patří k nejdéle užívaným druhům sítě a dnes se používají nejčastěji. Můžeme je dělit na

α) nepravidelné (obr. 2a, 2b),

β) obdélníkové,

γ) čtvercové.

α) Nepravidelné sítě. Tento druh sítě je používán velmi zřídka. Může mít však velké přednosti ve dvou případech:

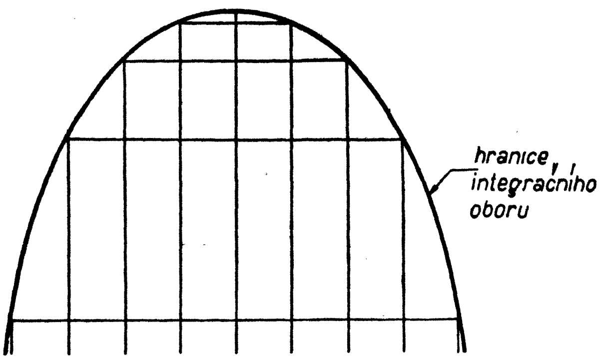
(1) Nepravidelnou sítí dosáhneme toho, že uzly sítě leží na hranici a okrajové podmínky jsou v souhlase s volbou této sítě (viz obr. 2a),

(2) můžeme touto sítí provádět zhušťování (viz obr. 2b).

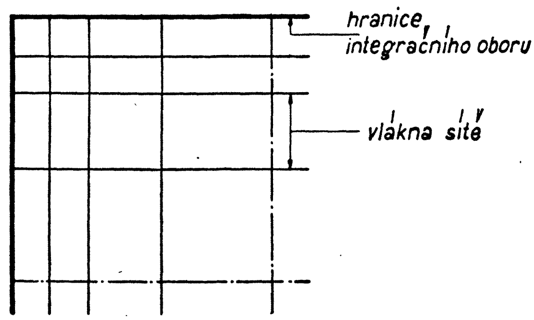
Nepravidelné sítě najdeme v literatuře poměrně zřídka. (Srv. na př. REKTORYS [1].) Za jediný případ můžeme považovat nepravidelnou síť vzniklou nepravidelnými oky při hranici (viz obr. 2c), kde body označené čísly 1 až 6 můžeme považovat za nepravidelné. Ve snaze zjednodušit relaxace omezuje se někdy jistá přesnost v těchto okrajových bodech a uvažují se pro tyto body diferenční rovnice jako pro body pravidelné. (Srv. BRILLA [1], Southwell [9], ALLEN [2]). Různé způsoby jiných úprav při okrajích uvádí ve svých pracích Panov [6], GILLES [1], Fox [1], [7], Fox - GOODWIN [1], Fox, HUSKEY, WILKINSON [1], Fox, Southwell [1], [2]. Poznamenejme, že největší komplikace nastávají při těch okrajových podmínkách, v nichž se vyskytují parciální derivace (na př. Neumannův a biharmonický problém).

β) **Obdélníkové sítě.** Tyto sítě nenašly velkého uplatnění. Užívá se jich však ve speciálních případech. Uveďme na př. rovnici

$$k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 ,$$



Obr. 2a.



Obr. 2b.

kde k_2 a k_1 jsou kladné konstanty. Zde zvolíme obdélníkovou síť tak, abychom zajistili jednak největší možnou přesnost a mimo to, abychom dostali jednoduchý tvar (stejné koeficienty) diferenčního vzorce.

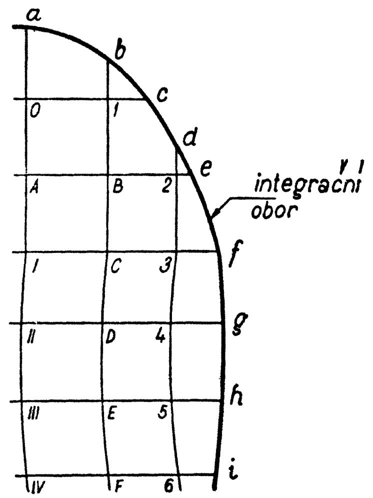
γ) **Čtvercové sítě.** Tyto sítě nalezly velmi široké uplatnění. Odhadujeme, že 90 % všech řešených problémů je řešeno pomocí čtvercové sítě. Výhoda čtvercové sítě spočívá v jednoduchých tvarech diferenčních vzorců pro nejčastěji užívané diferenciální rovnice.

Upozorněme zde zvláště na práce: Bickley [3], Albrecht [1], Varvak [14], Panov [5].

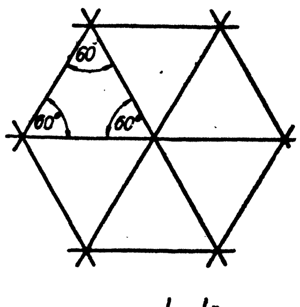
V případě čtvercových sítí se snažili někteří autoři (Southwell [9], Bickley [2] a jiní) zvýšit přesnost v některých speciálních případech (rovnice $\Delta\Delta u = f$ a $\Delta u = f$) různými jednoduchými způsoby.

2. Rovnoběžníkové sítě. Tyto sítě jsou zobecněním pravoúhlých sítí. V obecném pojetí se zabývá těmito sítěmi na př. LJUSTERNIK [4]. Zvláštní význam zde mají sítě trojúhelníkové a to pravidelné (viz obr. 3a) a nepravidelné (viz obr. 3b). Nepravidelné sítě se používají zřídka. Častější jsou sítě pravidelné. (Srv. na př. Southwell [10], Albrecht [1], JUŠKOV [1].) V diferečních výrazech se vyskytuje více bodů a proto se získává větší přesnost.

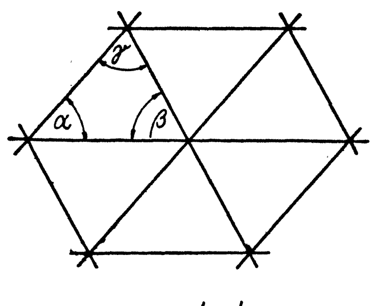
3. Šestiúhelníkové sítě. Zde opět přicházejí v úvahu sítě pravidelné a nepravidelné. Pokud je nám známo, nepravidelné sítě nebyly prakticky použity.



Obr. 2c.



Obr. 3a.

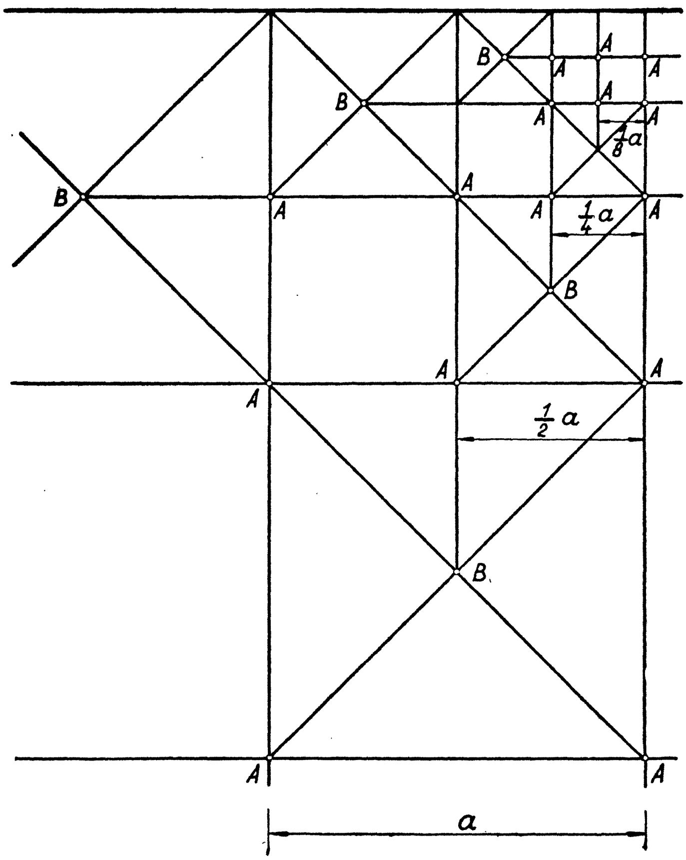


Obr. 3b.

Pravidelné šestiúhelníkové sítě mohou vzniknout z pravidelné trojúhelníkové sítě, což je jistou výhodou, neboť můžeme postupovat tak, že najdeme nejprve při relaxačních metodách přibližný průběh hledané funkce užitím šestiúhelníkové sítě, který potom dále zpřesníme pomocí trojúhelníkové sítě.

Další výhodou je, že se v diferenčních výrazech vyskytuje málo členů. Na druhé straně je to nevýhoda, neboť se tím snižuje přesnost.

4. Polární sítě. V polárních sítích bylo vyřešeno jen velmi málo problémů. Mohou být však vhodné pro některé speciální oblasti, jako je výseč, mezikruží a pod. Diferenční vzorce základních diferenciálních operátorů jsou poměrně složité. (Srv. na př. Varvak [14], Mejzlík [1].)



Obr. 4.

5. Nepravidelné sítě. MAC NEAL [1] na základě analogie s elektrickým obvodem odvodil vztahy, podle kterých se dají řešit analogicky některé typy diferenciálních rovnic.

Nepravidelné sítě se užívají prakticky na stycích integračních oborů, kde se mění tvar diferenciální rovnice. Jiným případem jsou sítě o problémech s předepsanými derivacemi na hranici. Docílíme-li, že je síť kolmá na hranici, můžeme někdy zjednodušit numerický výpočet. V takovém případě ovšem navazuje tato nepravidelná síť uvnitř na síť pravidelnou, většinou čtvercovou.

6. Dvojité sítě. Gilles [1] navrhoval pro některé speciální problémy metodu dvojité sítě, která spočívá v tom, že se problém vedoucí na rovnici jistého řádu s jednou neznámou funkcí převádí na problém popsaný soustavou rovnic nižších řádů s několika neznámými funkcemi a pro každou hledanou funkci se užívá zvláštní sítě.

7. Zhušťování sítí. Již dříve jsme se zmínili o tom, že hustota uzlů sítě má vliv na přesnost řešení, a také o tom, jak roste množství potřebné numerické práce v závislosti na množství bodů sítě. Proto je výhodné zhušťovat sítě pouze v místech, kde nám na přesnosti více záleží. Zhuštění provedeme nejsnáze vložením pruhu nepravidelné sítě. To má ovšem své nevýhody, neboť se v obecném případě komplikují diferenční rovnice.

Nejsnadněji se změní hustota při čtvercové síti. Zhuštění můžeme provést na př. užitím diagonální sítě, jak navrhuje Allen a Denis [3]. Příklad je na obr. 4.

B) **Problémy trojdimensionální a vícedimensionální.** Aplikace metody sítí na problémy trojdimensionální je po stránce theoretické stejná jako v případě dvojdimensionálním. V případě eliptické rovnice narůstá však počet uzlových bodů do nezvládnutelného počtu. Proto zde nenalezla metoda sítí zatím většího uplatnění.

Některé zmínky o trojdimensionálních problémech jsou v pracích Varvaka [16], Allena a Dennise [2]. Případ parabolických rovnic (dva argumenty polohy a jeden času) je však naopak dobře řešitelný. V tomto případě hrají totiž jednotlivé časové intervaly podobnou úlohu jako jednotlivé iterační kroky dvojdimensionálního problému.

Technicky lze tyto parabolické rovnice interpretovat na př. jako popis nepermanentního laminárního rovinného pohybu tekutin nebo proudění tepla v rovinných tělesech a pod. Čtenáře zde odkazujeme na práce autorů: Dussinbere [1], [2], Emmons [1], Milne [1], Allen, Severn [1], Rektorys [1], Milne-Thomson [1] atd.

IV. Zavádění okrajových podmínek

Okrajové podmínky se zavádějí různým způsobem v závislosti na druhu okrajového problému. Omezíme se zde pouze na podrobnější popis postupu pro případ Dirichletova problému.

Courant, Friedrichs a Lewy [2] navrhují formulovat okrajové podmínky tak, že se užije pouze pravidelných bodů sítě. V těch se předepíše hodnota, kterou by v nich nabývala pevná, celkem však libovolná spojitá funkce definovaná v celém oboru a nabývající na hranici předepsaných hodnot. Podobným způsobem postupuje i Ljusternik [4].

Tento způsob je prakticky nevýhodný a obyčejně se užívá nepravidelné sítě v okolí hranice, jak jsme se o tom zmínili v odstavci o nepravidelných pravoúhlých sítích, s případným dalším zjednodušením, o němž jsme se již také zmínili.

Podobným celkem jednoduchým způsobem se zavádějí okrajové podmínky ve všech případech diferenciálních rovnic.

V. Konvergenční otázky metody sítí

Konvergenční otázky metody sítí nejsou dosud prostudovány tak, jak by si zasloužily. Studium se omezilo zejména na speciální typy rovnic. Jedině případ Dirichletova problému je poměrně dobře prostudován.

Konvergenčními otázkami se zabývají na př. Courant, Friedrichs, a Lewy ve své práci [2]. Vycházejí v podstatě z variačních principů, a proto na př. pro případ Dirichletova problému předpokládají konečný Dirichletův integrál $\int\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \mathrm{d}\Omega$. Poněkud jiným způsobem provádí důkaz v případě Dirichletova problému Philips a Wiener [1]. Ljusternik [7] ve své práci dokazuje existenci řešení Dirichletova problému právě tím, že dokáže konvergenci přibližných řešení nalezených metodou sítí při postupném zhušťování sítě k přesnému řešení.

Petrovskij [3] předložil velmi obecný důkaz konvergence. Dokázal, že z posloupnosti síťových funkcí, t. j. hodnot přibližných řešení, možno vybrat posloupnost, která konverguje stejnoměrně k harmonické funkci, jež vyhovuje okrajové podmínce v každém regulárním bodě ve smyslu existence superharmonického barieru. Jestliže se hranice skládá jedině z regulárních bodů v uvedeném smyslu, potom celá posloupnost konverguje k řešení Dirichletova problému.

Uvedené práce se zabývají problémem Dirichletovým pro celkem obecné oblasti. Případ čtverce, resp. obdélníku byl studován značně podrobněji vzhledem k tomu, že lze napsat explicite jak řešení přesné, tak i diferenční pomocí Fourierových řad (srv. Le Roux [1].[3]) V poslední době bylo zde dosaženo jistých výsledků. Tak Walsh a Young [3] studovali rychlost konvergence v závislosti na okrajových podmínkách. Přišli k závěru, že pro jisté (spojité) okrajové podmínky je konvergence pomalejší než h^α ($\alpha > 0$ libovolně pevné).

Naopak, má-li okrajová podmínka dvě spojité derivace, konvergence má rychlost h^2. Pro některé smíšené okrajové problémy eliptických rovnic dokazuje konvergenci Batschelet [1]. Předpokládá však omezenost čtvrtých derivací hledané funkce. Konvergenčními otázkami pro parabolické rovnice se

[3]) Tyto vzorce formálně poněkud v jiném tvaru udává Hyman [1].

zabývá Kamynin [1], [2]. Jistou konvergenční otázku souvisící s rovnicí vedení tepla řešil také Rektorys [1]. Viz také Petrovskij [2].

VI. Problém odhadu chyby

Problém odhadu chyby je jednou z velmi důležitých matematických otázek. Uspokojivý odhad není dodnes znám. V praxi často užívaný odhad Rungeho — odhad metodou dvojnásobného kroku — je naprosto nedostatečně matematicky fundován a jeho platnost je problematická. (Odvození tohoto vzorce viz na př: Panov [6].)

Pravděpodobně theoreticky jedině fundovaný vzorec pro obecné oblasti je odhad Geršgorinův [1], (srv. také Kantorovič - Krylov [1]). Největší vadou tohoto vzorce je však to, že je nutno znát horní odhad parciálních derivací až do 4. řádu. Collatz doporučil odhadnouti tyto derivace prakticky pomocí diferencí síťového řešení. Problematičnost tohoto postupu vynikne z toho, že i v naprosto „rozumných" a technicky důležitých problémech je čtvrtá derivace neomezená.

Podobným způsobem jako Geršgorin postupuje i Batschelet [1] v případě eliptické diferenciální rovnice.

Pro speciální oblast čtverce, díky vzorcům Le Rouxe, lze provést odhad chyby důkladněji. Těmito problémy se zabývali Walsch a Young [1] a Wasson [1]. Odhadem chyby v tomto případě se zabývá Rosenbloom [1].

VII. Řešení diferenčních rovnic

Způsob řešení velké soustavy lineárních rovnic ovlivňuje do velké míry praktickou použitelnost metody sítí.

V zásadě můžeme dělit způsoby řešení systémů lineárních rovnic na metody přímé a nepřímé. Přímými metodami rozumíme metody charakteru eliminačního, nepřímými metodami metody charakteru iteračního. Přímých metod se užívá tam, kde systém rovnic počítáme pro více pravých stran, nebo v těch případech, při nichž iterační řešení pomalu konverguje. Podrobnější rozbor, kdy jsou výhodnější metody přímé (ve smyslu pracnosti) než metody nepřímé a naopak, není autorům znám. Ve většině prací je rozhodující subjektivní stanovisko.

O řešení lineárních rovnic viz práce Forsythe [1] s rozsáhlým seznamem literatury (srv. také FaděJeva [1]).

1. Přímé metody. Tyto metody mají eliminační charakter a je možno je provádět prakticky různými způsoby, na př. převodem na trojúhelníkovou matici, orthonormalisací, skupinovými eliminacemi, Milneho metodou (srv.

Milne [2]) a pod. Podstatnou úlohu zde hraje soustava kontrol. Výhodou je, že numerické práce dají se velmi zmechanisovat, takže je mohou provádět méně kvalifikované síly.

Do přímých metod můžeme zahrnout i metody, které jsou blízké eliminačním metodám a které jsou speciálně vypracovány pro rovnice odpovídající metodě sítí. Viz na př. Hyman [1] neb RUNGE [1]. Pro speciální rovnici Dirichletovu a speciální oblasti (obdélník) byly vypracovány některé rychlé metody, při nichž se užívá jistých hodnot předem vypočítaných (srv. MOSKOWITZ [1]).

2. Nepřímé metody. Nepřímé metody můžeme rozdělit na dvě skupiny: metody iterační, které jsou charakterisovány pevným iteračním postupem (iterace Ritzova a Gauss-Seidlova a p.), a metody relaxační, charakterisované tak, že při iteračním postupu bereme v úvahu již nalezené výsledky (na př. metoda největšího spádu a pod.).

a) Metody iterační. Iterační metody byly kdysi velmi oblíbeny (srv. na př. Panov [6], WOLF [1], LIEBMANN [1], RICHARDSON [1]). Můžeme je dělit na iterace prosté a skupinové. U iterací prostých měníme při jednom kroku hodnotu jediné neznámé, u iterací skupinových měníme hodnoty celé skupiny neznámých.

V konvergenčních otázkách u většiny metod hraje podstatnou úlohu positivní definitnost matice soustavy. Konvergenční otázky speciálně pro Dirichletův problém řeší DIAZ a ROBERTS [1]. Liebmannova iterační metoda je v theorii lineárních rovnic známa pod názvem Seidlova metoda, Richardsonova metoda pak je metoda, která v theorii numerického řešení lineárních rovnic je známa pod názvem metody Ritzovy.

Ze skupinových metod zde uvedeme způsob, který navrhuje SHORTLY a WELLER [1]. U této práce je třeba ovšem podotknout, že se zde řeší v podstatě skupinově celý Dirichletův problém, což se odrazí při sestavení diferenčních rovnic, které nejsou potom identické s normálním systémem rovnic pro Dirichletův problém. U iteračních metod, díky jejich pravidelnosti, může být alespoň částečně studována rychlost konvergence. Pro obdélník tak činí FRANKEL [1] a pro skupinové iterace studují rychlost konvergence Shortly a Weller [1].

Někteří autoři navrhují různé úpravy, aby byla zvýšena rychlost konvergence. Uvedeme zde práci Ljusternika [8].

b) Relaxace. Pojem relaxace zavedl Southwell v díle [8] a [12], kde šlo o řešení rámových a prutových konstrukcí uvolňováním styčníků a vyrovnáváním přebytků momentů. Velmi příbuznou metodou při řešení rámů je metoda Crossova.

Podstata relaxační metody matematicky spočívá v minimalisaci kvadratické formy příslušné k soustavě diferenčních rovnic. Iteruje se vždy na souřadnice, kterým odpovídá největší residuum, a píší se pouze změny v neznámých a residuích způsobených těmito iteracemi. (Residuum se nazývá zbytek na pravé straně soustav; při přesném řešení je zde nulový člen.) Relaxační metoda je dost příbuzná metodě „největšího spádu", neboť geometricky řečeno, iteraci provádíme ve směru jedné ze souřadnicových os, která svírá nejmenší úhel s gradientem příslušné kvadratické formy. S geometrického hlediska se relaxační metodou zabýval na př. SYNGE [1]. Postupem času přešlo se od jednobodových relaxací k relaxacím složitějším, t. zv. relaxacím blokovým, deskovým a pod., které urychlují konvergenci. Stručný přehled o těchto metodách viz STIEFEL [1], který také navrhuje jistou metodu, která je zlepšením metody největšího spádu. Na poněkud jiném principu je založena t. zv. skupinová relaxace (viz o tom na př. práce WOODSE [1]). Účelem tohoto způsobu je odstranit jedno residuum, aniž by se residua bezprostředně sousední změnila. Stiefel ve své práci [2] řeší otázku různých možností relaxací. Dnes je relaxační technika vypracována značně podrobně, zejména po stránce praktické, a to jak si uspořádat výsledky, jak je psát a pod. Souborněji o relaxačních metodách viz na př. Fox [1], Allen [2], Southwell [9] a j. V těchto a podobných pracích se často slučují otázky vlastní relaxace (řešení systému rovnic) a otázky související s řešením parciálních rovnic pomocí sítí. Srovnej také práci NIKOLAJEVY [1].

VIII. O přesnosti řešení lineárních rovnic

Otázka chyby řešení soustavy lineárních rovnic prakticky úzce souvisí s chybou způsobenou metodou sítí. Jde o to, aby přesnost řešení soustavy rovnic nebyla zbytečně velká vzhledem k přesnosti, s níž diferenční rovnice aproximují diferenciální rovnici, neboť numerická práce roste rychle s požadovanou přesností. Je však jeden podstatný rozdíl mezi oběma druhy chyb. Chyba při řešení lineárních rovnic má do jisté míry charakter nahodilosti, způsobené v podstatě zaokrouhlováním, na rozdíl od chyby, způsobené metodou sítě, kde charakter nahodilosti se vůbec nevyskytuje. Odhad chyby při řešení lineárních rovnic je důležitý, neboť poměrně malá residua mohou způsobit velkou chybu. Touto otázkou se theoreticky pro Dirichletův problém zabývá AJZENŠTAT [1].

Vzhledem k jisté nahodilosti je však theoretický horní odhad příliš nadhodnocen, a proto po stránce praktické lépe vyhovuje statistický odhad chyby, kde zaokrouhlovací chyby se považují za náhodné veličiny. Třebaže předpoklad o nahodilosti zaokrouhlovacích chyb není theoreticky dobře fundován a může se s ním dospět k absurdním výsledkům, přece statistický odhad dává pro praxi cenné výsledky. Metoda statistického odhadu chyb není ještě dostatečně propracována a přesnější výsledky jsou známy pouze pro případ Dirichletova problému pro čtverec. Uvedeme z této problematiky práce ABRAMOVA [2] a Ljusternika [5] a ŠURY - BURY [1]. Jistý statistický odhad udává na př. také Stiefel [1].

IX. Řešení problému vlastních čísel pomocí metody sítí

Pomocí diferenčních rovnic možno určovat také vlastní číslo problému. Podobně jako v minulých problémech vznikají i zde dva druhy otázek. Prvý druh souvisí s problémy konvergence vlastních hodnot soustavy diferenčních rovnic k vlastnímu číslu parciální rovnice.

Druhý druh otázek souvisí s výpočtem vlastních hodnot diferenčních rovnic. Z řady prací zabývajících se problematikou vlastních čísel uveďme na př. Crandala [1], Nikolajevu [1] a Ljusternika [4].

Saulev [1] ve své práci studuje asymptotickou rychlost konvergence diferečních vlastních hodnot k vlastní hodnotě parciální rovnice. Pro případ Dirichletova problému viz také práci Ljusternika [4].

X. Problémy souvisící s otázkami zvýšení přesnosti

Přesnost metody sítí závisí na řadě faktorů. Jsou to zejména

a) druh diferenciální rovnice,

b) druh diferenční aproximace difereciální rovnice a druh sítě,

c) hustota sítě,

d) okrajové podmínky a tvar integračního oboru,

e) přesnost řešení soustavy diferenčních rovnic.

Těmito jednotlivými otázkami se již zabývala řada autorů, jak již bylo poznamenáno na patřičném místě. Není nám však zatím známa žádná práce, která by posuzovala alespoň částečně uvedené faktory ve vzájemné souvislosti s cílem pochopit přesnost řešení parciální rovnice jako celku.

Všeobecně je možno říci asi toto:

a) Rovnice nižšího řádu lze řešit (se stejnou sítí) většinou přesněji než rovnice řádů vyšších,

b) Nemusí být vždy pravidlem, že aproximační diferenční vzorce vyšších řádů dávají přesnější výsledky než vzorce jednodušší nižších řádů. V praktických případech však dávají převážně vzorce vyšších řádů lepší výsledky. Pravidelnými sítěmi dojdeme obvykle k přesnějším výsledkům než sítěmi nepravidelnými;

c) Se vzrůstající hustotou sítě se zvyšuje přesnost. Nemusí to však býti v případech velmi „rozumných" s rychlostí úměrnou řádu diferenčního vzorce.

d) Okrajové podmínky v souvislosti s integračním oborem jsou rozhodujícím činitelem. V zásadě případy, kdy má řešení dostatečný počet omezených parciálních derivací, možno počítat metodou sítí přesněji než v případě, kdy jsou derivace neomezené.

e) Přesnost řešení rovnic může být důležitým činitelem a je nutno posuzovat ji v souvislosti s přesností metody sítí.

Zpřesňování výsledků získaných metodou sítí se dnes dociluje postupným zhušťováním sítě anebo postupným zvyšováním řádů diferenčních aproximací, které zavedl Fox [4]. Tato metoda spočívá v tom, že se nejprve řeší problém s jednoduchými diferenčními vzorci a výsledky se potom zpřesní přechodem ke vzorcům složitějším, vyšších řádů.

XI. Současné tendence rozvoje a nejzávažnější problematika metody sítí

Metoda sítí je v současné době ve velkém rozvoji. Stále se objevují nové a nové články a publikace, podávající zprávy o nových výsledcích a aplikacích. Dnes se pak studují zejména otázky související s převodem na diferenční rovnice, některé konvergenční otázky a problém chyby. Je snaha užívat sítě i na problémy nelineární. Rovněž se začíná usilovně pracovat na otázkách použití matematických strojů k řešení diferenčních rovnic.

Zmíníme se zde ještě o nejnaléhavějších otázkách theoretických.

1. Bylo by vhodno studovat konvergenční otázky dalších speciálních tvarů diferenciálních rovnic než je Laplaceova rovnice a dospět k výsledkům v podobné šíři, jako je tomu dnes při problému Dirichletově.

2. Studium rychlosti konvergence v závislosti na integračním oboru a okrajových podmínkách by přineslo nezbytné pochopení vnitřní struktury metody sítí.

3. Odhad chyby v uspokojivém tvaru (jak po stránce pracnosti tak i nadhodnocení) je nejnaléhavějším problémem. Studium možného použití metody dvojnásobného kroku je jednou ze speciálních otázek této problematiky.

4. Pro praktické počítání je důležité studium metod řešení soustav lineárních rovnic. Statistické pojetí dává dnes asi nejhodnotnější výsledky při odhadu chyb. Při metodách přímých je otevřena otázka statistického pojetí splnění kontrol, t. j. rozhodnutí, kdy nesouhlas v kontrolách může být způsoben nakupením zaokrouhlovacích chyb a kdy je způsoben chybou ve výpočtu.

Při metodách nepřímých by měla být v popředí zájmu otázka rychlosti konvergence a otázka vhodné kombinace jednotlivých metod.

XII. SEZNAM LITERATURY

Abramov (*Абрамов*): [1] Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых наборов и оболочек разностными уравнениями. Судпромгиз, Москва (1951).

[2] О влиянии ошибок округления при решении уравнения Лапласа. Вычислительная математика и вычислителная техника. Сборник I. Изд. Акад. Наук, Москва (1953), 37—40.

Albrecht: [1] Taylor-Entwicklungen und finite Ausdrücke für Δu und $\Delta\Delta u$. Zeitschr. angew. Math. Mech. *33* (1953), 41—48.

Allen: [1] Compléments pour l'application de la méthode de libération. Extrait du Colloque Méthodes de Calcul. Marseille, 1947, 18—34.

[2] La Méthode de libération des liaisons et les problèmes de charpentes. Extrait du Colloque Méthodes de Calcul. Marseille, 1947, 11—15.

[3] Relaxation Methods. Mc Graw-Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1954.

Allen, Dennis: [1] The application of relaxation methods to the solution of differential equations in three dimensions I. Boundary value potential problems. Quart. J. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 199—208.

[2] The application of relaxation methods to the solution of differential equations in three dimensions II. Potential flow around aerofoils. Quart. J. Mech. Appl. Math. *6* (1953), 81—100.

[3] Gradet nets in harmonic and biharmonic relaxation. Quart. J. Mech. Appl. Math. *5* (1953), 439—443.

Allen, Fox, Motz, Southwell: [1] Free transverse vibrations of membranes with an application (by analogy) to two — dimensional oscillations in an electromagnetic system. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Allen, Fox, Southwell: [1] Stress distributions in elastic solids of revolution. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Allen, Severn: [1] The application of relaxation methods to the solution of non-elliptic partial differential equations I. The heat — conduction equation. Quart. J. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 209—222.

[2] The application of relaxation methods to the solution of non-elliptic partial differential equations II. The solidification of liquids. Quart. J. Mech. Appl. Math. *5* (1952), 447—454.

Allen, Southwell: [1] The graphical representation of stress. Proc. Roy. Soc. London, (A) *183* (1944), 125—134.

[2] Relaxation methods applied to engineering problems. Plastic strainign in two dimensional stress systems. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *242* (1950), 379—414.

Allen, Southwell, Vaisey: [1] Relaxation methods applied to engineering problems XI. Problems governed by the „quasi-plane potential equation". Proc. Roy. Soc. London, (A) *183* (1945), 253—283.

Ajzenštat (*Айзенштат*): [1] Об оценке ошибки при приближном решении конечноразностного уравнения Пуассона. Матем. сборник, *31* (1952), 485—490.

Archangelskij (*Архангельский*): [1] Расчеты одноразмерного неустановившегося движения грунтовых вод методом конечных разностей. Инж. сборник, *10* (1953), 203—210.

Atkinson, Southwell: [1] On the problem of stifftened bridges and its treatment by relaxation methods. Journ. Inst. Civ. Eng. 1939.

Atkinson, Bradfield, Southwell: [1] Relaxation methods applied to a bar of variable section, deflected by transverse loading combined with end thrust or tension. Aero. Res. Cttee R. and M. (1937); No. 1822.

Babuška, Mejzlík: [1] Napätia v gravitačných priehradách na mäkkých podložiach. Vodní hospodářství, *4* (1954), 231—236, 258—264.

Batchelet: [1] Über die numerische Auflösung von Randwerproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen. Zeitschr. ang. Math. Phys. *3* (1952), 165—193.

Bay: [1] Der statisch-unbestimmt gelagerte wandartige Träger, Bauingenieur, 1951.
[2] Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetonwänden. K. Withwer, Stuttgart, 1931.

Bennett, Milne, Batemann: [1] Numerical integration of differential equations. Bull. Mat. Res. Conn. U. S. *92* (1933), 51—87.

Bickley: [1] A simple method for the numerical solution of differential equations. Phil. Mag. *13* (1932), 1006—1114.
[2] Finite difference formulae for the square lattice. Quart. J. Mech. Appl. Math. *1* (1948), 35—42.
[3] Formulae for numerical differentiation. Math. Gaz. *25* (1941), 19—26.
[4] Formulae for numerical integration, Math. Gaz. *23* (1939), 352—359.

Birkhoff, Young: [1] Numerical quadrature of analytic and harmonic functions. J. Math. Phys. *29* (1950), 217—221.

Black: [1] Approximate methods of solving normal equations. Empire Surv. Rev. *7* (1944), 242—245.

Black, Southwell: [1] Relaxation methods applied to engineering problems II. Basic theory, with applications to surveying and to electrical networks and an extension to gyrostatic systems. Proc. Roy. Soc. London, (A) *164* (1938), 447—467.
[2] The method of systematic relaxation applied to survey problems. Empire Surv. Rev. *4* (1938).

Blansch: [1] On the numerical solution of parabolic partial differential equations. J. Res. Nat. Bur. Stand. *50* (1953), 343—356.

Boelter, Tribus: [1] Numerical solutions for thermal systems. MacMillan, (In honour of H. Cross), New York, 1949, 86—103.

Bortsch: [1] Die Ermittlung der Spannungen in beliebig begränzten Scheiben. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., S.-B. Va *138* (1929), 63.

Bowie: [1] A least square application to relaxation methods. Journ. Appl. Phys. *18* (1947), 830—833.

Bradfield, Southwell: [1] The deflexion of beams under transverse loading. Proc. Roy. Soc. London, (A) *161* (1937), 155—181.

O'Brien, Morton, Kaplan: [1] A study of the numerical solution of partial differential equations. J. Math. Phys. *29* (1951), 223—251.

Brilla: [1] Relaxačná metóda. Stavebnícky časopis (1954).

Bruwier: [1] Sur une équation aux dérivées et aux différences mélées. Mathesis *47* (1933), 103—104.

Burgerhout: [1] On the numerical solution of partial differential equations of the elliptic type. J. Appl. Sci. Res. B. *4*: 3 (1954), 161—173.

Collin, Newmark: [1] A numerical solution for the torsion of hollow sections. J. Appl. Mech. *14* (1947), A 313—A 315.

Collatz: [1] Bermerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzverfahren bei partiellen Diffenrentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *13* (1933), 56—57.
[2] Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen. Schriften des math. Seminars und Inst. angew. Math. der Universität Berlin, *341* (1935).
[3] Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben. Zeitschr. Math. Mech. *30* (1950), 385—388.

[4] Differenzenverfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Zeitschr. angew. Math. Mech. *29* (1949), 199—209.
[5] Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig, 1949.
[6] Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig, 1945.
[7] Eine Verallgemeinerung des Differenzenverfahrens für Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *14* (1934), 350—351.
[8] Einige neuere Forschungen über numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *31* (1951), 234—236.
[9] Über das Differenzenverfahren bei Anfangsproblemen partieller Differentialgleichungen. Zeitsch. angew. Math. Mech. *16* (1936), 239—247.
[10] Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, 1951.

Cooper: [1] The solution of natural frequency equations by relaxation methods. Quart. Appl. Math. *6* (1948), 179—183.

Courant: [1] Über partielle Differentialgleichungen. Congresso Internazionale dei Matematici, Atti Bologna, *3* (1930), 83—89.
[2] Über Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *6* (1926), 322—325.

Courant, Lax: [1] On nonlinear partial differential equations with two independent variables. Comm. Pure Appl. Math. *2* (1949), 255—273.

Courant, Friedrichs, Lewy: (*Курант, Фридрихс, Леви*): [1] О разностных уравнениях математической физики. УМН. Вып. VIII, 1940.
[2] Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. *100* (1928), 37—74.

Crandall: [1] Iterative procedures related to relaxation methods for eigenvalue problems. Proc. Roy. Soc. London, (A) *207* (1951), 416—423.
[2] On a relaxation method for eigenvalue problems. J. Math. Phys. *30* (1951), 140—145.

Crank, Nicholson: [1] A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of heat—conduction type. Proc. Cambr. Phil. Soc. *43* (1947), 50—67.

Dalton, Shaw: [1] Note on the calculation of vibration frequencies for an aero engine installation. Aero Res. Cttee R. and M. No. *1917* (1940).

Dalton, Shaw, Southwell: [1] Natural frequencies of vibration for a wing carrying engines. Aero. Res. Cttee R. and M. No. *1918* (1940).

Diaz, Roberts: [1] On the numerical solution of the Dirichlet problem for Laplace's difference equation. Quart. J. Appl. Math. *9*: 4 (1952), 355—361.
[2] Upper and lower bounds of the numerical solution of the Dirichlet difference boundary problem. J. Math. Phys. *31* (1952), 184—191.

Dlugač (*Длугач*): [1] Розвязания змішаних задач теорії пружності методом сіток. Доповиди АНУРСР 1953, № 6, 451—455.

Douglas: [1] A method of numerical solution of the problem of Plateau. Ann. of Math. *29*, 180—188.

Duffin: [1] Discrete potential theory. Duke Math. Journ. (1953), 233—251.

Dussinbere: [1] Numerical analysis of heat flow. New York, Toronto, London, 1949.
[2] Numerical methods for transient heat flow. Trans. ASME, 1945.

Eddy, Shaw: [1] Numerical solution of elastoplastic torsion of a shaft of rotational symmetry. Journ. Appl. Mech. *16* (1949), 139—148.

Egres: [1] The calculation of variable heat flow in solids. Trans. Roy. Soc. London, (A) *240* (1946), 1—57.

Ejdus (*Эйдус*): [1] О решении краевых задач методом конечных разностей, ДАН *82*: 2 (1952), 191—194.

Emmons: [1] The numerical solution of heat-conduction problems. Trans. ASME, *65* (1943), 607—612.

[2] The numerical solution of partial differential equations. Quart. Appl. Math. *1* (1944), 173—195.

Faddějeva (*Фаддеева*): [1] Вычислительные методы линейной алгебры, Москва, 1950.

Falkner: [1] A method of numerical solution of differential equations. Phil. Mag. *21* (1936), 624—640.

Forsythe: [1] Solving linear algebraic equations can be interesting. Bull. Amer. Math. Soc. *59* (1953), 299—329.

Fowler: [1] Analysis of numerical solutions of transient heat-flow problems. Quart. Appl. Math. *3* (1946).

[2] Symmetry as a factor in finite difference approximations. J. Appl. Phys. *25* (1954), 293—294.

Fox: [1] A short account of relaxation methods. Quart. Mech. Appl. Math. *1* (1948), 253—280.

[2] Mixed boundary conditions in the relaxational treatment of biharmonic problems (plane strain or stress). Proc. Roy. Soc. London, (A) *189* (1947), 535—543.

[3] Solution by relaxation methods of plane potential problems with mixed boundary conditions. Quart. Appl. Math. *2* (1944), 251—257.

[4] Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations. Proc. Roy. Soc. London, (A) *190* (1947), 31—59.

[5] The numerical solution of elliptic differential equations when the boundary condition involves a derivation. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *242* (1950), 345—378.

[6] The solution by relaxation methods of ordinary differential equations. Proc. Cambr. Phil. Soc. *45* (1949), 50—68.

[7] The use of large intervals in finite-difference equations. Math. Tabl. Aids C. *7* (1953), 14—18.

Fox, Goodwin: [1] Some new methods for the numerical integration of ordinary equations. Proc. Camb. Phil. Soc. *45* (1949), 373—388.

Fox, Huskey, Wilkinson: [1] Notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations. Quart. Math. Appl. Mech. *1* (1948), 149—173.

Fox, Southwell: [1] On the stresses in hooks and their determination by relaxation methods. Journ. Inst. Mech. Eng. *155* (1946), 1—19.

[2] Biharmonic analysis as applied to the flexure and extension of flat elastic plates. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945), 419—460.

Frankel: [1] Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. Math. Tabl. Aids C. *4* (1950), 65—75.

Frankel, Aleksejeva (*Франкел, Алексеева*): [1] Две краевые задачи из теории гиперболических уравнений в частных производных с приложением к сверхзвуковым газовым течениям. Матем. сб. *41* (1934), 483—502.

Frocht: [1] A rational approach to the numerical solution of Laplace's equations. J. appl. Phys. *12* (1941), 596—604.

[2] Photoelasticity. Willey, 1948.

[3] The numerical solution of Laplace's equations in composite rectangular areas. J. Appl. Phys. *17* (1946), 730—742.

Fung: [1] Bending of thin elastic plates of variable thickness. J. Aeronaut. Sci. *20* (1953), 455–468.

Gandy, Southwell: [1] Conformal transformation of a region in plane space. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *238* (1940).

Gavrilov: (*Гаврилов*): [1] Приближенное численное интегрирование телеграфного уравнения. Известия Военно-электротехнической академии РККА, *9* (1934), 3—17.

[2] Приближенное численное интегрирование телеграфного уравнения для составной линии. Известия Военно-электротехнической академии РККА, *10* (1935), 115 до 127.

[3] Применение характеристик к приближенному численному интегрированию линейных уравнений с частными производными второго порядка гиперболического типа. (Волковэе уравнения.) Научно-тех. сб. электротех. ин-та связи, *1* (1933), 5—15.

[4] Применение характеристик к приближенному численному интегрированию линейных уравнений с частными производными второго порядка гиперболического типа. Научно-тех. сб. электротех. ин-та связи, *4—5* (1934), 147—150.

[5] Применение характеристик к приближенному численному интегрированию уравнений в частных производных второго порядка линейных с постоянными коэффициентами гиперболического типа. Труды второго Всесоюзн. матем. съезда, *2* (1936), 393—397.

Gerschgorin: [1] Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Zeitschr. angew. Math. Mech. *10* (1930), 373–382.

Geršgorin: (*Гершгорин*): [1] О приближенной интегрировании Дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. Изв. политех. инст. *30* (1927), 75—95.

Gilles: [1] The use of interlacing nets for the application of relaxation methods to problems involving two dependent variables. Proc. Roy. Soc. London, (A) *193* (1948), 407–433.

Girkmann: [1] Flächentragwerke. Springer, Wien 1948, 104–106.

Green, Southwell: [1] High-speed flow of compressible fluid through a two-dimensional nozzle. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1944).

[2] Problems relating to large transverse displacements of thin elastic plates. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Heilbron: [1] On discrete harmonic functions. Proc. Cambr. Phil. Soc. *45* (1949), 194–206.

Hensky: [1] Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in Technik. Zeitschr. angew. Math. Mech. *2* (1922), 58–66.

Higgins: [1] A survey of the approximate solutions of two-dimensional physical problems by variational methods and finite difference procedures. MacMillan (In honour of H. Cross). New York (1949), 169–198.

Holl: [1] Analysis of plate examples by difference methods and the superposition principle. J. appl. Math. ASME, *58* (1936), A 81.

Hopkins: [1] The solution of continuous girders by the relaxation method. Engineering *143* (1937).

Hyman, Morton: [1] Non-iterative numerical solution of boundary-value problems. Appl. Sci. Res. (B) *2* (1952), 325–351.

[2] On the numerical solution of partial differential equations. Thesis Technisch Hogeschool te Delft, 1953.

Huskey: [1] On the precision of a certain procedure of numerical integration. J. Res. Mat. Bur. Stand. *42* (1949), 57–62.

Christopherson: [1] Relaxation methods applied to grid frameworks. Aero Res. Ctte R. and M., No. *1824* (1937).
[2] A new mathematical method for the solution of film lubrication problems. Proc. Inst. Mech. Engrs. *146* (1941), 126–135.
[3] A theoretical investigation of plastic torsion in an I-beam. Amer. J. Appl. Mech. *7* (1940).

Christopherson, Southwell: [1] Relaxation methods applied to engineering problems III. Problems involving two independent variables. Proc. Roy. Soc. London, (A) *168* (1938), 317–350.

Christopherson, Fox, Green, Shaw, Southwell: [1] The elastic stability of plane frameworks and flat plating. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *239* (1945).

Inoue: [1] Discrete boundary value problems (v jap.). Reports of the Fac. of Sci. Kyusyu Imp. Univ. S. Math. *1* (1945).
[2] Discrete Neumann problem. Journ. of the Institute of Polytechnics. Osaka City University, *5* (1954), No. 2.
[3] Sur les fonctions de noeud et leurs application à l'integration numérique des équations aux dérivées partielles. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. *4* (1949).

Jacobs: [1] Relaxation methods applied to problems of plastic flow. I. Notched bar under tension. Phil. Mag. *41* (1950), 349–361.
[2] Relaxation methods applied to problems of plastic flow. II. Phil. Mag. *41* (1950), 458–467.

John: [1] On integration of parabolic equations by difference methods. Comm. Pure Appl. Math. *5* (1952), 155–211.

Juncosa, Young: [1] On the convergence of a solution of a difference equation to a solution of the equation of diffusion. Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 168–174.
[2] On the order of convergence of solutions of a difference equation to a solution of the diffusion equation. J. Soc. Indust. Appl. Math. *1* (1953) 111–135.

Juškov (*Юшков*)*:* [1] О применении треугольных сеток для численного решения уравнения теплопроводности. Прикл. матем. и мех. *12* (1948), 223—226.
[2] О точности некоторых формул численного интегрирования уравнения теплопроводности. Тр. Ленинград. ин-та холодильной и молочной пром-сти, *4* (1953), 117—121.

Kamynin (*Камынин*)*:* [1] О применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности. Единственность решения системы конечно-разностных уравнений. Изв. Ак. Наук, сер. матем *17* (1953), 163—180.
[2] О применимости метода разностей к решению уравнения теплопроводности. Сходимость конечноразностного процесса для уравнения теплопроводности. Изв. Акад. Наук, сер. матем. *17* (1953), 249—268.

Kantorovič-Krylov (*Канторович-Крилов*)*:* [1] Приближенные методы высшего анализа, Москва, 1952.

Kettelborough: [1] The stepped thrust bearing. A solution by relaxation methods. J. appl. Mech. *21* (1954), 19–25.

Kormes: [1] Numerical solution of the boundary value problem for the potential equation by means of punched cards. Rev. Sci. Instr. *14* (1943).

Ladyževskaja (*Ладыжевская*)*:* [1] О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши гиперболических систем. ДАН СССР, *88:* 4 (1953), 607—610.

Lewy: [1] On the convergence of solutions of difference equations. (Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th birthday) New York, 1948, 211–214.

Lewy, Baggot: [1] Numerical studies in differential equations. London 1934.

Liebmann: [1] Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Sitzgsber. Bayr. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. 1918, 385–416.

Litvinov (*Литвинов*): [1] Решение плоской задачи теории упругости для бесконечной полосы методом конечных разностей. Доповиди АН УРСР (1953), 117—121.

Ljusternik (*Люстерник*): [1] Об общих сеточных аппроксимациях оператора Лапласа. ДАН СССР *91* (1953), 1367—1369.

[2] О конечно-разностных аппроксимациях оператора Лапласа I (Аннотация к докладу в ММО, от 9. XII, 1952) УМН *8*: 3 (1953), 152—153.

[3] О конечно-разностных аппроксимациях оператора Лапласа II (Аннотация к докладу прочитанному в ММД в 1953 г.) УМН *9*: 1 (1954), 131—133.

[4] О разностных аппроксимациях оператора Лапласа. УМН *9*: 2 (1954), 2—66.

[5] О сходимости при случайных начальных данных и накоплении ошибок итерационного процесса решения системы алгебраических уравнений. Вычислительная математика и вычислительная техника. Сборник I, Москва (1953), 41—45.

[6] О собственных значениях конечно-разностных аппроксимаций оператора Лапласа, ДАН СССР *89* (1953), 613—616.

[7] Проблема Дирихле. УМН *8* (1941), 115—125.

[8] Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток. Труды матем. ин-та им. Стеклова, № 20 (1947), 49—64.

Mac Neal: [1] An asymmetrical finite difference network. Quart. appl. Math. *10* (1953), 295–310.

Marcus: [1] Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten (2. Aufl.). Berlin, 1932.

Marshall: [1] The application of relaxation methods to freely suported flat slabs. Engineering, *170* (1950), 239–242.

Mc Newn, En-Jun-Hsu, Chia-Shun-Jih: [1] Application of the relaxation technique in fluid mechanics. Proc. Amer. Soc. Civ. Engnrs. *223*, 1–24.

Mejman (*Мейман*): [1] К теории уравнений в частных производных. ДАН СССР *98*: 4 (1954), 99.

[2] Об уравнении теплопроводности. ДАН СССР, *99*: 2 (1954).

Mejzlík. [1] Metóda sietí. Stavebnícky časopis. *2* (1954), 1–20.

[2] Účinnosť drénov v základovej škáre hydrocentrály. Vodní hospodářství, *4* (1954), seš. 3.

[3] Vplyv plošnej injektáže na vztlak a priesak. Vodní hospodářství, *5* (1955).

Mikeladze (*Микеладзе*): [1] Численные методы интегрирования уравнений с частными производными. Москва 1936.

[2] К вопросу численного интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными при помощи сеток. Тбилиси, Сообщ. Гр. фил. АН *1* (1940), 249—254.

[3] Численые методы математического анализа. Гос. изд. тех. теор. лит. Москва, 1953.

[4] К вопросу о решении краевых задач разностным методом. ДАН СССР *28*: 5 (1940).

[5] К вопросу продольного изгиба прямолинейных стержней в пределах упругости. Труды Тбилисского матем. ин-та, *12* (1943), 175—123.

[6] Новые формулы для численного интегрирования дифференциальных уравнений. ДАН СССР *61* (1948), 789—790.

[7] Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложение к задачам теории упругости. Москва, 1951.

[8] О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными. ИАН СССР, сер. физ.-мат. (1934), 819—842.

[9] Об интегрировании дифференциальных уравнений разностным методом. ИАН СССР, сер. матем. (1939), 627—642.

[10] О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов. ИАН СССР, сер. матем. *5* (1941), 57—74.

[11] О численном интегрировании уравнений Лапласа и Пуассона. ДАН СССР *14* (1937), 181—182.

[12] О численном решении дифферен циальных уравнений Лапласа и Пуассона. ИАН СССР (1938), 271—293.

Milne: [1] Numerical solution of differential equations. New York, 1953.

[2] Numerical calculus, 1949, (též ruský překlad z r. 1951).

Mitchell: [1] Round-off errors in relaxational solution of Poisson's equation. Appl. Sci. Ress., (B) *3* (1954), 456—464.

[2] Round-off errors in the solution of the heat conduction equation by relaxation methods. Appl. Sci. Research, (A) *4* (1953), 109—119.

Mitchell, Rutherford: [1] Application of relaxation methods to compressible flow past a double wedge. Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, (A) *63* (1951), 139—154.

[2] On the theory of relaxation. Proc. Glasgow Math. Assoc. *1* (1953), 101—110.

Moskovitz: [1] The numerical solution od Laplace's and Poisson's equations. Quart. Appl. Math. *2* (1944), 148—163.

Motz: [1] Calculation of the electromagnetic field frequency and circuit parameters of high frequency resonator cavities. Journ. Inst. Electr. Engrs. *93* (1946), 335—343.

[2] The treatment of singularities of partial differential equations by relaxation methods. Quart. Appl. Math. *4* (1947), 371—377.

Motz, Worthy: [1] Calculation of the magnetic field in dynamo-electric machines by Southwell's relaxation method. Journ. Inst. Electr. Engrs. *92* (1945), 522—528.

Negoro: [1] Torsion of a square bar with axial circular hole. Trans. Soc. Mech. Eng., Tokio, *5* (1939), 142—153.

Neményi: [1] Lösung des Torsionsproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt. Zeitschr. angew. Math. Mech. *1* (1921), 364—367.

von Neumann, Rychtmayer: [1] A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocs. J. appl. phys. *21* (1950), 232—237.

Newing: [1] Determination of shearing stress in axially symmetric shafts under torsion by finite difference method. Phil. Mag. *32* (1941), 33—49.

Newmark: [1] Bounds and convergence of relaxation and iteration procedures. Proc. of the first U. S. National Congress of Appl. Mech., Chicago, 1951, The Amer. Soc. of Mechanical Engrs., New York, 1952, 9—14.

[2] Numerical methods of analysis of bars, plates and elastic bodies. Mac Millan (In honour of H. Cross), New York (1949), 138—168.

Nikolajeva (Николаева): [1] О релаксационном методе Саусвелла (критический обзор). Труды матем. ин-та им. Стеклова, АН СССР, вып. *28* (1949), 160—182.

Nyström: [1] Über die numerische Integration von Differentialgleichnugen. Acta Soc. Sci. Fennicae, *50* (1926), 56.

[2] Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben bei gewöhlichen Differentialgleichungen. Acta Math. *76* (1945), 158—184.

[3] Zur praktischen Integration von linearen Differentialgleichungen. Soc. Sci. Fennicae, Com. Phys. Math. *14* (1943), 14.

Orr: [1] Several cases of non-circular torsion solved by analysis and direct test. Aero. Res. Cttee R. and M. 1939 (1930).

Panov (*Панов*)*:* [1] Численное решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. УМН *4* (1937), 23—33.

[2] О приближенном численном решении уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$. Матем. сб. *40* (1933), 38 73—393.

[3] Приближенное графическое решение краевых задач уравнения Лапласа. Труды ЦАГИ 169 (1934), 3—24.

[4] Решение систем линейных уравнений. Добавление к книге Д. Скарборо, Численные методы математического анализа, Москва, Ленинград, 1934.

[5] Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гос. Изд. тех.-теор. лит., Москва, 1938.

[6] Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, 1949.

[7] Über die angenährte numerische Lösung des Problems der Wärmeleitung. Zeitschr. angew. Math. Mach. *12,* (1932), 185—188.

Parme: [1] Solution of difficult structural problems by finite differences. J. Am. Concr. Inst. *22* (1950), 3.

Pellew, Southwell: [1] The natural frequencies of systems having restricted freedom. Proc. Roy. Soc. London, (A) *175* (1940).

Petrovskij (*Петровский*)*:* [1] Einige Bemerkungen zu den Arbeiten von H. O. Perron und L. Ljusternik über das Dirichletsche Problem. Матем. сб. *35*, (1928), 105—110.

[2] Лекции по уравнениям с частными производными. Москва, 1953.

[3] Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей. УМН *8* (1941), 161—170.

Phillips, Wiener: [1] Nets and the Dirichetl problem. J. Math. Phys. *2* (1923), 105—124.

Poritsky: [1] Graphical and numerical methods of solving partial differential equations, Grown, Univ. 1941.

Raběnskij (*Рабеньский*)*:* [1] О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши. ДАН *86* (1953), 1071—1074.

Rektorys: [1] Výpočet teploty v přehradě při uvažování vnitřních zdrojů tepla. Vyjde v Rozpravách ČSAV.

Richards: [1] Stress-determination for a three dimensional rigid-jointed frameworks of the method of systematic relaxation of constraints. Journ. Inst. Civ. Engr. (1937), No. 4.

Richardson R. G. D.: [1] A new method in boundary problems for differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. *18* (1917), 439—491.

Richardson L. F.: [1] How to solve differential equations approximately by arithmetics. Math. Gaz. *12* (1925), 415—442.

[2] The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stress a masonry dam. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *210* (1911), 308—357.

Rosenbloom: [1] On the difference equation method for solving the Dirichlet problem. Construction and application of conformal maps. NBS AMS *18* (1951), 231.

le Roux: [1] Sur le problème de Dirichlet. J. Math. *10* (1914), 189–320.

Runge: [1] Über eine Methode die partielle Differentialgleichung Δu = Constans, numerisch zu integrieren. Z. Math. Phys. *96* (1908), 225–232.

Salvadori: [1] Extrapolation formulae in linear difference operators. Proc. of the first U.S. National Congress of Appl. Mechanics, Chicago, 1951. The Amer. Soc. of Mech. Engnrs, New York, 1952, 15–18.

Saulev (*Саулев*): [1] О нахождении собственных значений методом сеток. ДАН СССР, *94*: 6 (1954), 1003—1006.

Scarborough: [1] Numerical mathematical analysis. J. Hopkins, Baltimore, 1950.

Sekia, Tsuyoshi, Tsutsui Saburo: [1] On the approximate solution of the boundary-value problem for the plane biharmonic equation. J. Osaka Inst. Sci. Tech. Part. II, *3* (1951), 43–67.

Shaw: [1] An introduction to relaxation methods. Dover Publications, Inc. New York, 1953.

[2] Numerical solution of boundary value problems by relaxation methods, Mac Millan, New York. (In honour of H. Cross), 1949, 49–65.

[3] The approximate numerical solution of the non-homogenous linear Fredholm integral equation by relaxation methods. Quart. Appl. Math. *6* (1948), 69–76.

[4] The torsion of solid and hollow prism in the elastic and plastic range by relaxation methods. Australian Council Aeronaut Report, *11* (1944).

Shaw, Perrone: [1] A numerical solution for the nonlinear deflections of membranes. J. appl. Mech. *21* (1954), 117–129.

Shaw, Scuthwell: [1] Problems relating to the percolation of fluids through porous materials. Proc. Roy. Soc. London, (A) *178*, (1941).

Shinomiya: [1] Solution of arbitrary plate by influence surface method. Proc. 2nd. Jap. Congr. appl. mech. 1952. Sci Counc. Jap. 1953, 125–130.

Shortley, Weller: [1] The numerical solution of Laplace equation. J. appl. Phys. *9* (1938), 334–344.

Shortley, Weller, Darby, Camble: [1] Numerical solution of axisymmetrical problems with applications to electrostatics and torsion. J. Appl. Phys. *18* (1947), 116–129.

Shortley, Weller, Fried: [1] Numerical solution of Laplaces and Poissons equations with applications to photoelasticity and torsion. Ohio State University, Studies Engineering Ser. Bull. 1942, No. 107.

Schmidt: [1] Das Differenzverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen der nichtstationären Wärmeleitung, Diffusion und Impulsausbreitung. (Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurswesen.) *13* (1925).

[2] Über die Auswendung der Differenzenrechnug auf technische Anheiz-und Abkühlungsprobleme. Berlin, 1924.

Schultz: [1] A slight improvement of Southwell's method for the approximative computation of the lowest frequency of a homogenous membrane. App. Sci. Res. (A) *2* (1950), 93–96.

Schwarz: [1] Numerische Lösung des Randwertproblems der Potentialgleichung mit Hilfe von Lochkarten. Zeitschr. Angw. Math. Mech. *34* (1954), 237–240.

Southwell: [1] New pathways in aeronautical theory. Journ. Aeronaut Sci. *9* (1942), 77 až 89.
[2] On relaxation methods. A mathematics for engineering science. Proc. Roy. Soc. London, (A) *184* (1945), 253—288.
[3] On the computation of strain and displacement in a prism plastically strained by torsion. Quart. J. Mech. Appl. Math. *2* (1949), 385—397.
[4] Relaxation methods. British Science News *3*, 113—117.
[5] Relaxation methods. A mathematics for the engineer. Trans. Inst. Chem. Engnrs. *25* (1947), 1—25.
[6] Relaxation methods. An engineering approach to computation. Journ. Inst. Civil Engnrs. 1948, 351—378.
[7] Relaxation methods as applied to structure. The structural Engineer, *26* (1948), 463—506.
[8] Relaxation methods in engineering science. Oxford University Press (1940).
[9] Relaxation methods in theoretical physics. Oxford University Press (1946).
[10] The flexure and extension of perforated elastic plates. Proc. Roy. Soc. London, (A) *193* (1948), 147—171.
[11] The quest for accuracy in computations using finite differences. Mac Millan. (In honour of H. Crass.) New York, 1949, 66—74.
[12] Stress-calculation in frameworks by the method of „systematic relaxation" of constraints. Proc. Roy. Soc. London, (A) *151* (1935), 56—95; *153* (1935), 41—76.

Southwell, Vaisey: [1] Relaxation methods applied to engineering problems. XII. Fluid motions characterized by free stream-lines. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) *240* (1946), 117—161.
[2] Plane potential problems involving specified normal gradients. Proc. Roy. Soc. London, (A) *182* (1943).

Spirin (Спирин): [1] Исследование влияния сгущения сетьки при решении плоской задачи теории упругости методом конечных разностей. АН СССР. Расчеты и исследования по гидравлике и прочности гидрот. сооружений. Киев, 1954.

Srinath, Lakshminarayana: [1] Evaluation of stresses in a circular ring by the relaxation method. Appl. Sci. Res., (A) *3* (1953).

Stiefel: [1] Über einige Methoden der Relaxationsrechnung. Zeitschr. Angw. Math. Phys. *3* (1952), 1—33.
[2] Relaxationsmethoden bester Strategie zur Lösung linearer Gleichungsysteme. Comm. math. Helv. *29*: 2,3 (1955), 157.

Sunatani, Negoro: [1] On a method of approximate solution of a plane harmonic function. Tohoku Imp. univ. Tech. Rep. *12* (1938), 339—360.

Synge: [1] A geometrical interpretation of the relaxation method. Quart. Appl. Math. *2* (1944), 87—89.

Šura-Bura (Шура-Бура): [1] О решении конечно-разностного уравнения апроксимирующего задачу Дирихле для уравнения Лапласа по электрических сетьках. Вычислительная математика и техника вычислительная. Сборник 1, 1953, 46—56.

Taylor: [1] Torsional stresses in cylinder; a convenient approximate method with numerical examples. Aircraft Engn. *10* (1938), 375—377.

Temple: [1] The general theory of relaxation methods applied to linear systems. Proc. Roy. Soc. London, (A) *169* (1939), 476—500.

Thom: [1] An investigation of fluid flow in two dimensions. Aero. Res. Cttee R. and M. *1194* (1928).

[2] Arithmetical solution of equations of the type $\Delta''\psi = \text{const}$. Aero. Res. Cttee R. and M. *1604* (1939).

[3] Arithmetical solutions of problems in steady viscous flow. Aero. Res. Cttee R. and M. *1475* (1932).

[4] The aritmetic of field equations. Aeronaut. Quart. *4* (1953), 205—320.

[5] The flow past circular cylinders at low speeds. Proc. Roy. Soc. London, (A) *141* (1933), 651—669.

[6] Treatment of the stagnation point in arithmetical methods. Aero. Res. Cttee R. and M. *2807* (1951).

Thom, Klaufer: [1] The method of influence factors in arithmetical solutions of certain field problems. Aero. Res. Cttee R. and M. *2440* (1946).

[2] Tunnel wall effect of an aerofoil at subsonic speeds. Aero. Res. Cttee R. and M. *2851* (1951).

Thomas: [1] Stability of solution of partial differential equations. Symp. on theor. compressible flow., Naval Ord Lah. White Dak. Md. Rep. (1949).

Tranter: [1] The combined use of relaxation methods and Fourier transform in the solution of some three dimensional boundary value problems. Quart. Mech. Appl. Math. *1* (1948), 281—286.

Varvak (*Варвак*)*:* [1] Бигармоническая задача для прямоуголника. Сборник ИСМ. Киев 1948, ВЫП. 8.

[2] Бигармоническая задача в косоуглых сетьках. Сборник ИСМ. Киев, 1948, ВЫП. 8.

[3] Изгибная жесткость высокой балки. Сборник ИСМ. Киев, 1948, ВЫП. 8.

[4] Колебания мембран и пластинок. Сборник ИСМ. Киев, ВЫП. 7.

[5] К расчету высоких балок. Сборник строительного института. Киев, 1936.

[6] Напряженное состояние от собственного веса. ДАН УССР, *1* (1948).

[7] Некоторые формулы пространственной решетки. Сборник ИНМ. Киев, 1948, ВЫП. 8.

[8] Некоторые итерационные приемы решения плоской задачи. ДАН УССР, *5* (1948).

[9] Некоторые соотношения в конечных разностях. Доклады АН УССР, *4* (1947).

[10] Плоская ортотропная задача. Сборник ,,Вопросы строит. механики''. ИСМ. Киев, 1940.

[11] Плоская задача для пластинки линейно-переменной толштикы. Сборник ИСМ. *12* (1949).

[12] Распределение напражений при сжатии прямоугольной пластинки. Доклады АН УССР, *2* (1948).

[13] Расчет трапезоидальных плит свободно опертых по контуру (с А. М. Дубницким). Харков, 1939, Бюлетен Харковского строит. ин-та, *16*.

[14] Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Киев, 1949.

[15] Таблицы для расчета пластинок конечной жесткости. Журн. ,,Речной транспорт'', *1—2* (1944).

[16] Внутренная задача Дирихле в числах влияния. Сборник ИСМ. Киев, 1946, ВЫП. 8.

[17] Устойность квадратной пластинки. Сборник ИСМ. Киев 1946, ВЫП. 7.

Vašakidze (*Вашакидзе*)*:* [1] О численном решении бигармонического уравнения. Тбилиси, Труды матем. ин-та, АН Гр. ССР, *9* (1941), 61—74.

Vaughan: [1] Relaxation methods. A three dimensional mechanical analogy. Quart. J. Mech. Math. *5* (1952), 462—465.

Vaszonyi: [1] A numerical method of the theory of vibration. J. Appl. Phys. *15* (1944).

Volkov (*Волков*)*:* [1] Оценки ошибки при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа. ДАН СССР *96:* 5 (1954), 897—899.

Walsh, Young: [1] On the accuracy of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences. Bull. Am. Math. Soc. *57* (1952), 478.

[2] On the accuracy of the numerical solution of the Dirichlet problem of finite differences. J. Res. nat. Bur. Stands. *51* (1953), 343—363.

[3] On the degree of convergence of solution of equations to the solution of the Dirichlet problem. J. Math. Phys. *33* (1954), 80—93.

Walton: [1] Numerical solution of the equations for a discrete model of a spherical blast. Phys. Rev. *87* (1952).

Wang Chi Teh: [1] Applied elasticity. Mc Graw Hill Book Co. 1953, 9—357.

Wassow: [1] On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences. J. Research NBS, *48* (1952), 345—348.

Weigand: [1] Die angenährte Berechnung rotationssymmetrischen Potentialfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens. VFB—Technik, Berlin 1953.

Whittrick, Howard: [1] Relaxation methods applied to two problems of two-dimensional stress distribution involving mixed boundary conditions. Australian Journ. Sci. Research, (A) *1* (1948), 135—160.

Witting: [1] Über die Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Zeitschr. angew. Math. Mech. *33* (1953), 314.

[2] Verbesserung des Differenzenverfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten. Zeitschr. angw. Math. Phys. *4* (1953), 376—397.

Wolf: [1] Über die angenährte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen. Zeitschr. angew. Math. *6* (1926), 118—150.

Wood: [1] A special type of group displacement for use in the relaxation technique. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 432—438.

Woods, Woorlow-Davies: [1] On the aplication to tabular frameworks of the method of systematic relaxation of constraints. Aero. Res. Cttee R. and M. *1764* (1937).

Woods: [1] A new relaxation treatment of flow with axial symmetry. Quart. J. Mech. Appl. Math. *4* (1951), 358—370.

[2] A relaxation treatment of shock wawes. Aero. Res. Council Current Papers *134* (1953), 1—7.

[3] Improvements to the accurracy of arithmetical solutions to certain two dimensional field problems. Quart. J. Mech. Appl. Math. *3* (1950), 349—363.

[4] The numerical solution of fourth order differential equations. A. R. C. *601* (1952).

[5] The numerical solution of two-dimensional fluid motion in the neighbourhood of stagnation points and sharp corners. Aero. Res. Cttee. R. and M. *2726* (1949).

[6] The relaxation treatment of singular points in Poisson's equation. Quart. J. Mech. Appl. Math. *6* (1953), 163—185.

Wright: [1] The use of relaxation methods in engineering. Engn *48* (1953), 435—539, 563.

Wünsch: [1] Statika predpätého betónu (v tisku).

[2] Železobetonové deskové mosty. Věd.-techn. vyd. Praha, 1951.

Young: [1] Iterative methods for solving partial difference equation of elliptic type. Quart. J. Appl. Math. *11* (1954), 92—111.

Zienkiewicz: [1] The stess-distribution in gravity dams. Journ. Inst. Civil Engnrs. *27* (1947), 244—271.