Recense

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 3, 365--374

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117156

RECENSE

Eduard Čech: **Čísla a početní výkony.** Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1954, stran 248, náklad 3200, cena Kčs 21,40.

Autor praví v předmluvě, že kniha vznikla z popudu jiného jím chystaného spisu, totiž díla o vyšší matematice, které by přístupně a přesně vyložilo základní věci těm, pro něž je matematika jenom prostředkem, nikoliv cílem. Při provádění tohoto plánu došel autor k závěru, že lze takové věci i takovým čtenářům jenom tehdy vyložit vědecky uspokojivě, jestliže se jejich školské vědění z elementární matematiky postaví na solidní základ. A tak vznikla tato kniha. Je podle autorových slov „psána pro širokou a mnohotvárnou obec všech těch, kdo z toho či onoho důvodu si přejí plně porozumět pracovním metodám matematika, jeho způsobu vyjadřování, pochopit smysl jeho symbolů, seznámit se s procesem tvoření matematických pojmů, naučit se spojovat abstraktní úvahu s názornou představou".

Obsah knihy se rozpadá na dvě části. Prvá část vede čtenáře ve třech kapitolách (I. Celá čísla, II. Racionální čísla, III. Reálná čísla) geneticky od přirozených čísel až k pojmu reálného čísla, k početním výkonům s reálnými čísly, k posloupnostem reálných čísel a k odmocninám reálných čísel. To je kulminační bod. A k této systematické a uzavřené části, podle níž je kniha nazvána, se volněji připojuje část druhá, obsahující kapitoly IV a V. Z nich kapitola IV obsahuje základy dělitelnosti a kombinatoriky a důležité poznatky o mnohočlenech. Kapitola V obsahuje především výklad o počátcích analytické geometrie a je podle slov autora „už přímou přípravou ke studiu vyšší matematiky" a „do značné míry na předcházejících nezávislá".

Tato nová kniha našeho velkého matematika Eduarda Čecha se mně jeví opět jako událost základního významu ve vývoji naší původní učebnicové matematické literatury vědeckého zaměření. V čem spatřuji toho důvody?

Už jsem řekl, že se neobrací jenom k těm, jimž je matematika cílem. A právě v původních učebnicích s takto rozšířeným určením jsme dnes na tom špatně. My prostě nemáme původní české učebnice vyšší matematiky pro širší publikum a přitom přesné. Ani tato kniha jí není, ale je k ní aspoň úvodem.

Za druhé, i když vezmeme v úvahu veškerou naši knižní literaturu, ve které se vykládá theorie reálných čísel, je toto teprve třetí monografie, začínající ab ovo, totiž od čísel přirozených: Prvou byla látkou i pojetím zcela mimořádná knížka B. Pospíšila *Nekonečno v matematice*, vydaná posmrtně Jednotou československých matematiků v r. 1949 a opatřená pietní předmluvou právě z pera Čechova; druhou je záslužná kniha K. Hruši *Elementární aritmetika* (Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1953).[1])

[1]) Aby mi bylo rozumět: Mluvím o těch českých monografiích, v nichž je současně obojí, a to jak theorie čísel racionálních, tak theorie čísel irracionálních.

Za třetí však je Čechova kniha prvním českým zpracováním té theorie reálných čísel, jež pochází od zakladatele theorie množin G. CANTORA.[2])

Než přistoupím k obsahu jednotlivých kapitol, uvedu, v čem spatřuji osobitý způsob, jak autor látku vykládá:

Předně se autor nikde nestaví k čtenáři odpudivě, ať už tím, že by odkazoval jeho školské vědění do nepotřebného haraburdí, nebo tím, že by bez psychologického zřetele k různé obtížnosti a překvapivosti látky postupoval se stále stejně vyhlazenou a studenou rytmikou: definice, věta, důkaz. Staví na číselné představě získané ve škole a teprve jejím rozborem dochází k pojmové formulaci. S tím souvisí, že vlastnímu výkladu o aritmetice čísel celých, racionálních a reálných předchází vždy paragraf intuitivního obsahu, ve kterém se čtenáři na základě jeho zkušenosti výstižně popíše význam a potřeba příslušné číselné kategorie.

Za druhé nestaví autor na odiv maximální stručnost, ale na místech theoreticky choulostivých napomáhá pochopení raději výborně volenými příklady než obšírnou formulací abstraktní situace.

Za třetí od prvních stránek nutí čtenáře, aby nečetl ani povrchně ani pasivně, nýbrž aby si zvykal dávat pozor na každé slovo a aby si řadu věcí samostatně zdůvodňoval, aby měl sám živou starostlivost o to, zda ta a ta věc je vskutku v pořádku. To se ale neděje tak, že by se v důkazech ponechávaly mezery, nýbrž tak, že se vědomě důkaz vynechá a výslovně přenechá čtenáři. Tak se kniha stává ihned při četbě současně bohatou sbírkou úloh ryze myšlenkových. Autor je z počátku ochoten vysvětlit svému nerutinovanému čtenáři i takové věci, jako je význam spojky „nebo" nebo spojení „právě tehdy, jestliže", ale pak požadavky na myšlenkovou soustředěnost, důslednost a aktivitu rapidně stoupají. S tím souvisí, že v protikladu k názornému východisku učí záhy přísně dedukovat. Co tím myslím, popíši na následujícím příkladě:

Autor má už pro nezáporná celá čísla pojem součinu, jakož i věty

$$0a = 0 = a0 \tag{1}$$

a

$$a \neq 0 \neq b \Rightarrow ab \neq 0 \tag{2}$$

a definuje součin $a_1 a_2 \dots a_n$ libovolných celých čísel jako $|a_1|\,|a_2| \dots |a_n|$ nebo $-(|a_1|\,|a_2| \dots |a_n|)$ podle toho, zda počet záporných z činitelů $a_1, a_2, \dots, a_n$ je sudý či lichý; načež důkaz věty „*součin dvou čísel je roven nule, je-li aspoň jeden činitel roven nule; je kladný, jsou-li oba činitelé kladní nebo oba záporní; je záporný, je-li jeden činitel kladný a druhý záporný*" pro libovolná celá čísla zní prostě takto:

Protože $-0 = 0$, je první část důsledek věty (1); ostatek je důsledek věty (2), neboť 0 a 2 jsou čísla sudá, 1 je číslo liché.

Citací vět, vzorců, poznámek a příkladů je velmi a velmi mnoho. Doporučuji čtenáři, aby si na zvláštní arch vypsal z první kapitoly alespoň následující věty (s označením jejich čísla):

2,1 až 2,9; 3,1 až 3,14; 3,16; 3,17; 5,1; 5,2; 5,4 až 5,9; 6,1; 6,4 až 6,6; 7,4; 7,5; 7,9; 8,1; 8,2; 8,4; 9,1; 9,3; 9,4; 9,7

---

[2]) Sotva by dnešní matematik v stručném nástinu prvního paragrafu Cantorova článku *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Math. Ann. 5 (1872)) spatřoval jádro toho, čemu dnes říkáme Cantorova theorie reálných čísel a co se stalo později (1914) F. HAUSDORFFOVI vzorem pro konstrukci t. zv. úplného obalu libovolného metrického prostoru (srv. E. ČECH, *Bodové množiny*, Praha 1936, str. 82 n).

a vzorce:

$$(3{,}14),\ (7{,}2) \text{ až } (7{,}4),\ (9{,}1) \text{ až } (9{,}3),$$

aby aspoň poněkud omezil nutné listování.

Za čtvrté autor zvolí sice určitý způsob definice součtu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, součinu $a_1 a_2 \ldots a_n$ a mocniny a^n, a to způsob definice přímo pro jakékoliv přirozené číslo n, ale jako červená nit se vine všemi třemi prvními kapitolami upozorňování, že lze postupovat také rekurentně. A tak, i když vede svého čtenáře cestou naprosto odlišnou od postupu PEANOVA, ukáže mu zcela zřetelně roli jeho indukčního axiomu. A dále: probírá sice theorii reálných čísel, vycházející z myšlenky Cantorovy, ale dá čtenáři v doplňkových paragrafech o pojmu uspořádání a o Dedekindových řezech vše potřebné, aby pochopil základní myšlenku R. DEDEKINDA pro zcela jiné vybudování theorie reálných čísel. V tom vidím snahu autorovu nenavykat na pěstování výlučnosti, nýbrž vést k širokému rozhledu.

Za páté nelze u knihy pominout pozoruhodně přirozenou, plynulou a korektní češtinu s pečlivým terminologickým zřetelem.

Nyní přihlédnu blíže k zpracování jednotlivých kapitol:

První kapitola jedná o číslech celých. Taková látka je podle mého mínění zkušebním kamenem pedagogického umění. Zde se rozhodne, zda čtenáři otevřeme oči pro potřebu abstrakce či zda jej proti ní zatvrdíme. A tu myslím, že autor s tak obrovskou erudicí, který tak vášnivě rád získává zájem lidí pro matematiku, správně vyhmátl, co je a co není možné a že ukázal cestu správnou. Rozumí se správnou vzhledem k cíli, který kniha sleduje. Jak se vyřídí logicky správně aritmetika racionálních (kladných) čísel na 42 stránkách, ukázal před čtvrt stoletím E. LANDAU svými *Grundlagen der Analysis* (Lipsko, 1930). Ale v Čechově knize nejde jen o logickou správnost.

Vycházeje od představy celých nezáporných čísel, vznikajících od nuly počínaje přidáváním jedničky, od představy konečné množiny a jejího čítání, tedy od počtu prvků konečné množiny, definuje součet a součin nezáporných čísel na základě sjednocení a kartézského součinu konečných množin. Přitom rozlišuje případ dvou a případ n sčítanců (činitelů), pečlivě dbaje případu $n = 1$ a toho, aby si čtenář navykl vždy také tento případ mít na zřeteli. Z příkladů, jimiž ilustruje základní aritmetické zákony, uvádím tento: Z 5 dam a 4 pánů lze vybrat taneční dvojici týmž počtem způsobů jako ze 4 dam a 5 pánů.

Za větou 3,11, kterou si má čtenář sám dokázat, postrádám upozornění, že důkaz nalezne v důkazu věty 3,15. Autor rozeznává *zobecněný* distributivní zákon

$$\Sigma a_r \, \Sigma \, b_s = \Sigma a_r b_s$$

od *nejobecnějšího* distributivního zákona

$$\prod_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_m} a_{1s_1} a_{2s_2} \ldots a_{ms_m}$$

(ale symbolů Σ a Π užívá až v kapitole IV).

S neaxiomatickým pojetím nezáporných celých čísel souvisí názorné pojetí rekurentní definice a důkazu indukcí, názorné pojetí vztahů „menší“, „větší“ a názorné odůvodnění důležité implikace o nezáporných celých číslech: $m > n \Rightarrow m \geqq n + 1$.

Velmi vhodně volený příklad rekurentní definice, totiž definice sudého a lichého čísla, mlčky předpokládá, že žádné nezáporné celé číslo není současně sudé i liché.

Do výkladu o obratu „V platí právě tehdy, jestliže platí W“ by byla dobře zapadla též formulace „V znamená totéž co W“, v knize užívaná. Analogickou poznámku možno učinit o spojení „pouze tehdy“.

Myslím, že značnou práci dá čtenáři přesné chápání rozdílu $b - a$, probíraného ve třech etapách: 1) $0 \leqq a \leqq b$; 2) $0 \leqq b < a$; 3) a, b jsou libovolná celá čísla. A dále tu naráží čtenář na typickou metodickou potíž, známou ze školské didaktiky, od kterého okamžiku a proč začít chápat rozdíl $b - a$ jako součet čísel $b, -a$. Myslím, že by zřetelnosti bylo bývalo na prospěch, kdyby za definicí součtu $c_1 + c_2$ dvou celých čísel byla následovala poznámka tato: *Jsou-li a, b čísla nezáporná a je-li $a > b$, je $a - b$ součtem čísel $a, -b$.*

Typickou potíží při geneticky budované theorii reálných čísel je trpělivé prokazování permanence. Autor trpělivost měl. Jeho důkazy permanence jsou přes krajní stručnost naprosto přesné a metodicky obratné. Jde jen o to, nalezne-li v té trpělivosti zalíbení také čtenář. A tu myslím, že autor na svých prvních 46 stránkách učinil všecko možné, aby jeho čtenář na str. 47, kde je prvý důkaz permanence, už cítil potřebu permanenci prokazovat. A dále myslím, že byl-li jednou takto získán, je naděje, že to v některých případech vydrží až do str. 122, kde si má sám provést důkaz, že základní věty o posloupnostech s racionálními členy zůstanou v platnosti i v oboru čísel reálných.

První kapitola končí výkladem o nerovnostech v oboru celých čísel, který je pozoruhodný tím, jak autor začne názornou pomůckou číselné osy, ale potom čtenáře navyká na formulaci abstraktní. To je konkrétní ukázka Čechova zásadně vlídného postoje ke čtenářovým potížím, který ale nakonec z vědecké pravdy slevovat nemíní.

Druhá kapitola jedná o číslech racionálních. Základní úlohou této kapitoly je vyložit konstrukci podílového tělesa k oboru celých čísel tak, aby se základní myšlenky o *pravidlu ekvivalence* (obecné rovnosti) pro danou množinu neboli o jejím *roztřídění* dalo mutatis mutandis použít i pro pochopení Cantorova způsobu zavedení iracionálních čísel. O to se autor pokusil, a to po mém názoru mistrně, tím, že pojetí množinové (třída ekvivalentních prvků) doprovází až zatlačuje pojetím logickým (konkretní vyjádření abstraktního pojmu). Vyslovím se konkretněji takto: Autor řekne, že „elementární zlomek“ $\frac{a}{b}$ (a, b celá, $b \neq 0$) „určuje“ racionální číslo $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ a že $\frac{a}{b}$ je „vyjádřením“ pro $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, a už čtenáře nedráždí pojetím, že $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ je množinou všech $\frac{x}{y}$ (x, y celá, $y \neq 0$) takových, že je $\frac{x}{y} \sim \frac{a}{b}$. Rozhodně je takto blíž čtenářově číselné zkušenosti, tím spíš, že ekvivalenci $\frac{x}{y} \sim \frac{a}{b}$ definuje tím, že elementární zlomky $\frac{x}{y}$ a $\frac{a}{b}$ mají „společné rozšíření“, t. j. že při vhodných přirozených h, k je $xh = ak$ a $yh = bk$. Ale současně má čtenáře připraveného na Cantorův pojem reálného čísla: „Konvergentní“ (t. j. Cauchyova) posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ racionálních čísel je (konkretním) vyjádřením určitého reálného čísla $\lim_{n \to \infty} a_n$. Nikdo nepopře, že na tomto místě v analyse je z obou shora uvedených pojetí to, jež jsem označil jako logické, vskutku živější.

S choulostivým bodem pověstné identifikace $\left\{\frac{a}{1}\right\} = a$ se autor nijak nepiplá,[3]) nýbrž raději podrobně ukáže, že po provedené identifikaci není $\{\frac{1}{2}\}$ celým číslem.

Z ostatku této kapitoly imponuje stručný důkaz zákona $\alpha^{m+n} = \alpha^m \alpha^n$ a osobitá formulace t. zv. Bernoulliovy nerovnosti, totiž $t^n \geqq 1 + n(t - 1)$ (t racionální, $t > 0$, n přirozené), připravená k bezprostřední aplikaci. K delikátnímu bodu, kdy se

[3]) Neboť zřejmě nemíní se šířit o isomorfii.

místo $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ začne psát prostě $\frac{a}{b}$ ve významu řešení rovnice $bx = a$, podotýkám: Autor se jím netrápí jistě u vědomí toho, že potíži lze uniknout jenom tak, že se až do tohoto bodu elementární zlomky $\frac{a}{b}$ (páry celých čísel) píší důsledně ve formě $[a, b]$ — a to zase odtrhává čtenáře od jeho školského návyku. Tedy ze dvou potíží se volí snad ta menší.

Třetí kapitola je ústřední kapitolou knihy a obsahuje Cantorovu theorii reálných čísel. Dominantním pojmem této theorie je *posloupnost*. Posloupnost (jakýchkoli věcí) $A_1, A_2, \ldots$ se, jak známo, značí stručněji znakem $\{A_n\}$. Autor, který musí v téže knize mluvit i o třídách $\{\alpha\}$ prvků s nějakým prvkem α ekvivalentních i o posloupnostech, měl by vlastně být na rozpacích stran závorek $\{\}$. Autor je dalek formálních nechutností a krátce závorek $\{\}$ ve smyslu ekvivalence přestane včas užívat, takže je má uvolněny pro stručné označování posloupností.

Prvým úkolem této kapitoly je podat z nauky o racionálních posloupnostech, t. j. o posloupnostech s racionálními členy, tolik, kolik je zapotřebí pro zavedení pojmu reálného čísla. Všechny sem spadající pojmy musí tedy prozatím zůstat v oboru racionálních čísel: proto se racionální posloupnost nazve *omezená*, když existuje takové racionální M, že ..., nazve se *nulová*, když ke každému racionálnímu $\varepsilon > 0$ lze udat přirozené N tak, že ... a zejména nazve se *konvergentní*, když ke každému racionálnímu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené N, že při $m > N$, $n > N$ je $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Pokud jde i v této nejobtížnější kapitole o cíl knihy, tu ani autor sám si nečiní ilusí; praví v předmluvě, že ani čtenář, který důkladně prostuduje první dvě kapitoly, nebude asi ještě schopen plně si promyslit celý dosah probrané látky (třetí kapitoly). A tak nalézáme před vlastními epsilonovými důkazy vět o racionálních posloupnostech intuitivní nástiny, které mají pomáhat otvírat oči překvapenému začátečníku. Jistě i odborníka tu zaujme důkaz poslední věty před zavedením pojmu reálného čísla, totiž, že *každá omezená monotonní posloupnost je konvergentní.*

Pojem reálného čísla se v této theorii zavede takto: V množině všech konvergentních racionálních posloupností se definuje pravidlo ekvivalence $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ tím, že $\{a_n - a'_n\}$ je nulová a příslušné třídy mezi sebou ekvivalentních (konvergentních racionálních) posloupností, čili příslušné nové abstraktní pojmy, se nazvou *reálná čísla* — s identifikací, že to reálné číslo, jež obsahuje racionální posloupnost $\alpha, \alpha, \ldots$, čili jehož konkretním vyjádřením je taková posloupnost, ztotožníme s racionálním číslem α.[4])

Teď tedy každá konvergentní (racionální) posloupnost $\{a_n\}$ „určuje" reálné číslo a toto číslo se značí znakem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Další, čím dál obtížnější obsah třetí kapitoly je takový: Způsobem, kterého užil v r. 1908 G. Kowalewski ve svých proslulých *Grundzüge der Differenzial- und Integralrechnung*, se definuje součet, součin a podíl reálných čísel, kdežto způsobem ryze cantorovským se zavede nerovnost mezi reálnými čísly takto: Autor nazve racionální $\{a_n\}$ *výrazně kladnou*, když lze udat racionální $v > 0$ tak, že je $a_n > v$ pro skoro všechna n. Pak za kladné se prohlásí takové reálné číslo, jež je limitou výrazně kladné posloupnosti a dále se definuje nerovnost $\alpha > \beta$ mezi reálnými čísly tím, že reálné $\alpha - \beta$ je kladné. Tím padá posled-

[4]) Je totiž evidentní, že taková racionální posloupnost je nejvýš jedna. Komu je tento poslední krok proti mysli, ten může použít tohoto obratu. Je-li a reálné číslo, položím $a^* = \alpha$ nebo $a^* = a$ podle toho, zda racionální posloupnost $\alpha, \alpha, \ldots$ je či není konkretním vyjádřením reálného čísla a (srv. V. Jarník, *Úvod do počtu diferenciálního*, Praha 1946, str. 49). A pak místo množiny všech a vezmu množinu všech a^*.

ní bariéra mezi tradičním pojetím a touto theorií a je otevřena cesta k větě o hustotě racionálních čísel v množině reálných čísel, tím k epsilontice s reálným ε a k definicím nulové a konvergentní posloupnosti reálných čísel. Posledním krokem je definice limity posloupnosti reálných čísel a vrchol celé theorie, totiž věta, že *posloupnost reálných čísel je konvergentní právě tehdy, jestliže má limitu.* Přitom říkáme, že reálné α je limitou posloupnosti $\{\alpha_n\}$ reálných čísel, když $\{\alpha_n - \alpha\}$ je nulová. Považoval jsem za svou povinnost naznačit postup Cantorovy theorie, aby se při zběžném listování v Čechově knize neshledávalo podivným, že ona vrcholná věta je až na str. 123 přesto, že pro neinformovaného je její obsah banální.

Konec kapitoly obsahuje nyní v rychlém sledu obvyklou řadu vět o reálných posloupnostech a vedle toho dva velmi pozoruhodné důkazy pro existenci odmocniny z kladného reálného čísla. Jistě i odborníka budou zajímat důkazy jdoucí k cíli bez věty o infimu a bez Bolzanovy věty o spojité funkci.

Péči o permanenci, která se koncem kapitoly už hodně zaplétá, splnil autor naprosto korektně (i když bez formální okázalosti). Jenom dvě drobná nedopatření mu lze vytknout: O větách II 6,2 (t. j. věta 6,2 v kap. II) a II 6,3 nebylo výslovně dokázáno, že platí i v oboru reálných čísel, ač se jich v této šíři užije v důkaze věty III 5,16; a také nebylo o větě II 6,17 poznamenáno, že platí i pro reálná u, v, ač se jí v této šíři užije dvakrát na počátku prvního důkazu věty III 6,3.

Budiž mi prominuto, že se o obsahu kapitol IV a V vyjádřím už jenom stručně.

V té části kapitoly IV, jež pojednává o dělitelnosti, upoutá svérázný postup, který vychází od pojmu násobku a nikoli dělitele, jakož i pozoruhodná formulace fundamentální věty o kanonickém rozkladu. V té části, jež zavádí symboly Σ a Π, jistě i odborníka zaujme, jak se na třech řádkách spočítá, že v kanonickém rozkladu faktoriely 2100! se prvočíslo 7 vyskytuje v mocnině 7^{348}. Ve dvou paragrafech se probírá kombinatorika, partie, o kterou měl vždy živý metodický zájem autor, který po 15 let hlásal ústřední důležitost synthetického soudu a slovních úloh ve školské matematice. V paragrafu o mnohočlenu se čtenář naučí jak Ruffiniově pravidlu, tak Hornerově schematu.

Kapitola V by se před dvěma lety ani snad nebyla hodila do knihy, jejíž první tři kapitoly jsou tak principiálně významné. Dnes se však na výběrových školách přestalo učit analytické geometrii. A tu je poučení o ní z pera tak zkušeného rádce, jakým je autor knihy, jistě velmi vítanou kapitolou.

Co říci nyní na závěr k tomu, zda kniha splní své poslání, zda, jak praví autor v předmluvě, „čtenář, který knihu prostuduje, bude se dívat novým způsobem na to vše, o čem si snad myslil, že už zná, ztratí bázeň před matematikou, přijde na chuť abstraktnímu myšlení, s daleko větší nadějí na úspěch bude moci studovat ty partie vyšší matematiky, o které má zájem". Po mnohaleté učitelské zkušenosti s různým žactvem nejrůznějšího věku všech tří školských stupňů soudím, že své poslání splní. Ne proto, že už je rozebrána. Ale proto, že tomu, kdo má o znalost matematiky opravdový zájem a komu nebylo lehkomyslně vykládáno o jalovosti theoretických poznatků v matematice, je theoretické prohloubení a ozřejmění vždycky radostným překvapením, úlevou a pomocí.

Poznámka. Prosím čtenáře, aby si v knize provedl následující opravy drobných nedopatření:[5])

26_{15} místo § 1 čti § 3, 30_3 místo § 8 čti § 7, 40^{10} místo 3,6 čti 3,7, 40^{15} místo „vět 2,7 a 6,1" čti „vět 2,7 a 6,2", 41_{13} místo „podle (6,2)" čti „podle (6,10)", 50_{13} místo „nezáporné" čti „kladné", 54^{12} místo 9,6 čti 9,4, 78_3 místo I 9,6 čti I 9,7, 79_{10} místo α čti $\alpha \neq 0$, 81^8

[5]) 26_{15} značí: stránka 26, řádek 15 zdola. Obdobně 40^{10}.

místo „věty 6,7“ čti „věty 6,9“, 92^9 místo 8,2 čti 7,2, 111^7 místo α'_n čti a'_n, 116_4 místo „větu 2,7“ čti „příklad 2,1“, 120^2 místo I 9,6 čti I 9,7, 122_9 místo 2,18 čti 2,17, 123^{10} místo α_n čti a_n, 134_9 místo „reálných“ čti „racionálních“, 144_8 místo V_3 čti V_4, 146^{10} místo „číslo“ čti „číslo $>$ 1“.

Mimo to doporučuji na str. 27 v řádku 20 zdola za slovo „přímo“ vložit „(pro jakékoli přirozené číslo n)“ a zato v řádcích 17—19 zdola vynechat„; potom pojem obecného ... obecnější čísla“; dále před čtením důkazu věty 4,5 na str. 29 se poučit o významu spojení právě tehdy z poznámek 5,16 a 5,17 na str. 35 a 36; konečně v důkazu věty 4,3 na str. 119, řádky 8 a 9 zdola, čísti „je správná věta I 5,4“ a vynechati „z věty 4,1“.

Miloš Neubauer, Praha.

E. Kraemer, K. Rakušan, J. Vyšín: **Branné prvky v matematice.** Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1954, 167 stran, 120 obrázků, cena 12.50 Kčs.

Recensovaná knížka je určena jako pomůcka pro učitele jedenáctiletek a odborných učilišť. Je to první práce v naší literatuře, která se zabývá aplikacemi školské matematiky na brannou a předvojenskou výchovu. Proto bude nepochybně vřele přijata jak školskými pracovníky, tak i vedoucími pionýrských oddílů a pracovníky ČSM, a to tím spíše, že je velmi zdařile zpracována.

V Úvodu se autoři zabývají otázkou, co lze očekávat od vyučování matematice pro brannou výchovu. Zdůrazňují právem, že výuka v matematice může a má plnit v branné výchově širší úkol než jen poskytnout vědomosti nutné pro aplikace v topografii, balistice a pod. Vyučování matematice totiž vede k přesnému, stručnému a jasnému vyjadřování, vytváří a formuje volní charakterové vlastnosti žáků, učí pracovní kázni a přesnosti, vede k důslednosti a samostatnosti v práci, k překonávání překážek a iniciativnosti, nutí k promýšlení problémů a užívání vtipných obratů, které mnohdy obtížné problémy převádějí na jednoduché. Rozvíjí se tedy při vyučování matematice právě ty schopnosti, které jsou pro brannost velice důležité.

Předmětem knížky jsou aplikace partií školské matematiky na dvě vojenské disciplíny: na topografii a střeleckou přípravu.

Topografii je věnováno více místa (devět kapitol, jež zabírají skoro tři čtvrtiny knihy), ježto poskytuje velice mnoho příležitosti k aplikacím, zvláště v trigonometrii a planimetrii. Po stručném seznámení s pomůckami pro topografické práce (jako na př. jsou výtyčky, záměrné kříže, měřické pásmo, úhloměrné přístroje, měřické stoly, libela, modely pro přípravné práce a pod.) následuje výklad o jednoduchých pracích v terénu, jako jsou odhady, měření a určování vzdáleností, vytyčování přímek a úhlů a výpočty obsahů a objemů různých objektů. Pro úhlovou míru je v knížce vedle stupně zaveden také dílec. Je podána jeho přesná definice i vysvětleno praktické jeho použití. Dále je popsána práce s měřicím stolkem a úhloměrným přístrojem a vyloženy methody rayonování, protínání vpřed a protínání vzad. Velká pozornost je věnována také úlohám souvisícím s kartografickým zobrazováním. Jednak jsou to úlohy, jež se dají řešit metodou profilů, úloha zvukoměřická (určení polohy děla, známe-li přesně okamžiky, v nichž bylo na různých místech slyšet výstřel, po případě ještě vidět záblesk při výstřelu), jednak úlohy z vlastní kartografie. Jsou zde vyloženy zásady zobrazení ekvidistantního, konformního a ekvivalentního a zavedeny pojmy orthodromy a loxodromy a vyložen jejich praktický význam.

O použití matematiky ve střelecké přípravě je pojednáno ve třech kapitolách. První se týká určení palebného vějíře, druhá jedná o rozptylu při střelbě a o výpočtu spotřeby střeliva (na základě počtu pravděpodobnosti), třetí kapitola se zabývá elementárními pojmy z vnější balistiky, jako je maximální dostřel, polohový úhel cíle a řeší úlohy pohybu střely ve vakuu.

V textu je kromě výkladu látka ještě ilustrována řadou řešených příkladů a u každé partie jsou zařazena cvičení. Pro potřebu učitelů je v knížce uvedeno v přehledu rozdělení hesel z branné výchovy podle toho, jak připadají na jednotlivé ročníky výuky v matematice, a uveden přehled cvičení z učebnic matematiky, rýsování a deskriptivní geometrie, která jsou cenná s hlediska branné a předvojenské výchovy.

Upozorňujeme čtenáře na některá nedopatření:

str. 7, ř. 4 zdola má být „měly" místo „měli";

str. 47, ř. 7 pod obr. 34 má být „na něj" místo „na něho";

str. 56, odstavec 3 zdola: souvětí v tomto odstavci je gramaticky nesprávné;

str. 68: označení severu zeměpisného s_z v obr. 50 nesouhlasí s označením s_g v textu;

str. 105: z předpokladu, že hlaveň děla není ani v poloze vodorovné ani svislé, ještě neplyne, že jde o vrh šikmý *vzhůru*.

Kromě toho najdeme v knížce ještě další jazykové chyby. — Po stránce didaktické by lepšího zpracování vyžadoval odstavec o protínání zpět. Větší péče měla být věnována některým obrázkům (zejména obr. 44).

Závěrem dlužno říci, že autoři se v recensované knížce zhostili úspěšně svého úkolu. Zajímavě a s náležitou přesností zpracovali ty partie matematiky, jež se dají ve škole úspěšně aplikovat na brannou výchovu. Současně knížka rozhojňuje příkladový materiál a v tom je klad i pro výuku v matematice samé.

Jan Pavlíček a *Ladislav Kosmák*, Praha.

V. A. Ditkin - P. I. Kuzněcov: **Příručka operátorového počtu.** Vydalo Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1954. Stran 340, obrázků 8. Cena brožovaného výtisku Kčs 24.

Překladem knihy od V. A. Ditkina a P. I. Kuzněcova „Příručka operátorového počtu" se dostává do rukou našim čtenářům, a to z řad matematiků, inženýrů a všech těch, kteří přijdou do styku s operátorovým počtem, důležitá pomůcka. Operátorového počtu jakož i matematických základů jako — Laplaceovy nebo Laplace-Carsonovy transformace se užívá se zdarem v elektrotechnice, ale také ve všech oborech, kde se setkáváme s obyčejnými nebo parciálními diferenciálními rovnicemi nebo tam, kde je výhodnější pracovat v prostoru obrazů místo originálů, jako to činíme na příklad v počtu pravděpodobnosti.

Z hlediska čistě matematického představují zmíněné transformace velmi zajímavý objekt studia a bádání, takže dobrý překlad dobré knihy o těchto transformacích je více než vítaný. Můžeme říci, že obě tyto podmínky jsou překladem knihy Kuzněcova a Ditkina Oldřichem Koníčkem splněny. Kniha má tím větší cenu, že je vlastně první větší monografií v české literatuře, která se věnuje tomuto thematu. Nadto více než polovinu knihy tvoří velmi rozsáhlé tabulky operátorů, které samy o sobě jsou velmi cennou částí přeložené příručky.

Po úvodu v § 1 autoři podávají přehled Laplaceovy transformace v § 2. Je zde řečeno téměř vše podstatné, a co je nutno zdůraznit, autoři vycházejí z pojmu Lebesgueova integrálu, čímž dodávají pojmu originálu i obrazu solidní základ. § 3 je věnován definici operátoru, definičního oboru operátoru a operacím s operátory. § 4 se zabývá Duhamelovým integrálem, který vyplývá z věty o konvoluci, a je pozoruhodný větou, jež praví, že operátory splňující některé přijatelné požadavky všecky spadají pod uvedenou definici. § 5, 6, 7, jsou věnovány realisaci operátorů a jsou zde uvedeny věty, na nichž se zakládá realisace operátorů jako na př. známá věta o rozkladu operátoru. V § 9 se zabývají autoři operátory závislými na parametru, s kterými se mimo jiné nejčastěji setkáváme při užití Laplaceovy transformace na řešení parciálních diferenciálních rovnic.

§ 8 je věnován Efrosově transformaci, která je velmi důležitou pomůckou při realisaci operátorů. V § 10 jsou spočítány některé příklady na parciální diferenciální rovnice matematické fysiky: kmitání membrány, teplota tyče, teplota poloprostoru zahřívaného nekonečným válcem, průběh koncentrace plynu. Theoretická část příručky končí dodatkem překladatele, který instruuje čtenáře jak pracovat se slovníkem a gramatikou operátorového počtu. Zvláštní pozornost je zde věnována Efrosově transformaci.

Tabulky operátorů začínají přehledem označení speciálních funkcí. Potom následuje gramatika operátorového počtu a nakonec jsou vlastní tabulky operátorů. Jsou seřazeny podle obrazů. Začíná se racionálními funkcemi, potom následují: irracionální funkce, exponenciální funkce, goniometrické a hyperbolické funkce, logaritmické, cyklometrické a hyperbolometrické funkce, gamma funkce, integrální funkce, sigulární hypergeometrické funkce, Besselovy funkce, kulové funkce, eliptické funkce, theta funkce, Mathieuovy funkce, hypergeometrické funkce a posléze různé.

Vyzdvihněme ještě jednou dva základní klady Ditkin-Kuzněcovovy příručky: bohatost materiálu a poměrně moderní, přesná výstavba theoretické části.

Závěrem je nutno poukázat na některé nedostatky českého překladu příručky, které byly způsobeny jednak chybami v originálu, jednak přehlédnutími v překladu. Na stránce 22 v poznámce 1 má být místo nespr. $\sigma < \sigma_c$ spr. $\sigma_0 > \sigma_c$, na str. 43 v poznámce má být místo nespr. $F(D)f = \bar{F}(D)f(D)\,\eta$ spr. $F(D)f = F(D)\,\overline{f(D)}\,\eta$, na str. 46 ve výrazu $\dfrac{h(t)}{D^3}$ má být místo nespr. $f_2(n)$ spr. $f_1(n)$, na str. 51 ve výrazu $F(D)f$ má být místo nespr.

$$\sum_{k=3}^{1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{a_k\, f(p)}{p^{k+1}}\, e^{pt}\, dp \text{ spr. } \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{a_k\, f(p)}{p^{k+1}}\, e^{pt}\, dp,$$

na str. 52 na konci stránky patří místo nespr. $\dfrac{D}{D-a}\,f$ spr. $\dfrac{1}{D-a}$, na str. 62 ve výrazu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c e^{-\sqrt{t^2 - \xi^2}\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{i+\xi}{i-\xi}} - \frac{1}{2w}\sqrt{\frac{t-\xi}{t+\xi}}\right)} \frac{dw}{w}$$

má být místo nespr. i spr. t, na str. 74 má být:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(\omega(p))}{p^2}\, e^{pt}\, dp = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2}\, dp\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \omega(p)}\, d\zeta,$$

na str. 82 má být místo nespr. φ_n spr. ψ_n.

Dodatek překladatele je vlastně podrobnější návod jak užívat tabulek operátorů. Pro lepší orientaci v gramatice operátorového počtu je znovu citována Efrosova věta pro Laplaceovu a Laplace-Carsonovu transformaci. Jsou uvedeny některé postačující podmínky, aby byla zaručena její platnost. Formulace věty, jak je uvedena v dodatku, je poněkud nesrozumitelná a nevystihuje podstatu věci. Abychom měli jasno, uvedeme Efrosovu větu ve třech různých formulacích.

Věta. *Nechť* $L(f(t)) = \varphi(p)$, $L(g(\xi, t)) = \omega(p) e^{-\xi\psi(p)}$ pro skoro všecka $\xi \epsilon \langle o, p)$, *kde* $w(p)$ *a* $\psi(p)$ *jsou funkce nabývající komplexních hodnot proměnné* p. *Nechť konverguje ve smyslu Lebesgueově integrál* $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, g(\xi, t)\, f(\xi)\, d\xi$ *pro nějaké reálné* σ. *Potom platí:*

$$L\Big(\int_0^\infty g(\xi, t)\, f(\xi)\, d\xi\Big) = \omega(p)\, \varphi(\psi(p)) \textit{ pro } \mathrm{Re} p \geqq \sigma.$$

Důkaz se provede snadno užitím Fubiniovy věty. Větu můžeme ovšem též vyslovit vycházejíce z pojmu Riemannova integrálu. Potom až na jeden dodatečný předpoklad bude věta znít ve shodě s dodatkem:

Věta. *Nechť* $f(\xi)$ *je po částech spojitá, a to pro* $\xi \geqq 0$, $g(\xi, t)$ *je spojitá v intervalu* $\xi \geqq 0$, $t \geqq 0$, $\int_0^\infty f(\xi)\, g(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k proměnné* $t \geqq 0$ *z libovolného konečného intervalu,* $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} g(\xi, t)\, \mathrm{d}t$ $\operatorname{Re} p \geqq \sigma$ *konverguje stejnoměrně vzhledem k proměnné* $\xi \geqq 0$ *z libovolného konečného intervalu, nechť alespoň jeden z integrálů* $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\, \mathrm{d}t \int_0^\infty |g(\xi, t)|\, |f(\xi)|\, \mathrm{d}\xi$, $\int_0^\infty |f(\xi)|\, \mathrm{d}\xi \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\, |g(\xi, t)|\, \mathrm{d}t$ *konverguje pro reál.* σ. *Potom je splněno výše uvedené tvrzení.*
Je vidět, že za předpokladů silnějších dostáváme totéž. Je možno ovšem zaručit platnost našeho tvrzení, i když nebude konvergovat uvedený dvojný integrál.

Věta. $f(\xi)$ *a* $g(\xi, t)$ *buďte stejné jako v předchozí větě. Nechť* $\int_0^\infty f(\xi)\, g(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi$ *konverguje stejnoměrně pro* $t \geqq 0$, $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\, \mathrm{d}t \int_0^\infty f(\xi)\, g(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi$ *konverguje pro* $\sigma > 0$. *Potom platí naše tvrzení.*

Jindřich Nečas, Praha.