Časopis pro pěstování matematiky

Ivo Babuška

O jednom numerickém řešení úplně regulárních systémů lineárních rovnic a o jeho aplikaci na statické řešení patrových rámů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 1, 60--88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117149`

O JEDNOM NUMERICKÉM ŘEŠENÍ ÚPLNĚ REGULÁRNÍCH SYSTÉMŮ LINEÁRNÍCH ROVNIC A O JEHO APLIKACI NA STATICKÉ ŘEŠENÍ PATROVÝCH RÁMŮ

IVO BABUŠKA, Praha.

(Došlo dne 25. dubna 1954.)

DT:512.831
624.04
624.072.333

Ve stavební praxi se vyskytují velmi často systémy lineárních rovnic, které mají jisté charakteristické vlastnosti. Je to systém lineárních deformačních rovnic při statickém výpočtu patrových rámů (viz na př. [3]).

C. V. KLOUČEK ukázal (srv. [1], [2]) jistou metodu řešení těchto rovnic, kterou nazval podle fysikálního významu rozvodem deformací.[1]) Tato metoda má určitý iterativní charakter. C. V. Klouček pak ve svých pracích ukazuje na konkretních výpočtech správnost a účinnost této metody. V tomto článku je tato metoda zobecněna a ukázána její správnost pro systémy lineárních rovnic, které mají určité přesně definované vlastnosti a které budeme nazývat úplně regulárními.

1. Některé vlastnosti symetrických matic.

V tomto odstavci zavedeme jisté pojmy o maticích a dokážeme některé věty, které budeme v dalším potřebovat.

Definice 1. *Buď* $A = \|a_{i,j}\|$; $a_{i,i} \neq 0$ *symetrická matice konečného řádu* n *nebo nekonečná. Budeme nazývat bodovou množinu* M_A *o* n *různých (resp. spočetně mnoha) bodech* $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ *konjugovanou k* A, *jestliže ke každému* P_k *jest přiřazena jednojednoznačně* k*-tá rovnice a mimo to na* M_A *jsou definovány tyto pojmy:*

a) $P_i \underset{A}{\approx} P_j$, $i \neq j$, *jestliže* $a_{i,j} \neq 0$.

b) $P_f \underset{A}{\sim} P_k$, *jestliže existuje posloupnost bodů* P_{s_i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ *taková, že* $P_{s_0} = P_l$; $P_{s_n} = P_k$ *a* $P_{s_i} \approx_A P_{s_{i+1}}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$. Jestliže $P_l \sim_A \sim_A P_k$, *pak budeme říkat, že body jsou ekvivalentní, a jestliže* $P_i \approx_A P_j$, *potom budeme říkat, že body* P_i, P_j *jsou sousední vzhledem k* A.

Poznámka. Snadno se nahlédne vzhledem k předpokládaným vlastnostem matice A, že jsou splněny axiomy ekvivalence.

[1]) Kloučkova kniha měla být v poslední době přeložena také do čínštiny.

Definice 2. *Matici $A = \|a_{i,j}\|$, konečnou nebo nekonečnou, nazveme úplně regulární s konstantou α, jestliže splňuje tyto vlastnosti:*

a) je symetrická,

b) pro všechna i platí $0 < k < a_{i,i} < K < \infty$,

c) jest $a_{i,i} = \alpha_i \sum\limits_j |a_{i,j}|$, kde se sčítá přes všechna $j \neq i$ a jest $\alpha_i > \alpha > 1$.

Úmluva. Dále budeme předpokládat vždy úplně regulární matici. Tento předpoklad nebudeme proto již dále zvlášť uvádět.

Definice 3. *Označíme m lineární prostor všech číselných omezených posloupností. Dále m_n označíme n-dimensionální euklidovský prostor. Budeme-li mluvit o p-té souřadnici vektoru $q \in m$, budeme psát $x_p(q)$ a budeme míti na mysli číslo x_p posloupnosti vyjadřující vektor q.*

Úmluva. Jestliže nebude možno dojíti k omylu, označíme symbolem m i n-dimensionální euklidovský prostor.

Věta 1. *Buď $A = \|a_{i,j}\|$ úplně regulární matice. Potom tato matice definuje lineární zobrazení na m.*

Důkaz: Jestliže jde o nekonečnou matici, je třeba dokázat, že matice A transformuje omezenou posloupnost opět v omezenou posloupnost. To jest však vzhledem k vlastnostem b) a c) úplně regulární matice zřejmé.

Úmluva. Lineární zobrazení vytvořené maticí $A, B, \ldots$ označíme **A**, **B**, ... Matici A nazveme souvislou, jestliže všechny prvky konjugované množiny M_A jsou navzájem ekvivalentní.

Věta 2. *Jestliže matice A není souvislá, potom ji můžeme vyjádřit jako přímý součet souvislých matic.*[2])

Důkaz. Jak známo, matici A můžeme vyjádřit jako přímý součet matic $A = \bigcup\limits_i A_i$, právě když prostor m můžeme vyjádřit jako přímý součet podprostorů $m^{(i)}$ takových, že **A** zobrazuje podprostor $m^{(i)}$ do sebe.

Buď M_A konjugovaná množina k A. Tato množina rozpadne se na třídy ekvivalence (alespoň dvě, vzhledem k tomu, že matice A není souvislá). Označme tyto třídy T_i. (Těchto tříd jest zřejmě nejvýše spočetně mnoho.)

---

[2]) Říkám, že matice jest přímým součtem dvou matic, jestliže vhodnou permutací můžeme dosáhnouti toho, aby matice měla tento tvar:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots\ldots & a_{1,m_1}, & 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots\ldots & a_{2,m_1}, & 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m_1,1}, & a_{m_1,2}, & \ldots, & a_{m_1,m_1}, & 0, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & a_{m_1+1,m_1+1}, & \ldots, & & a_{m_1+1,m_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & a_{m_2,m_1+1}, & \ldots\ldots & & a_{m_2,m_2} \end{pmatrix}$$

Obdobně tomu jest, když jde o přímý součet několika matic.

Buď dále $m^{(i)}$ podprostor prostoru m takový, že jest splněna relace

$$P_k \operatorname{non} \epsilon\, T_i,\ q \epsilon\, m^{(i)} \Rightarrow x_k(q) = 0$$

pro každé k, i.

Podprostory $m^{(i)}$ zřejmě tvoří prostor m jako přímý součet. Zbývá dokázati, že zobrazení $\mathbf{A}$ zobrazuje prostory $m^{(i)}$ do sebe.

Skutečně však jest

$$x_k(\mathbf{A}q) = \sum_l a_{k,l}\, x_l(q) = \sum_{\substack{l \\ P_l \epsilon T_i}} a_{k,l}\, x_l(q) + \sum_{\substack{l \\ P_l \operatorname{non} \epsilon T_i}} a_{k,l}\, x_l(q)\,.$$

Je-li $q \epsilon\, m^{(i)}$, platí

$$x_k(\mathbf{A}q) = \sum_{\substack{l \\ P_l \epsilon T_i}} a_{k,l}\, x_l(q)\,.$$

Jestliže nyní P_k non $\epsilon\, T_i$, potom zřejmě $a_{k,l} = 0$, neboť $P_l \epsilon\, T_i$ a naše tvrzení jest dokázáno.

Definice 5. *Jestliže matice A jest přímým součtem souvislých matic A_i, potom tyto matice budeme nazývat komponentami matice A.*

Definice 6. *Matici budeme nazývat uzavřenou, jestliže existuje konečná posloupnost navzájem různých čísel $s_0, s_1, \ldots, s_m$ tak, že platí*

1. $P_{s_k} \approx_A P_{s_{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, $m > 2$,
2. $P_{s_m} \approx_A P_{s_0}$.

V opačném případě budeme matici nazývat otevřenou.

Poznámka. Pro názornou představu můžeme každé matici přiřadit její graf. Předpokládejme, což nesporně můžeme, že konjugovaná množina jest složena z lineárně nezávislých bodů v rovině, t. j. z bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Grafem G_A matice budeme nazývat množinu těchto bodů a množinu úseček P_iP_j, jestliže $P_i \approx_A P_j$.

Z grafu matice můžeme snadno přehlédnout, zda matice jest souvislá, otevřená atd.

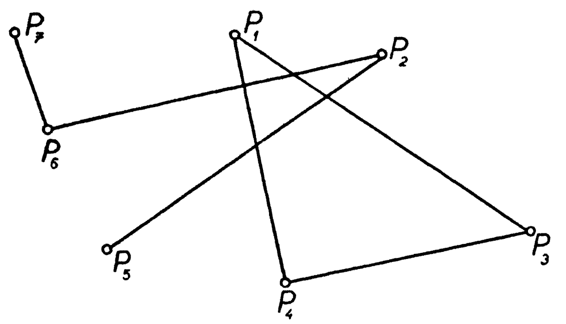
Definice 7. *Buď M_A konjugovaná množina k otevřené souvislé matici A. Budeme říkat, že bod $P_i \epsilon\, M_A$ jest vnitřním bodem, jestliže hlavní minor A_i není souvislá matice.*[3])

---

[3]) Hlavním minorem $A_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ matice A nazýváme matici, která vznikne tím, že vyškrtneme v A, $m_1, m_2, \ldots, m_n$-tý řádek a sloupec.

Uvedeme příklad: Mějme matici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Obr. 1.

Potom její graf jest na obr. 1. Vidíme okamžitě, že matice není souvislá. Není totiž $P_1 \sim_A P_5$, neboť P_1 není spojen řetězem s P_5. Dále jest patrno, že matice má dvě komponenty, z nichž jedna jest otevřená, druhá zavřená.

Poznamenejme ještě, že body P_i můžeme volit zřejmě tak, že graf matice bude míti právě tolik komponent ve smyslu topologickém, jako má matice, a že graf jest jednoduše souvislý ve smyslu topologickém, právě když matice jest otevřená.

Zatím jsme konstruovali k dané matici její graf. Ve stavební praxi při statickém výpočtu rámových konstrukcí je tomu naopak.

Nejdříve máme dán graf, schema rámu a k němu sestavujeme matici deformačních rovnic. Často se ani matice nevypisují a její prvky se píší do grafu.

Věta 3. *Buď A otevřená matice; potom každý její hlavní minor jest otevřená matice.* Zřejmé.

Definice 8. *Buď A souvislá otevřená matice a M_A její konjugovaná množina. Množinu $M_A^{i,n} \subset M_A$ budeme nazývat množinou bodů řádu n vzhledem k P_i, jestliže splňuje tyto vlastnosti:*

$P_k \in M_A^{i,n}$, *jestliže existuje posloupnost $P_{l_0}, P_{l_1}, \ldots, P_{l_n}$ o $n + 1$ prvcích navzájem různých taková, že*

$$P_{l_0} = P_i,\ P_{l_n} = P_k \text{ a } P_{l_j} \approx_A P_{l_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n - 1 .$$

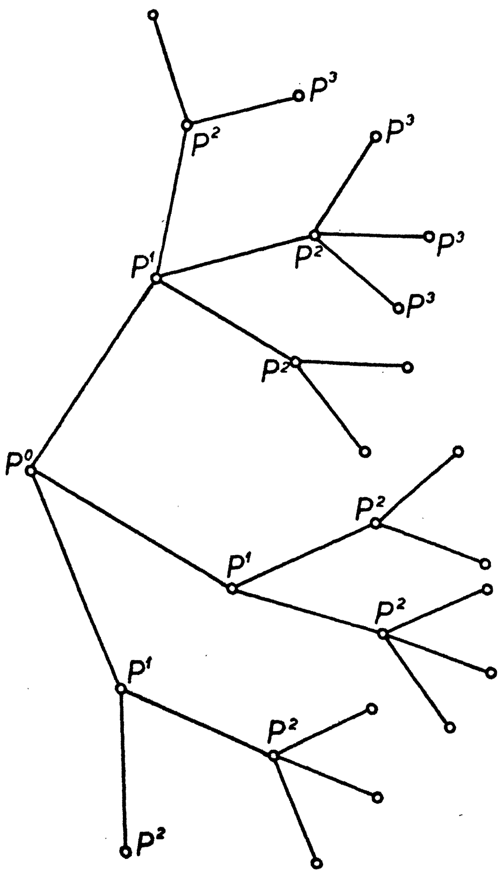
Někdy také budeme říkat, že body řádu n vzhledem k P_i mají vzdálenost od bodu P_i rovnou n.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že v minulé definici se předpokládá matice A souvislá a otevřená, existuje, jak se snadno nahlédne, právě jediná posloupnost uvedených vlastností, a tedy každý bod má vzhledem k pevnému bodu právě jediný řád.

Definice 9. *Budeme říkat, že bod P_i konjugované množiny M_A má stupeň p, jestliže P_i má právě p sousedních bodů.*

Poznámka. Graf souvislé otevřené matice má tvar „stromu“ podle obr. 2. Na tomto obraze jsou body řádu p vzhledem k P^0 označeny P^p. Pojem řádu bodu má tak velmi názorný význam.

Věta 4. *Buď A otevřená souvislá matice. Potom každý bod konjugované množiny řádu p jest spojen právě s jedním bodem nižšího řádu, a to řádu $p - 1$.*



Obr. 2.

Důkaz. Pro určitost vztahujeme řád bodu k P_0 a mluvme o bodu P_n, který jest řádu n.

Podle definice existuje posloupnost bodů o $n + 1$ prvcích,

$$P_0 \approx_A P_1 \approx_A P_2 \approx_A \dots$$
$$\dots P_{n-1} \approx_A P_n ,$$

při čemž tato posloupnost existuje právě jediná. Z toho jest okamžitě patrno, že bod P_{n-1} jest řádu $n - 1$, a tím jest tvrzení dokázáno, neboť jestliže by existovaly dva body řádů $n - 1$, sousední vzhledem k P_n, nemohla by matice být otevřená.

Věta 5. *Buď A souvislá otevřená matice a M_A její konjugovaná množina. Buď $M_A^{i,n}$ množina bodů n-tého řádu vzhledem k P_i. Dále buď ${}^*M_A^{i,n} = \sum_{k=0}^{n-1} M_A^{i,k}$. Potom hlavní minor $A_{l_1,l_2}, \dots, P_{l_k} \in {}^*M_A^{i,n}$ se rozpadá na komponenty takové, že každý bod řádu n jest právě v jedné komponentě a žádné dva body nemohou být v jedné z nich.*

Důkaz. Jest zřejmé, že každý bod řádu n leží právě v jedné komponentě. Stačí tedy dokázat, že nemohou být dva body řádu n v jedné komponentě. Tedy dejme tomu, že body $P_{n_1} \neq P_{n_2}$ řádu n jsou v téže komponentě. Potom jsou ekvivalentní, a proto existuje posloupnost bodů $P_{k_0}, P_{k_1}, \dots, P_{k_s}$ řádu $p \geq n$, že

$$P_{k_0} = P_{n_1},\ P_{k_s} = P_{n_2} \text{ a } P_{k_j} \approx_{A_{l_1,l_2},\dots} P_{k_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, s - 1 .$$

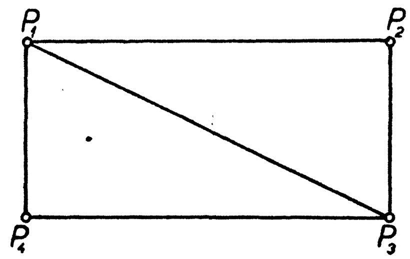
Mimo to však vzhledem k tomu, že P_{n_1} a P_{n_2} jsou n-tého řádu, existují body

$P_{r_0}, P_{r_1}, \dots, P_{r_t}$ takové, že P_{r_j}, $0 < j < t$, jsou body řádu menšího než n a $P_{r_0} = P_{n_1}$, $P_{r_t} = P_{n_2}$ a $P_{r_i} \sim_{A_{l_1,l_2,\dots}} P_{r_{i+1}}$. Z toho by však plynulo, že by matice A nebyla otevřená, což je spor. Věta jest tedy dokázána.

Důsledek věty 5. *Počet komponent minoru*

$$A_{l_1,l_2}, \dots, P_{l_k} \in {}^*M_A^{i,n}$$

je stejný jako počet prvků množiny $M_A^{i,n}$. *Jestliže není matice A konečná, míní se počtem mohutnost.*



Obr. 3.

Definice 10. *Buď* $A = \|a_{i,j}\|$ *matice řádu* $n < \infty$. *Otevřenou matici konečnou nebo nekonečnou* $A^* = \|a^*_{i,j}\|$ *nazveme rozvinutím matice A, má-li tyto vlastnosti:*

a) Jestliže označíme P_i body konjugované množiny M_A a P^*_i body množiny M_{A^*}, potom existuje jednoznačné zobrazení φ množiny M_{A^*} na M_A.

b) Zobrazení φ zobrazuje vzájemně jednoznačně všechny sousední body bodu P^*_i na všechny sousední body bodu $\varphi(P^*_i)$.

c) Jestliže $P_m = \varphi(P^*_i)$, $P_n = \varphi(P^*_j)$, potom $a^*_{i,j} = a_{m,n}$.

Poznámka. Konstrukce rozvinuté matice má názorný význam. Ukážeme to na příkladě. Buď

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Graf matice jest na obr. 3.

Na obr. 4 jest naznačena část grafu rozvinuté matice $^*A$, kde ke každému bodu P^*_i jest poznamenán v závorce bod $\varphi(P^*_i)$. Z toho jest již také snadno patrná konstrukce rozvinuté matice.

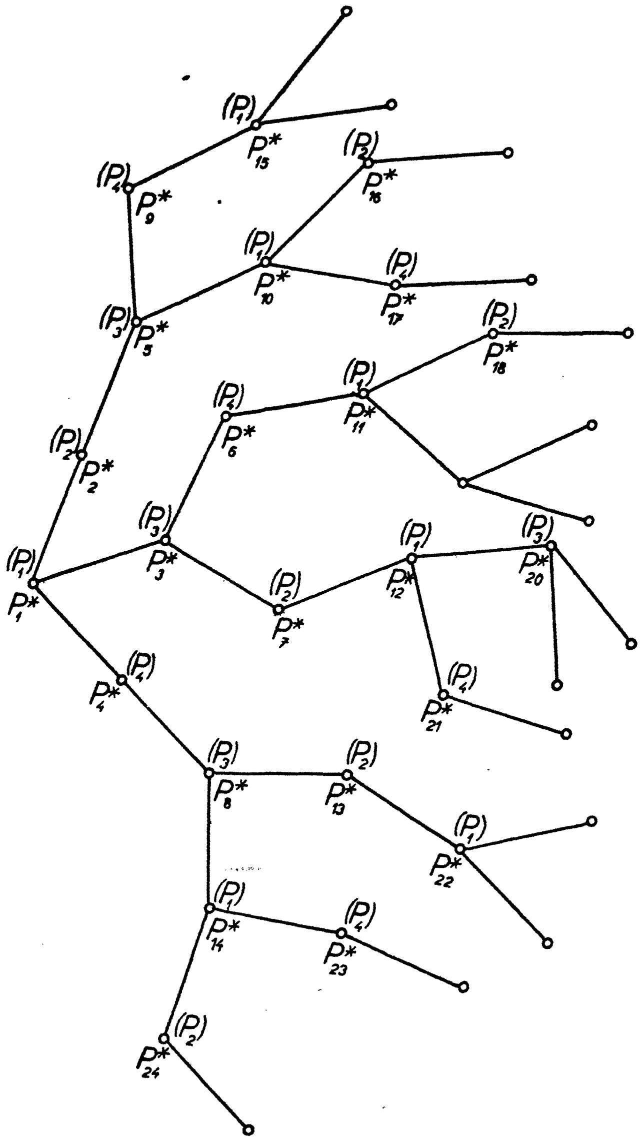
V obr. 5 jest naznačena část rozvinuté matice A^*:

Poznámka 1. Rozvinutá matice má zřejmě v každém řádku a v každém sloupci nejvýše tolik nenulových koeficientů, jako je řád matice A.

Poznámka 2. Jestliže matice A jest otevřená, potom její rozvinutá matice A^* je s ní identická. (Nejvýše s permutací řádků a sloupců.)

Poznámka 3. Rozvinutá matice A^* jest zřejmě také úplně regulární s touže konstantou jako matice A.

Poznámka 4. Z uvedeného příkladu jest patrno, jak se konstruuje rozvinutá matice. Existence rozvinutí matice je tím zřejmá.



Obr. 4.

Jednoznačnost ovšem zde neplatí. Lze však poměrně snadno nahlédnout, že platí i unicita, jestliže nehledíme na permutaci indexů. Vzhledem k tomu však, že tuto jednoznačnost nebudeme potřebovat, nebudeme se u toho zdržovat.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
6 & 1 & 3 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 4 & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & . & 7 & . & . & 1 & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-1 & . & . & 3 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 2 & . & . & 7 & . & . & . & 1 & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & 3 & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 2 & . & . & . & 4 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 7 & . & . & . & . & 2 & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 3 & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & 1 & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & . & 3 & -1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & 4 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 3 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Obr. 5.

2. Dvě věty o nekonečném systému lineárních rovnic.

V tomto odstavci uvedeme jednu větu o nekonečném systému lineárních rovnic, kterou budeme dále potřebovat. Mimo to ukážeme, že se tato věta dá aplikovat i na nekonečné systémy s úplně regulární maticí podle definice 2.

Věta 6. *Mějme nekonečný systém lineárních rovnic.*

$$x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i \,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

O systému předpokládejme, že má tyto vlastnosti:

a) $1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} |c_{i,k}| = \varrho > 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$

b) $|b_i| \leq K\varrho \,.$

Potom tento systém má ohraničené řešení

$$|x_i| \leq K \,.$$

Toto řešení může být získáno buď postupnými aproximacemi nebo methodou redukce, t. j. tak, že jestliže $\overset{N}{x_i}$ *jest řešení konečného systému*

$$\overset{N}{x_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{k=N} c_{i,k} \overset{N}{x_k} + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,,$$

potom

$$x_i = \lim_{N \to \infty} \overset{N}{x_i}\,.$$

Důkaz viz [4], kap. 1, § 2.

Věta 7. *Mějme nekonečný systém rovnic*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

a budiž matice tohoto systému úplně regulární. Dále nechť $|b_i| < K$. Potom tento systém vyhovuje předpokladům věty 6.

Důkaz. Je to zřejmé vzhledem k tomu, že podle definice úplně regulární matice jest $0 < \varkappa < a_{i,i}$, a tak stačí dělit každou rovnici členem $a_{i,i}$.

3. Některé vlastnosti úplně regulárních matic.

V tomto odstavci dokážeme některé věty o úplně regulárních maticích, resp. soustavách lineárních rovnic s úplně regulární maticí.

Věta 8. *Buď $A = \|a_{i,j}\|$, $i, j = 1, \ldots, n$ úplně regulární matice řádu $n < \infty$. Potom tato matice jest positivně definitivní.*

Důkaz. Máme dokázati, že

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \sum a_{i,j} x_i x_j > 0$$

pro všechna x_i, x_j, která nejsou identicky rovna nule.

Kvadratickou formu pišme ve tvaru

$$\sum_i a_{i,i} x_i^2 + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j a_{i,j} x_i x_j = \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \alpha_i |a_{i,j}| x_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} a_{i,j} x_i x_j\,,$$

neboť podle definice regulární matice jest

$$a_{ii} = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \alpha_i |a_{i,j}|\,.$$

Poněvadž však $\alpha_i \geq \alpha > 1$, jest

$$\sum_i \sum_j a_{i,j} x_i x_j \geq \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j \alpha |a_{i,j}| x_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} a_{i,j} x_i x_j =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j |a_{i,j}| (x_i^2 + 2\beta_{i,j} x_i x_j + x_j^2) + (\alpha - 1) \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j |a_{i,j}|\, x_i^2\,.$$

Při tom

$$\beta_{i,j} < \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}\,.$$

Je však

$$x_i^2 + 2\beta_{i,j}x_ix_j + x_j^2 \geq 0 ,$$

a proto

$$\sum_i\sum_j a_{i,j}x_ix_j \geq (\alpha - 1)\sum_i x_i^2 \frac{a_{i,i}}{\alpha_i} > 0 .$$

Věta je tedy dokázána.

Věta 9. *Mějme soustavu lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 , \\ a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

s úplně regulární maticí. Předpokládejme dále, že $b_k = 1$, $b_j = 0$, $j \neq k$, $j = 1, \ldots, n$. *Jestliže* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jest řešení tohoto systému, potom platí* $x_k > 0$.

Důkaz. Podle věty 8 jest matice soustavy positivně definitivní. Jak známo, platí potom, zavedeme-li známým způsobem skalární součin v n-dimensionálním euklidovském prostoru a chápeme-li matici soustavy jako matici lineárního zobrazení,

$$(Ax, x) > 0$$

pro každé $x \neq 0$ z našeho euklidovského prostoru.

Jestliže tedy jest $\overset{\circ}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ řešení naší soustavy, potom

$$0 < (A\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{x}) = (b, \overset{\circ}{x}) = x_k ,$$

kde $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Věta 10. *Buď* $A = \|a_{i,j}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots,$ *nekonečná úplně regulární matice s konstantou* α. *Označíme* $\underset{N}{A} = \|a_{i,j}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, *redukovanou matici. Potom také* $\underset{N}{A}$ *jest úplně regulární s touže konstantou.*

Důkaz. Zřejmě jsou splněny prvé dva předpoklady. Snadno se také nahlédne, že je splněn i třetí, neboť

$$a_{i,i} \geq \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\infty} |a_{i,j}| \geq \alpha \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}| .$$

Věta 11. *Mějme nekonečný systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots &= b_1 , \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots &= b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Buď matice této soustavy úplně regulární. Buď dále $b_k = 1$, $b_j = 0$, $j \neq k$, $j = 1, \ldots$. *Jestliže* $x_1, x_2, \ldots$ *je řešením tohoto systému, potom platí* $x_k \geq 0$.

Důkaz. Podle vět 7 a 8 existuje řešení a platí

$$x_k = \lim_{N\to\infty} \overset{N}{x}_k\,,$$

když $\overset{N}{x}_k$ je řešení redukované soustavy. Matice této soustavy je však podle věty 10 úplně regulární. Můžeme předpokládat, že $N > k$. Potom podle věty 9 jest $\overset{N}{x}_k > 0$. Z toho plyne, že $x_k \geq 0$, což bylo dokázat.

4. Řešení soustavy lineárních rovnic s úplně regulární otevřenou maticí.

V tomto a dalším odstavci budeme se zabývat řešením systémů lineárních rovnic s úplně regulární maticí. V tomto odstavci pak se budeme zabývat nejprve případem, že matice jest otevřená.

Věta 12. *Mějme systém lineárních rovnic s konečnou souvislou otevřenou maticí*[4])

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b\,,\\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= 0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= 0\,.
\end{aligned}$$

(Zde i vždy dále předpokládáme, že matice jest úplně regulární.)

Potom označíme-li

$$\alpha_{i,j} = \frac{a_{i,j}^2}{a_{i,i}a_{j,j}}\,,$$

bude platit

$$x_1 = \frac{b}{a_{1,1}}\frac{1}{X}\,.$$

$$X = 1 - \cfrac{\alpha_{1,i_1}}{1 - \cfrac{\alpha_{i_1,k_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{i_1,k_2}}{1-\ldots} - \ldots} - \cfrac{\alpha_{1,i_2}}{1 - \cfrac{\alpha_{i_2,l_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{i_2,l_2}}{1-\ldots}} - \cfrac{\alpha_{1,i_{s_1}}}{1 - \cfrac{\alpha_{i_s,m_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{i_s,m_2}}{1-\ldots} - \ldots}\,, \tag{1}$$

kde indexy $i_1, i_2, \ldots, i_s$ *jsou určeny tou podmínkou, že* $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \ldots, P_{i_s}$ *jsou všechny body sousední s bodem* P_1. *Indexy* $k_1, k_2, \ldots, k_{s_2}$ *jsou určeny podmínkou, že* $P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_{s_2}}$ *jsou všechny body, které jsou sousední s* P_{i_1} *a které jsou současně druhého řádu vzhledem k* P_1 *(v tomto případě* $P_{k_1}, \ldots, P_{k_{s_2}}$ *jsou všechny body sousední s* P_{i_1} *s výjimkou bodu* P_1*). Podobně indexy* $l_1, l_2, \ldots, l_{s_3}$ *jsou určeny pod-*

[4]) Kdyby matice nebyla souvislá, řešil by se každý částečný systém samostatně, takže předpoklad souvislosti není na újmu obecnosti.

mínkou, že $P_{l_1}, P_{l_2}, \ldots, P_{l_{s_0}}$ jsou všechny body, které jsou sousední s P_{i_2} a které jsou současně druhého řádu vzhledem k P_1. Stejně pak i dále.

Vzhledem k tomu, že soustava lineárních rovnic má konečnou, otevřenou matici, jsou veškeré řetězové zlomky konečné.

Dále pak, jestliže jest P_p bod p-tého řádu vzhledem k P_1, platí

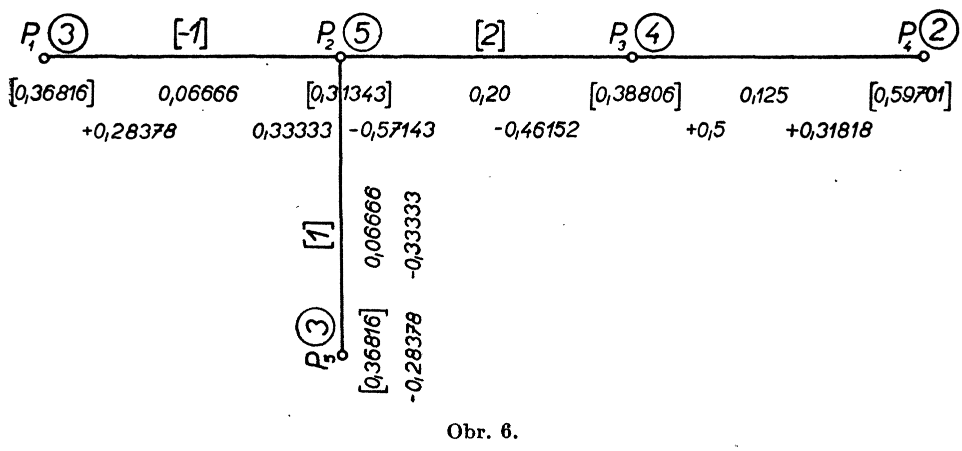
$$x_p = -\frac{a_{p,p^*}x_{p^*}}{a_{p,p}} \cfrac{1}{1 - \cfrac{\alpha_{p,k_1}}{1 - \cfrac{\alpha_{k_1,l_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{k_1,l_2}}{1-\ldots}} - \cfrac{\alpha_{p,k_2}}{1 - \cfrac{\alpha_{k_2,m_1}}{1-\ldots} - \cfrac{\alpha_{k_2,m_2}}{1-\ldots}} - \ldots}, \tag{2}$$

kde index p^* jest určen tou podmínkou, aby bod P_{p^*} byl sousední s bodem P_p a řádu $p - 1$. Dále pak indexy $k_1, k_2, \ldots, k_s$ jsou určeny z toho, že body $P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_s}$ jsou všechny body $p + 1$ řádu, které jsou sousední k P_p.

Podobně indexy $l_1, l_2, \ldots, l_{s_2}$ jsou určeny z podmínky, že body $P_{l_1}, P_{l_2}, \ldots, P_{l_{s_2}}$ jsou všechny body takové, které jsou sousední s bodem P_{k_1} a které jsou zároveň řádu $p + 2$. Stejně i dále.[5])

Ukážeme nyní na příkladě konkretní postup. Řešme tuto soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrrl}
3x_1 & - \; x_2 & & & & = -1\,, \\
-x_1 & + \; 5x_2 & + \; 2x_3 & & + \; x_5 & = 0\,, \\
 & 2x_2 & + \; 4x_3 & - \; x_4 & & = +1\,, \\
 & & x_3 & + \; 2x_4 & & = 0\,, \\
 & x_2 & & & + \; 3x_5 & = 0\,.
\end{array}$$



Obr. 6.

[5]) Podrobná konstrukce řetězového zlomku bude také patrna z příkladu, který dále následuje.

Na obr. 6 jest naznačen graf této soustavy a výpočet proveden v tomto grafu.

Postup je nyní následující:

1. Ke každému bodu P_i připíšeme koeficient $a_{i,i}$ (červeně). V obr. 6 jest koeficient vyznačen v kroužku.

2. Ke každé spojnici $P_i P_j$ napíšeme koeficient $a_{i,j}$ (červeně) a $\alpha_{i,j} = \frac{a_{i,j}^2}{a_{i,i}, a_{j,j}}$ (černě). Na obr. 6 jest koeficient $a_{i,j}$ napsán v lomené závorce.

Jest dále

$$\alpha_{1,2} = \frac{(-1)^2}{3 \,.\, 5} = 0{,}06666\,,$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{2^2}{5 \,.\, 4} = 0{,}20\,,$$

atd.

3. Vypočítáme hodnoty kořenů za předpokladu, že $b = 1$, a označíme ji potom hodnotou $c_{i,i}$ (vzorec (1)).

Jest

$$c_{1,1} = \frac{1}{3\left[1 - \dfrac{0{,}06666}{1 - \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}125} - 0{,}06666}\right]} = 0{,}36816\,,$$

$$c_{2,2} = \frac{1}{5\left[1 - 0{,}06666 - 0{,}06666 - \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}125}\right]} = 0{,}31343\,,$$

$$c_{3,3} = \frac{1}{4\left[1 - 0{,}125 - \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}06666 - 0{,}06666}\right]}.$$

atd.

Tyto koeficienty jsou napsány u příslušných bodů v lomené závorce. Píší se barevně (modře).

4. Vypočítáme nyní koeficienty $c_{i,j}$ podle vzorce (2). Dostaneme

$$c_{1,2} = -\frac{-1}{5\left[1 - 0{,}06666\,\dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}125}\right]} = +0{,}28378\,,$$

$$c_{2,1} = -\frac{-1}{3} = +0{,}33333\,,$$

$$c_{2,3} = -\frac{2}{4[1 - 0{,}125]} = -0{,}57143\,,$$

atd.

Toto číslo napíšeme k bodu P_i na spojnici $\overline{P_i P_j}$.

5. Nyní provedeme rozvod, který jest v následujícím obr. 7 vyznačen šipkami. V praxi se tyto šipky ovšem nevyznačují.

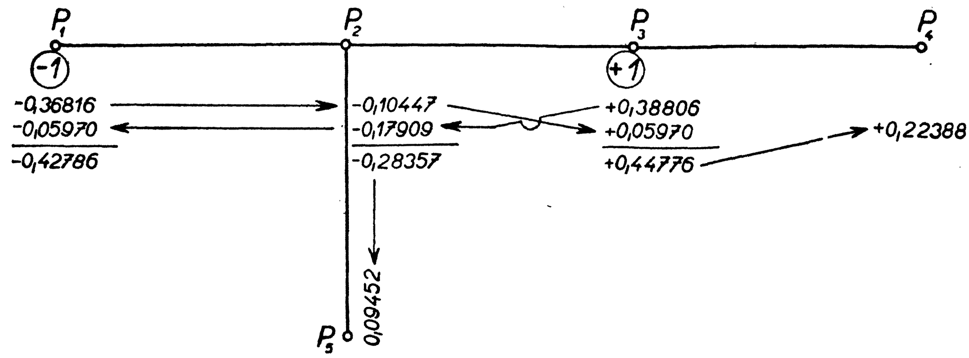
a) Napíšeme k jednotlivým bodům příslušné pravé strany barevně. Na obr. 7 jsou vyznačeny v kroužku. Píšeme je pouze tam, kde jsou různé od nuly.

b) Vypočítáme „primérní" kořeny $x_i^0 = c_{i,i} b_i$. Jest

$$x_1^0 = (-1)\,.\,0{,}36816 = -0{,}36816\,,$$

atd.

Píšeme je pouze tam, kde jsou rovny nule.



Obr. 7.

c) Provedeme vlastní rozvod. Jest

$$x_2^1 = x_1^0 c_{1,2} = (-0{,}36816)\,. \quad 0{,}28378 = -0{,}10447\,,$$
$$x_3^2 = x_2^1 c_{1,3} = (-0{,}10447)\,.\,(-0{,}57143) = +\,0{,}05970\,. \text{ atd.}$$

Dostáváme kořeny

$$x_1 = -\,0{,}42786\,,$$
$$x_2 = -\,0{,}28357\,,$$
$$x_3 = +\,0{,}44776\,,$$
$$x_4 = +\,0{,}22388\,,$$
$$x_5 = \,0{,}09452\,.$$

Důkaz věty 12. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matice je souvislá. Buď M_A konjugovaná množina vzhledem k matici A. Nazveme nyní řádem matice A vzhledem k bodu P_j maximum z řádů všech jednotlivých bodů P_i vzhledem k P_j. Dokažme nyní naše tvrzení indukcí podle řádu matice vzhledem k tomu bodu, kde v příslušné rovnici na pravé straně (jako jediný koeficient) není koeficient roven nule.

Jestliže řád matice jest roven nule, potom tvrzení jest správné, neboť se jedná o systém s jedinou rovnicí. Předpokládejme nyní, že tvrzení věty 12 je správné, pokud řád matice vzhledem k danému bodu jest nejvýše roven m. Dokážeme, že naše tvrzení platí i v tomto případě, že řád matice jest $m + 1$. Nechť tedy tento řád jest právě $m + 1$. Vzhledem k tomu, že matice jest úplně regulární, máme zaručenu existenci řešení a můžeme proto považovat nyní na okamžik kořen x_1 za známý a převésti jej na pravou stranu systému. Po potlačení prvé rovnice dostaneme v tomto případě soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{2,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{2,n}x_n &= -a_{2,1}x_1 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{n,n}x_n &= -a_{n,1}x_1 . \end{aligned} \qquad (3)$$

Matice této soustavy jest zřejmě hlavní minor A_1.

Nyní rozlišujme dva případy. Bod P_1 jest bodem vnitřním a bod P_1 není bodem vnitřním.

V prvém případě matice A_1 nebude souvislá (definice 7). Systém rovnic rozpadne se proto na částečné systémy (jejich matice jsou komponenty matice A_1) takové, že na jejich pravé straně jest nejvýše jeden nenulový koeficient. V opačném případě totiž by matice A nemohla být otevřená.

Snadno se tak nahlédne, že nyní řád matic těchto systémů vzhledem k uvažovaným bodům (t. j. k těm bodům, kde v příslušné rovnici na pravé straně jest nenulový koeficient) jest nejvýše roven m.

Jestliže bod P_1 není vnitřním bodem, matice A_1 zůstane souvislá a snadno možno se přesvědčit o tom, že na pravé straně systému (3) bude nejvýše jeden koeficient různý od nuly a že řád matice A vzhledem k příslušnému bodu jest nejvýše roven m.

Tedy v obou případech, t. j. ať jest bod P_1 vnitřní či nikoliv, potom řády resp. řád systému (4) se zmenší nejméně o jedničku. Tedy podle indukčního předpokladu platí tvrzení věty 12, a proto je

$$x_i = \frac{-a_{i,1}x_1}{a_{11}\left[1 - \Sigma \frac{\alpha_{i,j}}{1-\Sigma}\right]} \qquad (4)$$

pro všechny koeficienty i takové, že jsou prvního řádu vzhledem P_1. Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice

$$a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b ,$$

dostaneme

$$x_1 \left[a_{1,1} - \frac{a_{1,2}^2}{a_{22}[1-\ldots]} - \ldots - \frac{a_{1,n}^2}{a_{n,n}[1-\ldots]}\right] = b .\text{[6]}$$

Dělíme-li tuto rovnici $[a_{1,1} - \ldots]$, dostaneme okamžitě prvou část tvrzení o x_1. Druhou část tvrzení o výpočtu ostatních kořenů jsme už také zde dokázali.

[6]) Poznamenejme, že ve jmenovateli výrazu (2) nemůže být nula, poněvadž příslušný částečný systém, na nějž větu aplikujeme, jest podle věty 10 také úplně regulární. Jest ovšem zřejmé, že vlastnost úplné regularity není pro existenci zlomku (2) nutná.

Poznámka. V praktických případech při statickém řešení rámů jsou koeficienty $\alpha_{i,j}$ poměrně malé, jak uvidíme v dalším odstavci při výpočtu jistého rámu. Proto nemusíme bráti řetězové zlomky až do konce.

V minulé větě jsme řešili případ, kdy matice byla konečného řádu. Přejdeme nyní k maticím nekonečným a dokážeme o tomto řešení jisté věty, které budeme potřebovat, až se budeme zabývat soustavami s maticí uzavřenou.

Věta 13. *Věta 12 platí i pro nekonečnou, úplně regulární otevřenou matici pouze s tím rozdílem, že řetězové zlomky jsou nekonečné.*

Důkaz: Plyne okamžitě z věty 12 a z věty 6.

Poznámka. Z minulé věty vyplývá také okamžitě existence (konvergence) řetězových zlomků.

Nyní dokážeme větu, na které je v podstatě založena možnost přenésti uvedenou metodu na soustavy s uzavřenými maticemi.

Věta 14. *Mějme nekonečný systém lineárních rovnic*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x_j = b_i\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

s úplně regulární otevřenou maticí. Buď dále $b_0 = 1$, $b_k = 0$, $k \neq 0$. Jestliže jest T_1 podmnožina všech bodů prvního řádu vzhledem k P_0 konjugované množiny M_A, potom platí

$$\sum_{\substack{j \\ j \neq 0}} |a_{j,0}x_0 + \alpha_j |a_{j,0}| x_j| \leq \frac{1}{\alpha}\,.\text{[7]}$$

Důkaz. Soustavu nekonečně mnoha rovnic pišme v tomto tvaru

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \alpha_0 |a_{0,j}| x_0 + \sum_{\substack{j \\ j \neq 0}} a_{0,j}x_j = 1, \tag{6}$$

$$a_{j,0}x_0 + \alpha_j |a_{j,0}| x_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \alpha_j |a_{j,k}| x_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} a_{j,k}x_k = 0, \ P_j \in T_1\,, \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x_j = 0, \ P_i \neq P_0; \ P_i \text{ non} \in T_1\,. \tag{8}$$

Vzhledem k tomu, že body P_i non $\in T_1$, $i \neq 0$, nejsou spojeny s P_0, nevyskytuje se v rovnici (8) neznámá x_0.

Řešme nyní tento systém rovnic[8])

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \alpha_j |a_{j,k}| x_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} a_{j,k}x_k = -(a_{j,0}x_0 + \alpha_j |a_{j,0}| x_j)\,, \ldots, P_j \in T_1\,, \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x_j = 0, \ P_0 \neq P_i \text{ non} \in T_1\,.$$

[7]) Srv. definici úplně regulární matice.

[8]) Předpokládáme na okamžik, že známe x_0, a x_j pro $P_j \in T_1$.

Podle věty 6 má systém (5) omezení řešení a proto i výrazy $a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j$ jsou omezené. Proto soustava (9) má omezené řešení, které jest ovšem totožné s řešením soustavy (5). Podle předpokladu dokazované věty je matice soustavy (5) otevřená. Proto matice (9) se rozpadne na přímý součet souvislých otevřených úplně regulárních matic takových, že v těchto částečných soustavách je na pravé straně jediný nenulový člen.[9])

Proto podle věty 11 platí

$$-x_j = (a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j)\,\varepsilon_j\,, \quad \text{kde} \quad \varepsilon_j \geq 0\,, \tag{10}$$

a to pro všechna taková j, že $P_j \in T_1$.

Napišme nyní ještě jednou rovnice (6) a (10)

$$\sum_{j \in T_1} \alpha_0|a_{0,j}|x_0 + \sum a_{0,j}x_j = 1\,,$$

$$\varepsilon_j a_{j,0}x_0 + x_j(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) = 0$$

a řešme pomocnou soustavu rovnic

$$\alpha_0|a_{j,0}|x_0 + a_{0,j}x_j = \vartheta_j\,,$$

$$\varepsilon_j a_{j,0}x_0 + x_j(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) = 0\,.$$

Dostaneme

$$x_0 = \frac{\delta_j(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j)}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} = \gamma_j\delta_j\,.$$

Poznamenejme při tom, že pro jakékoliv $\varepsilon_j \geq 0$ nemůže být jmenovatel roven nule.

Poněvadž jest $\varepsilon_j \geq 0$, $\alpha_0 > \alpha > 1$, $\alpha_j > \alpha > 1$, platí, jak snadno nahlédneme, že $\gamma_j > 0$. Dále máme

$$x_j = \frac{-\,a_{j,0}\delta_j\varepsilon_j}{\alpha_0|a_{j,0}|(\alpha_j|a_{j,0}| + \varepsilon_j) - a_{0,j}^2}\,.$$

Podle rovnice má platit

$$\sum_{\substack{j\\ P_j \in T_1}} \vartheta_j = 1\,,$$

a proto

$$x_0 = \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j\\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}}\,.$$

Z toho plyne, že

$$\delta_j = \frac{1}{\gamma_j} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j\\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}}\,.$$

---

[9]) Jestliže bod P_0 není vnitřní, matice má jenom komponentu, a proto vlastně o skutečný rozpad nejde.

Dosaďme nyní vypočtené hodnoty do výrazu

$$|a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| .$$

Dostaneme

$$|a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| = \frac{|a_{j,0}|}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} .$$

Proto

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} |a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| = \sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{|a_{j,0}|}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} \cdot \frac{1}{\gamma_j} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}} .$$

Poněvadž však jest $\alpha_0 > \alpha$, $\alpha_j > \alpha$, $\varepsilon_j \geq 0$, platí

$$\frac{|a_{j,0}|}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} \leq \frac{|a_{j,0}|}{\alpha^2|a_{j,0}|^2\varepsilon_j - \varepsilon_j a_{0,j}^2 + \alpha|a_{j,0}|} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}|a_{j,0}|^2\varepsilon_j} \leq \frac{1}{\alpha} .$$

Proto s ohledem na to, že $\gamma_j > 0$, dostáváme

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} |a_{j,0}x_0 + \alpha_j|a_{j,0}|x_j| = \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}} \sum_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{|a_{j,0}| \frac{1}{\gamma_j}}{\alpha_0|a_{j,0}|(1 + \alpha_j|a_{j,0}|\varepsilon_j) - a_{0,j}^2\varepsilon_j} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sum\limits_{\substack{j \\ P_j \in T_1}} \frac{1}{\gamma_j}} \sum \frac{1}{\gamma_j} = \frac{1}{\alpha} ;$$

tím je věta dokázána.

Věta 15. *Mějme systém lineárních rovnic, nekonečný* ($N = \infty$) *nebo konečný* ($N \neq \infty$)

$$\sum_{j=0}^{N} a_{i,j}x_j = b_i . \tag{11}$$

O matici soustavy předpokládejme, že jest úplně regulární s konstantou a otevřená.[10]) *Buď dále* $b_j = 0$, $j = 1, 2, 3$. *Označme* T_k *množinu všech bodů k-tého řádu vzhledem k* P_0 *konjugované množiny A. Potom platí*

$$\sum_{\substack{k \\ P_j \in T_{n+1} \\ P_k \in T_n}} \sum_{j} |a_{j,k}x_k + \alpha_j|a_{j,k}|x_j| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{m \\ P_k \in T_n \\ P_m \in T_{n-1}}} \sum_{k} |a_{k,m}x_m + x_k|a_{k,m}|\alpha_k| .$$

[10]) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že matice jest souvislá.

Důkaz. Označme T^*_{n+1} množinu všech bodů řádu $p \geq n + 1$. Pišme soustavu rovnic (5)

$$x_k \sum_{\substack{l \\ P_l \in T^*_{n+1}}} \alpha_k |a_{k,l}| + \sum_{\substack{j \\ P_j \in T^*_{n+1}}}' x_j a_{j,k} = - \sum_{\substack{m \\ P_m \in T_{n-1}}} (x_m a_{k,m} + x_k |a_{k,m}| \alpha_k) \tag{12}$$

pro všechna k taková, že P_k jest bod n-tého řádu a

$$\sum_l x_l a_{p,l} = 0 \,, \quad P_p \in T^*_{n+2} \,. \tag{13}$$

Matice soustavy systému (12) a (13), se rozpadne na přímý součet matic, o nichž se snadno možno přesvědčit, že mají rovněž konstantu α. (Srov. větu 3, 10.)[11]) Mimo to také možno nahlédnout, že na pravé straně jednotlivých částečných matic vyskytuje se jediný nenulový koeficient. Sumační znaménko na pravé straně (12) jest formální, protože jde pouze o jediný člen.

Proto platí podle věty 14, že

$$\sum_{\substack{k \\ P_j \in T_{n+1} \\ P_k \in T_n}} \sum_j |a_{j,k} x_k + \alpha_j |a_{j,k}| x_j| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{m \\ P_m \in T_{n-1} \\ P_k \in T_n}} \sum_k |x_k |a_{k,m}| \alpha_k + x_m a_{k,m}| \;;$$

tím je věta 15 dokázána.

Věta 16. *Mějme soustavu lineárních rovnic, nekonečnou ($N = \infty$) nebo konečnou ($N \neq \infty$)*

$$\sum_{j=0}^{N} a_{i,j} x_j = b_i \,, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \,.$$

O matici předpokládejme, že je otevřená a úplně regulární s konstantou α. Buď dále $b_i = 0$, $i \neq 0$, $b_0 = 1$.

Označíme-li T_k množinu bodů k-tého řádu vzhledem k P_0, potom platí

$$\sum_{\substack{k \\ P_j \in T_{n+1} \\ P_k \in T_n}} \sum_j |a_{j,k} x_k + \alpha_j |a_{j,k}| x_j| \leq \frac{1}{\alpha^{n+1}} \,.$$

Důkaz. Důkaz provedeme snadno úplnou indukcí. Je-li $n = 0$, potom tvrzení je správné podle věty 14. Nechť nyní platí naše věta pro $n = p$. Potom podle věty 15 platí naše věta i pro $h = p + 1$. Tím jest věta 16 úplně dokázána.

5. Řešení systému lineárních rovnic s úplně regulární uzavřenou maticí.

V minulém odstavci jsme ukázali řešení soustavy rovnic s úplně regulární otevřenou maticí. V tomto odstavci ukážeme, jak se aplikuje tato metoda na soustavy rovnic s uzavřenou maticí.

[11]) Případně nemusí ani být skutečný rozpad, t. j. když přímý součet jest tvořen jednou maticí.

Věta 17. *Mějme soustavu $n+1$ lineárních rovnic*

$$\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n .$$

O matici A soustavy předpokládejme, že jest úplně regulární (otevřená nebo uzavřená).

Dále předpokládejme, že $b_0 = 1$, $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$. Buď A^* rozvinutá matice a předpokládejme, že $\varphi(P_0^*) = P_0$. Předpokládejme dále, že body konjugované množiny M_{A^*} jsou očíslovány tak, že body P_j^*, $p_k \leq j < p_{k_M}$, jsou k-tého řádu vzhledem k P_0^*. Buď dále $x_0, x_1, \ldots, x_n$ řešení soustavy a nechť $x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{p_{k-1}-1}^k$ je řešení soustavy lineárních rovnic

$$\sum_{j=0}^{j=p_{k+1}-1} c_{i,j}x_j^k = d_i^k , \quad i = 0, 1, \ldots, p_{k+1} - 1 ,^{12}) \tag{14}$$

při čemž nechť matice této soustavy A^{*k} je redukovaná matice rozvinuté matice A^* (až po body k-tého řádu). Mimo to nechť $d_0^k = 1$, $d_j^k = 0$, $j \neq 0$. Buď dále X_l^k podmnožina všech bodů množiny $M_{A^{*k}}$ takových, že

$$P_\alpha^* \in X_l^k \Rightarrow \varphi(P_\alpha^*) = P_l .$$

Potom, jestliže označíme

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in X_l^k}} x_j^k = x_j^{*k} ,$$

platí

$$\lim_{k\to\infty} x_l^{*k} = x_l .$$

Důkaz. O matici můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je souvislá. Vzhledem k tomu, že matice A jest podle předpokladu úplně regulární, závisí řešení spojitě na pravé straně. Naše tvrzení bude tedy zřejmě dokázáno, jestliže ukážeme, že

$$\sum_{j=0}^{p_{k+1}-1} a_{i,j}x_j^{*k} - b_i \to 0 \text{ pro } k \to \infty .$$

Abychom to dokázali, všimněme si posloupnosti čísel

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j}x_j^k - d_i^k = \varrho_i^k, \; i = 0, 1, 2, \ldots ,$$

když klademe $x_j^* = 0$ pro $j \geq p_{k+1}$. Při tom matice $\|c_{i,j}\|$ jest rozvinutá matice A^*.

Vzhledem k tomu, že každý bod r-tého řádu jest spojen nejvýše s body řádu $r-1$ a $r+1$ (viz větu 4), je nejvýše $\varrho_j^k \neq 0$ pro $p_{k+1} \leq j < p_{k+2}$.

[12]) $c_{i,j}$ jsou koeficienty rozvinuté matice.

Ukažme dále, že je

$$\sum_j |\varrho_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^{k+1}}.$$

Označíme T_k množinu všech bodů řádu k konjugované matice $M_{A^{*k}}$.

Vezmeme nyní v (14) všechny rovnice pro takové i, že $P_i \in X_l^k$, a sečteme je. Vzhledem k definici rozvinuté matice, k vlastnostem tam definovaného zobrazení φ, můžeme snadno nahlédnouti, že dostaneme

$$\sum_{j=0}^{n} a_{l,j} x_j^{*k} - b = \sum_{\substack{i \\ P_i \in X_l^k}} \varrho_i^k, \quad l = 0, 1, \dots, n.$$

Jak jsme však již poznamenali $\varrho_j^k \neq 0$ pouze pro i takové, že $P_j^* \in T_{k+1}$. Tedy

$$|\sum a_{l,j} x_j^{*k} - b_i| \leq | \sum_{\substack{i \\ P^*_i \in T_{k+1}}} \varrho_i^k |,$$

při čemž ϱ_i^k můžeme psát také v tomto tvaru

$$\sum_{P_j \in T_k} c_{j,q} x_j^k = \varrho_q^k$$

pro všechna q taková, že $P_q \in T_{k+1}$.

Abychom odhadli výraz na pravé straně, užijeme věty 16. Skutečně platí

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_k \\ P_p \in T_{k-1}}} \sum_p |c_{j,p} x_p^k + \alpha_j |c_{j,p}| x_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^k}. \tag{15}$$

Každou rovnici ze systému (14) příslušnou bodům, které jsou řádu k, lze psát v tomto tvaru

$$\sum_{P_p \in T_{k-1}} (c_{j,p} x_p^k + \alpha_j x_j^k \,.\, |c_{j,p}|) + \sum_{\substack{q \\ q \in T_{k+1}}} \alpha_j |c_{j,q}|\, x_j^k = 0, \; P_j \in T_k.$$

Platí tedy také

$$\sum_{P_p \in T_{k-1}} |c_{j,p} x_p^k + \alpha_j x_j^k |c_{j,p}|| = \sum_{\substack{q \\ q \in T_{k+1}}} \alpha_j |c_{j,q}| |x_j^k|, \; P_j \in T_k$$

vzhledem k tomu, že bod řádu k je spojen nejvýše s jedním bodem řádu $k - 1$, a vzhledem k tomu, že $\alpha_j > \alpha > 1$.

Sečteme nyní všechny tyto rovnice. Dostaneme

$$\sum_{P_j \in T_k} \sum_{P_p \in T_{k-1}} |c_{j,p} x_p^k + \alpha_j x_j^k |c_{j,p}|| = \sum_{\substack{P_j \in T_k \\ P_q \in T_{k+1}}} \sum \alpha_j |c_{j,q}| |x_j^k|.$$

Užijeme-li relace (15), dostaneme

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_k \\ P_q \in T_{k+1}}} \sum_q \alpha_j |c_{j,q} x_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^k},$$

a vzhledem k tomu, že $\alpha_j > \alpha$, platí

$$\sum_{\substack{j \\ P_j \in T_k}} \sum_{\substack{q \\ P_q \in T_{k+1}}} |c_{j,q} x_j^k| \leq \frac{1}{\alpha^{k+1}} .$$

Nyní se snadno již nahlédne, že

$$|\Sigma a_{i,j} x_j^{*k} - b_i| \leq \frac{1}{\alpha^{k+1}} ,$$

a z toho plyne již naše tvrzení.

Poznámka. Věta 17 umožňuje nám řešiti uzavřené systémy metodou rozvodu deformace, neboť tato věta převádí řešení systému s uzavřenou maticí na řešení systémů s otevřenou maticí. Při praktickém výpočtu ovšem nerozepisujeme rozvinutou matici. Rovněž i řešíme najednou případ, že na pravé straně našeho systému jsou různá $b_j \neq 0$.

Celkový postup ukážeme na příkladě, kde bude patrno i uspořádání výpočtu. Před tím však ukážeme na jednom velmi jednoduchém případě, jak se v podstatě aplikují naše věty, neboť počítání na konečný počet desetinných míst uvedený postup poněkud modifikuje.

Řešme tento systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 0{,}5x_3 + x_4 &= 1 , \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 0 , \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 , \\ x_1 - x_3 + 4x_4 &= 0 . \end{aligned} \tag{16}$$

Budeme nejprve řešit nekonečnou soustavu lineárních rovnic s maticí, která je rozvinutá matice naší původní soustavy s takovými pravými stranami, že $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = \ldots = 0$.

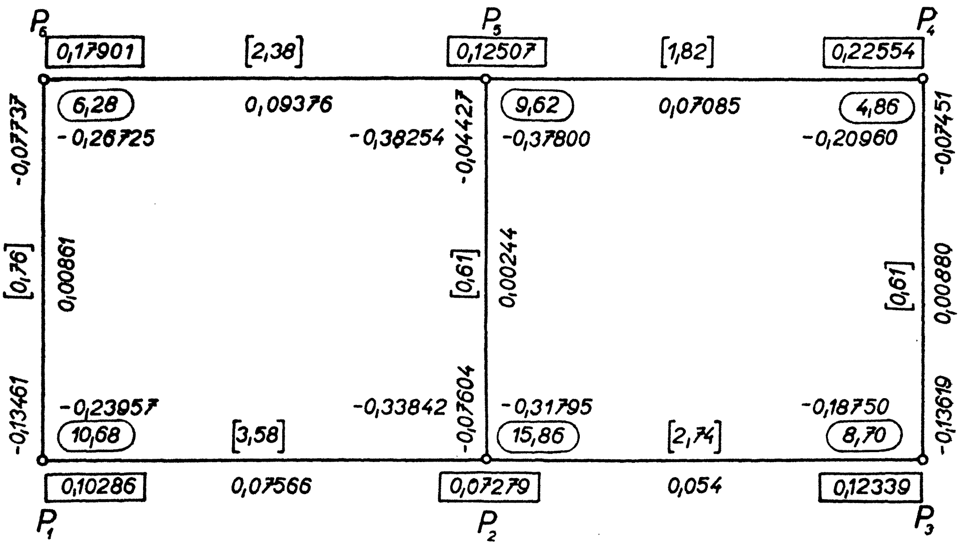
Tedy budeme řešit soustavu

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 7\bar{x}_1 & +2\bar{x}_2 & +0{,}5\bar{x} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & = 1, \\ 2\bar{x}_1 & +6\bar{x}_2+ & . & . & \bar{x}_5 & . & . & . & . & . & . & . & = 0, \\ 0{,}5\bar{x}_1+ & . & 5\bar{x} & . & . & \bar{x}_6 & -\bar{x}_7 & . & . & . & . & . & = 0, \\ \bar{x}_1 & . & . & +4\bar{x}_4 & . & . & . & -\bar{x}_8 & . & . & . & . & = 0, \\ . & \bar{x}_2 & . & . & +5\bar{x}_5 & . & . & . & +0{,}5\bar{x}_9 & +\bar{x}_{10} & . & . & = 0, \\ . & . & \bar{x}_3 & . & . & 6\bar{x}_6 & . & . & . & . & +2\bar{x}_{11} & . & = 0, \\ . & . & -\bar{x}_3 & . & . & . & +4\bar{x}_7 & . & . & . & . & +\bar{x}_{12} & = 0, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \end{array} \tag{17}$$

Ve větě 17 jsme ukázali, že rozřešíme-li nekonečný systém rovnic (17), rozřešíme tím i náš systém (16), a to tak, že

$$x_k = \sum_{\substack{j \\ \varphi(P_j^*) = P_k}} \bar{x}_j .$$

Ukázali jsme, že uvedený nekonečný součet jest konvergentní a tudíž že stačí vzíti jen konečný počet členů k tomu, abychom získali výsledek s libovolnou přesností, t. j. tak, že vezmeme v úvahu pouze body, jejichž řád vzhledem k bodu P_0 jest nejvýše k. Každý kořen $\overline{x}_j$ ovšem můžeme určit jen přibližně, na př. již z toho důvodu, že počítáme na konečný počet desetinných míst, ovšem tak, že uvedený součet jest určen s libovolnou přesností.[13]) Dejme tomu na př., že stačí počítat kořeny $\overline{x}_j$ na 4 desetinná místa. Řetězový zlomek mů-



Obr. 8.

žeme vzít proto jen do takové délky, abychom měli zaručeno čtvrté desetinné místo. Dejme tomu, že k tomu potřebujeme ve zlomku (1) pět kroků. Podobně vezmeme zlomek v (2) na př. na pět kroků. Tím docílíme toho, že koeficienty $c_{i,j}$, $c_{k,l}$ [srv. str. 72] jsou numericky stejné pro případ, že $\varphi(P_i^*) = \varphi(P_k^*)$, $\varphi(P_j^*) > \varphi(P_l^*)$, čehož využíváme.

Shrneme-li naše vývody, můžeme říci, že větu 17 aplikujeme v tom smyslu, že řešíme nekonečný systém s rozvinutou maticí s jistou přesností a neřešíme tyto kořeny pomocí redukované soustavy rovnic.

Praktický postup uvádíme v dalším příkladě.

---

[13]) Otázku, na kolik desetinných míst musíme počítat hodnoty x_k a kolik těchto členů musíme brát, abychom výsledek dostali s předem požadovanou přesností, zde neřešíme. Je to otázka jiného druhu, která také mimo jiné na př. souvisí se statistickým pojetím chyb. Prakticky jest vhodné rozhodnouti se v konkretních případech nějakým způsobem podle účelu výpočtu pro jistý počet desetinných míst a nakonec pomocí vypočtených residuí provésti odhad chyby v určení kořenů, což možno učiniti snadno na př. pomocí věty 6.

Řešme tuto soustavu:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
10{,}68x_1 + & 3{,}58x_2 & & & & + 0{,}76x_6 = & 4{,}16\,, \\
3{,}58x_1 + & 15{,}86x_2 + & 2{,}74x_3 & & + 0{,}61x_5 & = & -4{,}16\,, \\
 & 2{,}74x_2 + & 8{,}70x_3 + & 0{,}61x_4 & & = & 0\,, \\
 & & 0{,}61x_3 + & 4{,}86x_4 + & 1{,}82x_5 & = & 0\,, \\
 & 0{,}61x_2 & & + 1{,}82x_4 + & 9{,}62x_5 + & 2{,}38x_6 = & 0\,, \\
0{,}76x_1 & & & & + 2{,}38x_5 + & 6{,}28x_6 = & 0\,.
\end{array}$$

Je to statický výpočet rámové konstrukce, příklad uvedený v [3] na str. 57. Na obr. 8 jest naznačen graf matice soustavy. Do tohoto grafu provádíme celý výpočet. Označení zde je stejné jako na obr. 6.

Tedy: 1. Čísla v kroužcích jsou diagonální členy matice. 2. Čísla v hranaté závorce jsou členy matice $a_{i,j}$. 3. Pod hodnotami $a_{i,j}$ jsou napsány členy $\alpha_{i,j}$.

Nyní vypočítáme jednotlivé řetězové zlomky nejprve pro primérní kořeny. Protože koeficienty jsou velmi malé vzhledem k jedničce, stačí se omezit na několik členů. Pišme

$$x_i^0 = b_i c_{i,i}\,.$$

Potom máme, omezíme-li se na prvé dva kroky,

$$c_{1,1} = \frac{1}{10{,}68\left[1 - \dfrac{0{,}00681}{1 - 0{,}00861} - \dfrac{0{,}00244}{1 - 0{,}09376 - 0{,}07085} - \dfrac{0{,}05441}{1 - 0{,}00880}\right]} =$$
$$= 0{,}10286$$

a podobně

$$c_{2,2} = \frac{1}{15{,}86\left[1 - \dfrac{0{,}07566}{1 - 0{,}00861} - \dfrac{0{,}00244}{1 - 0{,}09376 - 0{,}07085} - \dfrac{0{,}05441}{1 - 0{,}00880}\right]}\,.$$

Tyto koeficienty jsou u příslušných bodů napsány v lomené závorce; jinak se píší barevně, na př. modře.

Poznámka. V následující tabulce jest koeficient $c_{1,1}$, když v řetězovém zlomku jsou jeden, dva nebo tři kroky.

	1 krok	2 kroky	3 kroky
$c_{1,1}$	0,10230	0,10286	0,10287

Z toho je patrno, že se můžeme omezit pouze na několik málo kroků při výpočtu řetězového zlomku. Známe-li primérní kořeny x_1^0, rozvádíme je.

Pišme

$$x_i = c_{j,i} x_j^0\,.$$

Tedy máme

$$c_{1,2} = \frac{-3,58}{15,86\left[1 - \dfrac{0,05441}{1 - 0,00880} - \dfrac{0,00244}{1 - 0,09376 - 0,07085}\right]} = -0,23957\,.$$

Toto číslo napíšeme k bodu P_1 na spojnici $\overline{P_1P_2}$; podobně

$$c_{2,1} = \frac{-3,58}{10,68\left[1 - \dfrac{0,00861}{1 - 0,09376}\right]} = -0,33842$$

a toto číslo napíšeme k bodu P_2 na spojnici $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$. Stejně je tomu u ostatních bodů.

Poznamenejme zde opět, že koeficienty $c_{i,j}$ jsou rovněž velmi málo citlivé na počet kroků v řetězovém zlomku. V následující tabulce jest vypočítán koeficient $c_{1,2}$, uvažujeme-li ve zlomku jeden, dva nebo tři kroky.

	1 krok	2 kroky	3 kroky
$c_{1,2}$	—0,2394	—0,23957	—0,23959

Vypsáním všech těchto uvedených hodnot jest skončena prvá část výpočtu, která nezávisí na pravé straně našeho systému lineárních rovnic.

Jako další část výpočtu provádí se bezprostřední rozvod. Provádí se buď do grafu matice, kde jsou psány i ostatní hodnoty, nebo na obraz zvláštní. Je v našem případě proveden zvlášť obr. 9.

Postup jest následující: 1. Ke každému bodu napíšeme výraz $b_i\,.\,c_{i,i}$.

2. Provedeme rozvod ve vodorovném směru. Tak

$$-0,23957\,.\quad 0,42791 = -0,10256\,,$$
$$-0,33842\,.\,(-0,30282) = +0,10248\,.$$

Rozvody označujeme pro přehlednost šipkami, což v praxi se pak nedělá. Ve směru $P_6 - P_5 - P_4$ jest primérní rozvod nulový.

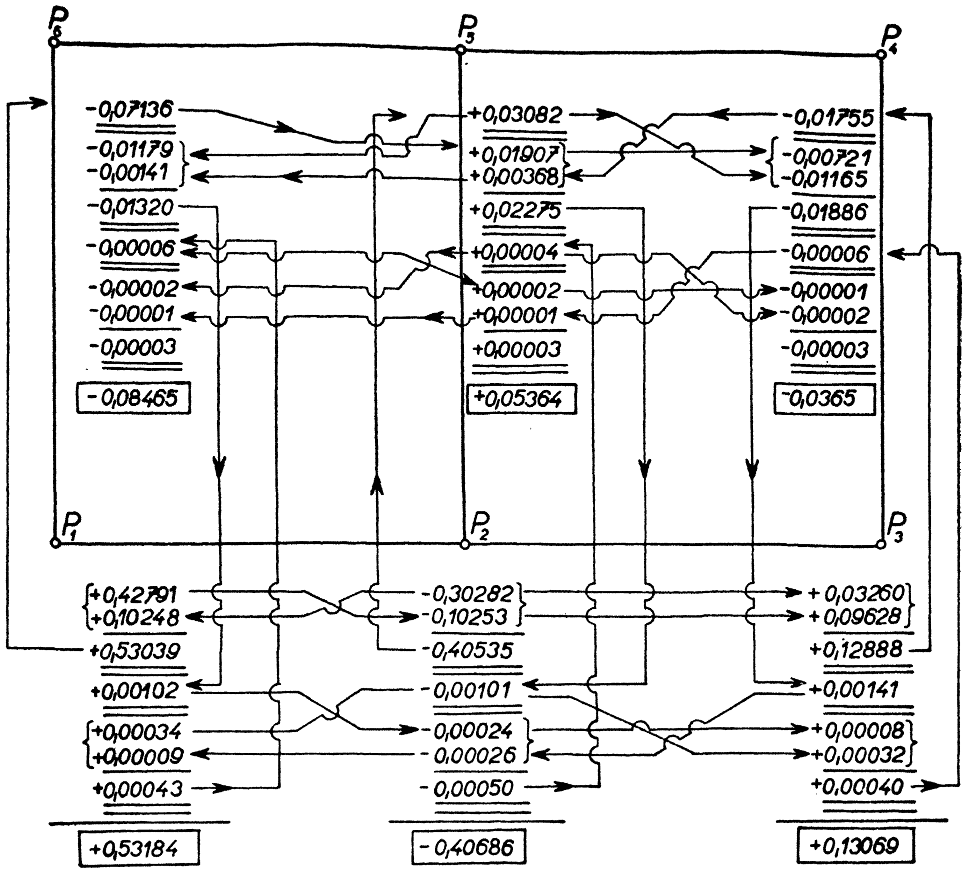
3. Provádíme svislý rozvod nahoru. Tak jest

$$0,53039(-0,13464) = -0,07136\,.$$

4. Provedeme vodorovný rozvod ve směru $P_6 - P_5 - P_4$ a $P_4 - P_5 - P_6$.
5. Provedeme svislý rozvod dolů.
6. Provedeme vodorovný rozvod ve směru $P_1 - P_2 - P_3$ a $P_3 - P_2 - P_1$.
7. Provádíme další rozvody. Je možno však proces již skončit.
8. Dostáváme kořeny, resp. jejich aproximace

$$x_1 = \quad 0,53039 + 0,00102 + 0,00043 = +0,53184\,,$$
$$x_2 = -(0,40535 + 0,00101 + 0,00050) = -0,40686\,,$$

atd.



Obr. 9.

Kořeny jsou uspořádány v další tabulce, kde jsou také vyčíslena residua.

	Kořeny	Residua
1	+0,53184	—0,0008416
2	—0,40686	+0,0019986
3	+0,13069	—0,0000584
4	—0,03650	—0,0000443
5	+0,05364	—0,0000648
6	—0,08465	+0,0002596

Je patrno, že byly získány celkem velmi dobré výsledky. Zpřesnění kořenů bychom provedli novým řešením rovnic s residui jakožto pravými stranami.

6. Závěr

V tomto odstavci učiníme některé poznámky k praktickému užití uvedené metody.

1. Metoda rozvodu deformací, jak byla uvedena, jest účinná zejména, když stupně bodů konjugované množiny jsou poměrně malé vzhledem k řádu matice. Metoda pak je zejména užitelná, když matice má dosti pravidelnou síť. To se na př. vyskytuje ve statice při řešení patrových rámů s neposuvnými styčníky. V těchto případech je graf velmi blízký čtvercové síti.

2. Soustavy lineárních rovnic s úplně regulární maticí jsou ovšem řešitelny i jinými iteračními procesy, na př. Ritzovou iterací, Gauss-Seidlovou iterací, případně i v její relaxační (Southwell) modifikaci. Gauss-Seidlova iterace v praktických případech při výpočtu rámových konstrukcí konverguje dosti rychle. Tak na př. v uvedeném příkladě stačí 7 kroků Gauss-Seidlovy iterace. Ritzova methoda konverguje poněkud pomaleji. Pro stejnou přesnost je třeba provésti 13 kroků. Jestliže se má provésti řešení soustavy pro jedinou pravou stranu, potom jest asi nejvhodnější normální iterace. Jestliže však jde o výpočet pro řadu pravých stran, pak je výhodnější popsaná metoda rozvodu deformací, vzhledem k tomu, že výpočet konstant $c_{i,j}$ nezávisí na pravých stranách systému.

3. Řetězové zlomky konvergují velmi rychle, takže v praktických případech stačí vzíti jeden nebo dva kroky. Poněkud pomaleji konverguje již bezprostřední rozvod, kde musíme vzíti poměrně více kroků. Organisace výpočtu při rozvodu může býti různá.

Úprava postupných vodorovných a svislých rozvodů pro čtvercové nebo podobné sítě se zdá být velmi vhodná.

4. Rychlost celkové konvergence závisí na konstantě α. Čím jest α větší, t. j. čím více převládá diagonální člen, tím rychlejší je konvergence.

5. Odhad chyby jest nejsnáze proveditelný výpočtem residuí a použitím věty 6.

6. Uvedená metoda rozvodu, tak jak byla uvedena, jest účinná i v některých jiných případech než pro soustavy s úplně regulárními maticemi. Zůstává otevřena otázka, jaké jiné postačující podmínky možno volit, aby uvedená metoda byla konvergentní.

7. Jistá nevýhoda uvedené metody jest poměrně obtížná kontrola výpočtu.

8. Shrňme tyto poznámky. Metoda rozvodu deformace pro výpočet soustavy lineárních rovnic jest výhodnější než běžné iterační metody, jestliže

a) matice soustavy jest úplně regulární s konstantou cca 1,5—2,

b) stupeň jednotlivých bodů konjugované matice je poměrně malý (4—5),

c) graf matice jest alespoň částečně pravidelný,

d) se provádí výpočet pro několik pravých stran (více než cca 25—30% řádu matice), případně když se invertuje matice.

LITERATURA

[1] *C. V. Klouček:* Rozvod deformací, Praha 1940.

[2] *C. V. Klouček:* Distribution of deformation (a new method of structural analysis), Prague 1949.

[3] *O. Novák:* Patrový rám, Praha 1952.

[4] *А. Б. Канторович, Б. У. Крыгол:* Приближенные методы высшего анализа 1952.

Резюме

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И О ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К СТАТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага.

(Поступило в редакцию 25/IV 1954 г.)

В мировой литературе по строительной механике, в особенности в литературе о стержневых конструкциях, занял видное место метод численного решения, который его автор, Ц. В. Клоучек (ср. [2]), назвал „методом разведенных деформаций".

Вопросы, связанные со статическим решением стержневых конструкций, в сущности эквивалентны с решением системы линейных уравнений. Возник поэтому вопрос, в каком смысле метод Клоучека можно сформулировать для систем уравнений общего вида и когда этот метод, носящий итеративный характер, будет сходящимся, в особенности потому, что этот метод оказался в некоторых случаях весьма эффективным.

В статье показано, что достаточным условием применимости указанного метода является требование, чтобы система уравнений была симметричной и вполне регулярной.

При этом мы говорим, что система уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

симметрична и вполне регулярна, если имеет место

1. $a_{i,j} = a_{j,i}$,
2. $a_{i,i} = \alpha_i \sum\limits_{\substack{j \\ j \neq i}} |a_{i,j}|\,, \quad \alpha_i > \alpha > 1\,.$

Метод можно применить и к бесконечным системам уравнений. При этом, однако, вводится дальнейшее предположение

3. $0 < k < \alpha_{i,i} < K < \infty$.

В статье анализируется этот метод и кроме теоретических доказательств демонстрируется практический ход решения на численном примере.

Zusammenfassung.

ÜBER EINE NUMERISCHE LÖSUNG VON VOLLSTÄNDIG REGULÄREN SYSTEMEN LINEARER GLEICHUNGEN UND IHRE APPLIKATION AUF DIE STATISCHE LÖSUNG VON RAHMENTRAGWERKEN

IVO BABUŠKA, Praha.

(Eingelangt 25. IV. 1954.)

In der Weltliteratur der Baumechanik, speziell in der Literatur, die sich mit der Theorie von statischen Lösungen der Rahmentragwerken beschäftigt, hat eine Methode, die ihr Autor ,,Methode der fortgeleiteten Verformung" nennt, ihren Platz eingenommen.

Die Fragen, die mit der statischen Lösungen von Rahmentragwerken zusammenhängen, sind im Wesen äquivalent mit Fragen der Lösung eines Systems von Lineargleichungen. Es ist deswegen die Frage aufgetaucht, ob diese Methode der fortgeleiteten Verformung, welche in Speziellfällen sehr schnell zum Ziel führt, auch im Allgemeinen formuliert werden kann, und wann die Konvergenz der Methode, die einen iterativen Charakter hat, garantiert wird.

Diese Abhandlung beweist, dass für die Konvergenz dieser Methode die vollständige Regularität und Symmetrie eine hinreichende Bedingung ist. Ein System von Lineargleichungen wird vollständig regulär und symetrisch genannt, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

1. $a_{i,j} = a_{j,i}$
2. $a_{i,i} = \alpha_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} |a_{i,j}|, \; \alpha_i > \alpha > 1.$

Diese Methode kann auch für Lösung von unendlichen Systemen der linearen Gleichungen angewendet werden. Dabei aber wird noch

3. $0 < k < a_{i,i} < k < \infty$.

vorausgesetzt.

In diesem Artikel wird diese Methode analysiert und ausser den theoretischen Beweisen zeigt der Autor auch auf numerischen Beispielen ihren praktischen Vorgang.