Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Fiedler
Geometrie simplexu v $E_n$. I.

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 79 (1954), No. 4, 297--320

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117132`

**Terms of use:**

© Institute of Mathematics AS CR, 1954

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

*Vydává Matematický ústav ČSAV*

SVAZEK 79 * PRAHA, 30. XII. 1954 * ČÍSLO 4

# ČLÁNKY

## GEOMETRIE SIMPLEXU V $E_n$

(první část)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 25. listopadu 1953.)

DT 513.821.2

V této první části práce, která užívá barycentrických souřadnic ke studiu simplexů v $E_n$, jsou jednak studovány geometrické vlastnosti simplexů (jejich existence a unicita až na shodnost při daných velikostech hran nebo vnitřních úhlů), jednak jsou uvedeny vzorce v barycentrických souřadnicích, kterých bude třeba v dalších částech. Mimo to jsou uvedeny věty o minimálním počtu ostrých vnitřních úhlů, jejich rozložení v simplexu, a definuje se pojem pravoúhlého simplexu.

**1. Úvod.** Eukleidovským $n$-rozměrným prostorem $E_n$, kde $n$ je přirozené číslo, rozumíme metrický prostor, isometrický s prostorem $E_n^*$ všech uspořádaných $n$-tic reálných čísel (prvkům prostoru říkáme body a značíme je velkými latinskými písmeny) tvaru $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, se vzdáleností definovanou vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2} . \tag{1,1}$$

Budeme dále užívat pojmů přímka, nadrovina, $m$-rozměrný lineární podprostor, úhel, koule a j., zaváděných v učebnicích geometrie (na př. E. ČECH, Základy analytické geometrie, zkráceně AG).

Simplexem v $E_n$ rozumíme útvar složený z $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v $E_n$ (t. j. bodů, které neleží v nadrovině), kterým říkáme vrcholy simplexu, a pro $n > 1$ ze všech $m$-rozměrných lineárních prostorů, $0 < m \leq n - 1$, spojujících vždy $m + 1$ z těchto bodů; těmto lineárním prostorům říkáme pro $m = 1$ hrany simplexu, pro $m = n - 1$ (a $n > 2$) stěny simplexu.

**2. Barycentrické souřadnice; vyjádření vzdálenosti v těchto souřadnicích. Shodnost simplexů.** Nechť v $E_n$ je dáno $n + 1$ lineárně nezávislých bodů

$O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$, jejichž vzájemné vzdálenosti označme $\sqrt{e_{ij}}$, t. j. pro $i, j = 1, \ldots, n+1$ platí

$$e_{ij} = [\varrho(O_i, O_j)]^2 \,. \tag{2,1}$$

Nechť v pevně zvoleném $E_n^*$, isometrickém s $E_n$, mají body $O_i^*$, odpovídající bodům $O_i$, tvar $O_i^* = (\overset{i}{a}_1, \overset{i}{a}_2, \ldots, \overset{i}{a}_n)$ pro $i = 1, 2, \ldots n+1$, takže

$$e_{ij} = (\overset{j}{a}_1 - \overset{i}{a}_1)^2 + (\overset{j}{a}_2 - \overset{i}{a}_2)^2 + \ldots + (\overset{j}{a}_n - \overset{i}{a}_n)^2 \,. \tag{2,2}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti bodů $O_i$ platí, že matice

$$A = \left\| \begin{matrix} \overset{1}{a}_1, & \overset{1}{a}_2, & \ldots, & \overset{1}{a}_n, & 1 \\ \overset{2}{a}_1, & \overset{2}{a}_2, & \ldots, & \overset{2}{a}_n, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n+1}{a}_1, & \overset{n+1}{a}_2, & \ldots, & \overset{n+1}{a}_n, & 1 \end{matrix} \right\|$$

je regulární. Definujme $\overset{i}{a}_{n+1} = 1$ pro $i = 1, 2 \ldots, n+1$, takže lze psát $A = \|\overset{i}{a}_k\|$, $i, k = 1, \ldots, n+1$. Označme ještě $\overset{i}{\alpha}_j$ doplněk prvku $\overset{i}{a}_j$ v matici $A$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n+1} \overset{j}{\alpha}_i \overset{j}{a}_k = \sum_{j=1}^{n+1} \overset{i}{a}_j \overset{k}{\alpha}_j = |A| \,.\, \delta_{ik} \,, \tag{2,3}$$

kde $|A|$ je determinant matice $A$, takže

$$|A| \neq 0 \,, \tag{2,4}$$

a $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq k \\ 1 \text{ pro } i = k \end{cases}$ je Kroneckerovo delta, kterého budeme často užívat.

Nyní budiž $X$ bod v $E_n$, $X^* = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ odpovídající mu bod v $E_n^*$. Bodu $X$ přiřadíme bod $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ projektivního prostoru $P_n$ vztahem $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$

$$x_i = \overset{i}{\alpha}_1 X_1 + \overset{i}{\alpha}_2 X_2 + \ldots + \overset{i}{\alpha}_n X_n + \overset{i}{\alpha}_{n+1} \,. \tag{2,5}$$

Soustava $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ skutečně není pro žádný bod $X$ z $E_n$ nulová (t. j. není $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 0$), neboť podle (2,3) je (položíme-li $X_{n+1} = 1$)

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_i \overset{i}{a}_{n+1} x_i = \sum_{i,k=1}^{n+1} \overset{i}{a}_{n+1} \overset{i}{\alpha}_k X_k = |A| \sum_k \delta_{k,n+1} X_k = X_{n+1}|A| = |A| \neq 0 \,,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \neq 0 \,. \tag{2,6}$$

Obdobně se snadno zjistí, že pro $k = 1, \ldots, n$ je

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overset{i}{a}_k x_i = |A| \,.\, X_k \,. \tag{2,7}$$

Poněvadž $\sum\limits_i x_i = |A|$, plyne z (2,6) a (2,7), že naopak každému bodu $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ z $P_n$, pro který platí (2,6), lze přiřadit bod $X^* = (X_1, \ldots, X_n)$ prostoru $E_n^*$, a tedy i bod $X$ prostoru $E_n$, vztahem $(k = 1, \ldots, n)$

$$X_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \overset{i}{a}_k x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_1} . \tag{2,8}$$

Je tedy (2,5) a (2,8) jednojednoznačné přiřazení $E_n^*$ (a tedy i $E_n$) a $P_n - N$, označíme-li $N$ množinu těch bodů $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ z $P_n$, pro něž je $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. V tomto přiřazení odpovídají bodům $O_i$ z $E_n$ body $(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i,n+1})$ z $P_n - N$, lineárním prostorům v $E_n$ lineární prostory v $P_n - N$.

Než odvodíme další vlastnosti tohoto přiřazení, dokážeme tuto větu:

**Věta 1.** *Nechť $X$ resp. $Y$ jsou body v $E_n$ a nechť jim uvedeným přiřazením odpovídají body $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ v $P_n - N$. Potom platí, že čtverec vzdálenosti bodů $X$ a $Y$ je roven*

$$[\varrho(X, Y)]^2 = -\frac{(exx)}{2(\Sigma x_i)^2} + \frac{(exy)}{\Sigma x_i \, \Sigma y_i} - \frac{(eyy)}{2(\Sigma y_i)^2} , \tag{2,9}$$

*čili*

$$[\varrho(X, Y)]^2 = \frac{1}{2(\Sigma x_i)^2(\Sigma y_i)^2} \begin{vmatrix} 0, & \Sigma x_i, & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i, & (exx), & (exy) \\ \Sigma y_i, & (eyx), & (eyy) \end{vmatrix} , \tag{2,9'}$$

*kde $(exy) = \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i y_j$ atp. a $e_{ij} = e_{ji}$ jsou dány vztahy (2,1).*

Důkaz. Jsou-li $X^* = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ resp. $Y^* = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ body v $E_n$ odpovídající bodům $X$ resp. $Y$, platí podle (2,8) a (2,2) postupně

$$[\varrho(X, Y)]^2 = [\varrho(X^*, Y^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \left( \frac{\sum\limits_i \overset{i}{a}_k x_i}{\sum\limits_i x_i} - \frac{\sum\limits_i \overset{i}{a}_k y_i}{\sum\limits_i y_i} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \sum_k \Big(\sum_i \overset{i}{a}_k x_i \cdot \sum_m y_m - \sum_m \overset{m}{a}_k y_m \cdot \sum_i x_i\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \sum_k \Big[\sum_{i,m} (\overset{i}{a}_k - \overset{m}{a}_k) \, x_i y_m\Big] \cdot \Big[\sum_{j,l} (\overset{j}{a}_k - \overset{l}{a}_k) \, x_j y_l\Big] =$$

$$= \frac{1}{2(\sum\limits_i x_i)^2 (\sum\limits_i y_i)^2} \cdot \sum_{i,j,k,l,m} 2(\overset{i}{a}_k - \overset{m}{a}_k)(\overset{j}{a}_k - \overset{l}{a}_k) \, x_i x_j y_l y_m =$$

$$= \frac{1}{2(\sum\limits_i x_i)^2(\sum\limits_i y_i)^2} [- \sum_{i,j,k,l,m} (\overset{l}{a}_k - \overset{m}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m + \sum_{i,j,k,l,m} (\overset{i}{a}_k - \overset{l}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m} (\overset{j}{a}_k - \overset{m}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m - \sum_{i,j,k,l,m} (\overset{i}{a}_k - \overset{j}{a}_k)^2 x_i x_j y_l y_m] =$$

$$= \frac{1}{2(\Sigma x_i)^2(\Sigma y_i)^2} [- (eyy)(\Sigma x_i)^2 + 2(exy)\Sigma x_i \, \Sigma y_i - (exx)(\Sigma y_i)^2] .$$

Tím je dokázán vztah (2,9) i (2,9′).

Již jsme ukázali, že bodu $O_1$ v $E_n$ odpovídá bod $(1, 0, \ldots, 0)$ v $P_n - N$, bodu $O_2$ bod $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ atd., a to nezávisle na tom, pomocí kterého $E_n^*$ provádíme přiřazení (2,5) a (2,8). Tento výsledek zobecníme v této větě:

**Věta 2.** *Popsané přiřazení bodů v $E_n$ a v $P_n - N$ nezávisí na volbě $E_n^*$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí tato pomocná věta:

Bod v $E_n$ je jednoznačně určen vzdálenostmi od bodů $O_i$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Nechť totiž jsou $P$ a $Q$ dva body v $E_n$ takové, že pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ platí $\varrho(P, O_k) = \varrho(Q, O_k)$. Bodu $P$ resp. $Q$ nechť odpovídají v $P_n - N$ (prostřednictvím $E_n^*$) body $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ resp. $(q_1, \ldots, q_{n+1})$, takže podle (2,9) platí $[\varrho(P, O_k)]^2 = \dfrac{\sum\limits_i e_{ik} p_i}{\sum\limits_i p_i} - \dfrac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2}$, a obdobně pro $Q$. Z $\varrho(P, O_k) = \varrho(Q, O_k)$ plyne pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$

$$\frac{\sum\limits_i e_{ik} p_i}{\sum\limits_i p_i} - \frac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2} - \frac{\sum\limits_i e_{ik} q_i}{\sum\limits_i q_i} + \frac{(eqq)}{2(\sum\limits_i q_i)^2} = 0 .$$

Násobíme-li $k$-tou rovnici $\dfrac{q_k}{\sum\limits_i q_i}$ a sečteme-li, dostaneme

$$- \frac{(epp)}{2(\sum\limits_i p_i)^2} + \frac{(epq)}{\sum\limits_i p_i \sum\limits_i q_i} - \frac{(eqq)}{2(\sum\limits_i q_i)^2} = 0 ,$$

t. j. podle (2,9) $\varrho(P, Q) = 0$, takže oba body $P$ a $Q$ splývají.

Nyní snadno dokážeme větu 2. Nechť $E_n^*$ a $\bar{E}_n^*$ jsou prostory uspořádaných $n$-tic a nechť bodu $X$ z $E_n$ je pomocí $E_n^*$ přiřazen bod $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ z $P_n - N$, pomocí $\bar{E}_n^*$ bod $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ v prostoru $\bar{P}_n - \bar{N}$. Bodu v $P_n - N$ o souřadnicích $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ (je totiž $\Sigma \bar{x}_i \neq 0$) odpovídá v $E_n$ (pomocí $E_n^*$) bod $\bar{X}$. Z (2,9) však ihned plyne, že $\varrho(X, O_k) = \varrho(\bar{X}, O_k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, jestliže $\varrho(X, O_k)$ počítáme pomocí souřadnic v $\bar{P}_n - \bar{N}$, $\varrho(\bar{X}, O_k)$ pomocí souřadnic v $P_n - N$. Odtud vyplývá, že body $X$ a $\bar{X}$ jsou totožné, t. j. také body $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ a $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+1})$ v $P_n - N$ resp. v $\bar{P}_n - \bar{N}$ mají (až příp. na faktor) tytéž souřadnice, které tedy nezávisí na volbě $E_n^*$.

Tím jsme přiřadili každé soustavě $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v $E_n$ určitou význačnou soustavu souřadnic. Tyto souřadnice se nazývají barycentrické souřadnice vzhledem k simplexu, určenému těmito body.

Definujme nyní, že simplex s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ (v tomto pořadí) v prostoru $E_n$ je shodný se simplexem $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{n+1}$ (v tomto pořadí) v prostoru $E'_n$, existuje-li isometrické jednojednoznačné přiřazení bodů v $E_n$ a $E'_n$ tak, že bodům $O_i$ odpovídají body $O'_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Prostory $E_n$ a $E'_n$ mohou ovšem splývat; protože jsou isometrické, lze to dokonce předpokládat. Potom je zřejmé, že shodnost dvou simplexů v $E_n$ je relace ekvivalence, takže množina všech simplexů v $E_n$ se rozpadá ve třídy navzájem shodných simplexů.

Platí věta:

**Věta 3.** *Simplexy s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ resp. $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{n+1}$ v $E_n$ jsou shodné právě tehdy, platí-li $\varrho(O_i, O_j) = \varrho(O'_i, O'_j)$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, t. j., jsou-li velikosti odpovídajících si hran*) stejné.*

Důkaz. Zaveďme jako v (2,1) čísla $e_{ij}$ resp. $e'_{ij}$.

Jsou-li simplexy shodné, platí zřejmě $\varrho(O_i, O_j) = \varrho(O'_i, O'_j)$, t. j. $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Nechť obráceně platí, že $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$. Přiřaďme každému bodu $X$ z $E_n$ bod $X'$ v $E_n$ tímto předpisem: odpovídá-li bodu $X$ bod z $P_n$ — — $N$ o barycentrických souřadnicích $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ vzhledem k prvnímu simplexu, pak bod $X'$ nechť je ten bod z $E_n$, jehož barycentrické souřadnice vzhledem k druhému simplexu jsou opět $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Snadno se zjistí, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, a že bodům $O_i$ odpovídají body $O'_i$. Z (2,9) pak plyne, že přiřazení zachovává vzdálenost, t. j., že je isometrické. Oba simplexy jsou tedy shodné.

Tím jsme dokázali, že čísly $e_{ij}$ ($e_{ii} = 0$, $e_{ij} = e_{ji}$) je určen (až na simplexy shodné) nejvýše jeden simplex. V další větě uvedeme nutnou a postačující podmínku pro existenci takového simplexu, která nám bude velmi užitečná.

**Věta 4.** *Budiž dána soustava reálných čísel $e_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, tak, že*

$$e_{ii} = 0 \,, \quad e_{ij} = e_{ji} \,. \tag{2,10}$$

*Nutná a postačující podmínka, aby existoval alespoň jeden simplex v $E_n$ s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ tak, že pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$*

$$e_{ij} = [\varrho(O_i, O_j)]^2 \,, \tag{2,11}$$

*je, aby kvadratická forma $(exx) = \sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j$ měla tuto vlastnost:*

*je-li $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ pro nenulovou soustavu reálných čísel $x_i$, potom je $(exx) < 0$.*

*) Velikostí hrany simplexu, spojující jeho vrcholy $O_i$ a $O_j$ pro $i \neq j$, rozumíme vzdálenost bodů $O_i$ a $O_j$.

**Důkaz.** Nechť předně v $E_n$ existuje simplex s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ tak, že platí (2,11) a nechť pro nenulovou soustavu reálných čísel $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ je $\sum_{i=1}^{n+1} r_i = 0$. Zvolme v $E_n$ libovolný pevný bod $P$, jehož barycentrické souřadnice vzhledem k danému simplexu nechť jsou $(p_1, \ldots, p_{n+1})$, takže $\Sigma p_i \neq 0$. Bod $Q$, jehož barycentrické souřadnice jsou $q_i = p_i + r_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, existuje (je $\Sigma q_i = \Sigma p_i \neq 0$) a je různý od $P$ (kdyby $q_i = \varrho p_i$, pak $r_i = (\varrho - 1) p_i$, z $\Sigma r_i = 0$ by plynulo $\varrho = 1$, $r_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, což je spor). Vzdálenost $\varrho(P, Q)$ je tedy kladná a podle (2,9) platí

$$0 < [\varrho(P, Q)]^2 = \frac{1}{2(\sum_i p_i)^2} [- (epp) + 2(epp) + 2(epr) -$$

$$- (epp) - 2(epr) - (err)] = - \frac{(err)}{2(\Sigma p_i)^2},$$

takže vskutku $(err) < 0$. Uvedená podmínka je tedy nutná.

Nechť obráceně pro kvadratickou formu $(exx)$ platí (2,10) a podmínka věty. Snadno se přesvědčíme, že tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou: je-li $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nenulová soustava, pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} e_{i,n+1} x_i - \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} x_i x_j > 0 .$$

Podle známé věty z algebry*) existuje k matici $M = \|\tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij})\|$ této positivně definitní kvadratické formy regulární čtvercová matice s reálnými prvky $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, tak, že $M = A \,.\, A'$, kde $A'$ je matice transponovaná k matici $A$, t. j. platí

$$\tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} . \tag{2,12}$$

Budiž nyní $E_n^*$ prostor $n$-tic z odst. 1, isometrický s daným $E_n$. Označme pro $i = 1, 2, \ldots, n$ $O_i^*$ body $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $O_{n+1}^*$ bod $(0, 0, \ldots, 0)$. Je pak $[\varrho(O_i^*, O_{n+1}^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = e_{i,n+1}$ podle (2,12) pro $i < n + 1$; pro $i, j < n + 1$ je dále

$$[\varrho(O_i^*, O_j^*)]^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_{jk} - a_{ik})^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 =$$

$$= e_{j,n+1} - 2 \,.\, \tfrac{1}{2}(e_{i,n+1} + e_{j,n+1} - e_{ij}) + e_{i,n+1} = e_{ij} .$$

Tudíž pro body $O_i$ v $E_n$, odpovídající bodům $O_i^*$ v $E_n^*$, platí (2,11), a přitom body $O_i^*$, a tedy i $O_i$, jsou lineárně nezávislé, jak plyne odtud, že determinant $|a_{ij}| \neq 0$. Je proto podmínka věty 4 také postačující.

*) Na příklad *Gelfand*: Lineární algebra, Praha 1953, str. 201.

Vrátíme se teď ke studiu pevného simplexu v $E_n$ s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$. Opět definujme pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$ čísla $e_{ij}$ vztahy (2,1), dále definujme

$$e_{00} = 0\,, \quad e_{0i} = e_{i0} = 1 \tag{2,13}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ a umluvme se, že indexy $i, j, k, l$ označují sčítání resp. jiné operace mezi indexy $1, 2, \ldots, n + 1$, indexy $r, s, t$ mezi indexy $0, 1, 2, \ldots, n + 1$. Tak na př. matici (kde ovšem $e_{ii} = 0$ a $e_{ij} = e_{ji}$)

$$\mu = \begin{Vmatrix} 0, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & e_{11}, & e_{12}, & \ldots, & e_{1,n+1} \\ 1, & e_{21}, & e_{22}, & \ldots, & e_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & e_{n+1,1}, & e_{n+1,2}, & \ldots, & e_{n+1,n+1} \end{Vmatrix}$$

budeme psát stručně $\mu = \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & e_{ij} \end{Vmatrix}$ nebo $\mu = \|e_{rs}\|$.

**Věta 5.** *Matice* $\mu = \|e_{rs}\|$ *i matice* $\bar{\mu} = \|e_{ij}\|$ *jsou regulární.*

Důkaz. Kdyby totiž $|e_{rs}| = 0$, pak by existovalo $n + 2$ čísel $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$ ne vesměs rovných nule tak, že $\sum\limits_i p_i = 0$ (z prvého řádku) a že $p_0 + \sum\limits_k e_{ik}p_k = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Násobením posledních rovnic vždy $p_i$ a sečtením plyne $\sum\limits_{i,k} e_{ik}p_ip_k = 0$, takže podle věty 4 je $p_1 = p_2 = \ldots = p_{n+1} = 0$, a tedy i $p_0 = 0$, což je spor.

Kdyby pak $|e_{ij}| = 0$, existovalo by $n + 1$ čísel $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ ne vesměs nulových tak, že $\sum\limits_j e_{ij}p_j = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Je $\sum\limits_i p_i \neq 0$ (neboť $(epp) = 0$) podle věty 4, takže existuje bod $P$ v $E_n$ tak, že jeho barycentrické souřadnice jsou $(p_i)$. Avšak z (2,9) se snadno zjistí, že pak $P$ splyne se všemi $O_i$ (že totiž $\varrho(P, O_i) = 0$) pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, což je spor, neboť $n \geqq 1$ a body $O_i$ jsou navzájem různé.

Označme nyní doplňky prvků $e_{rs}$ v matici $\mu = \|e_{rs}\|$ (t. j. determinanty $(n + 1)$-ho stupně) znaky $g_{rs}$, takže na př. $g_{00} = |e_{ij}|$, dále determinant matice $\mu$ znakem $\Delta$, takže podle věty 5 je

$$\Delta = |e_{rs}| \neq 0\,, \quad g_{00} \neq 0\,. \tag{2,14}$$

Platí tedy

$$\sum_s e_{rs}g_{st} = \Delta\delta_{rt}\,; \tag{2,15}$$

podrobněji

$$g_{00} + \sum_i e_{ik}g_{0i} = 0\,, \tag{2,15a}$$

$$g_{0k} + \sum_i e_{ij}g_{ik} = \Delta\delta_{jk}\,, \tag{2,15b}$$

$$\sum_i g_{0i} = \Delta\,, \tag{2,15c}$$

$$\sum_i g_{ik} = 0\,. \tag{2,15d}$$

Význam čísel $g_{rs}$ objasníme později. Závěrem tohoto odstavce dokážeme ještě tuto pomocnou větu:

*Pro libovolnou $(n + 1)$-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ platí*

$$(exx) \leqq -\frac{g_{00}}{\Delta}\left(\sum_i x_i\right)^2\,, \tag{2,16}$$

*a přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x_i = \varrho g_{0i}$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$.*

Důkaz. Že pro $x_i = \varrho g_{0i}$ platí (2,16) se znamením rovnosti, plyne z (2,15a) a (2,15c).

Nechť tedy $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ je taková soustava, že $x_i = \varrho g_{0i}$ neplatí současně pro žádné $\varrho$; potom čísla $y_k = g_{0k}\sum_i x_i - \Delta x_k$ nejsou vesměs rovna nule, dále $\sum_i y_i = 0$, takže podle věty 4 je $(eyy) < 0$:

$$\left(\sum_i x_i\right)^2 \sum_{i,j} e_{ij} g_{0i} g_{0j} - 2\Delta \sum_i x_i \sum_{i,j} e_{ij} g_{0i} x_j + \Delta^2(exx) = \Delta^2(exx) + g_{00}\Delta\left(\sum_i x_i\right)^2 < 0\,,$$

a odtud

$$(exx) < -\frac{g_{00}}{\Delta}\left(\sum_i x_i\right)^2\,.$$

Tím je pomocná věta dokázána.

**3. Vyjádření úhlu.** Eukleidovský prostor $E_n$ se doplňuje v geometrii v prostor $\overline{E}_n$, složený jednak ze všech bodů $E_n$, které se pak nazývají vlastní body a mezi nimiž existuje pojem vzdálenosti ve shodě se vzdáleností v $E_n$, jednak ze všech směrů $E_n$, přiřazených třídám nenulových a navzájem rovnoběžných vektorů (nebo, což je totéž, třídám rovnoběžných přímek). Těmto směrům se pak říká nevlastní body $\overline{E}_n$. Mezi dvěma nevlastními body (čili směry) nebo mezi bodem vlastním a nevlastním není pojem vzdálenosti definován, avšak mezi dvěma nevlastními body čili směry je definován pojem úhlu. Dále se zavádí pojem orientovaného směru, který odpovídá třídám nenulových a souhlasně rovnoběžných vektorů v $E_n$ (nebo třídám souhlasně rovnoběžných polopřímek).

Lze bez obtíží ukázat, že konstrukce doplnění $E_n$ v $\overline{E}_n$ odpovídá pro barycentrické souřadnice doplnění $P_n - N$ v $P_n$, t. j., že směrům v $E_n$ odpovídají jednojednoznačně takové homogenní nenulové $(n + 1)$-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, pro něž je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, tedy body $N$. V $P_n$ jsou tedy jednak body vlastní, které neleží v $N$, jednak body nevlastní, které leží v $N$. $N$ je nadrovina prostoru $P_n$

a nazývá se nevlastní nadrovina, zatím co každá jiná nadrovina se nazývá vlastní. Dále orientovaným směrům odpovídají kladně homogenní nenulové $(n+1)$-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, pro něž je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, považujeme-li totiž za totožné nenulové $(n+1)$-tice $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ a $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ $(\Sigma x_i = \Sigma y_i = 0)$, jestliže existuje $\varrho > 0$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n+1$ je $x_i = \varrho y_i$. Body $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ a $(-x_1, \ldots, -x_{n+1})$ pak odpovídají opačným směrům.

Jsou-li v barycentrických souřadnicích $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$, $B = (b_1, \ldots, b_{n+1})$ dva různé vlastní body, pak body (uzavřené) úsečky $AB$ mají (až na nenulový faktor) tvar $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$

$$x_k = \frac{a_k}{\sum_i a_i} + \lambda\left(\frac{b_k}{\sum_i b_i} - \frac{a_k}{\sum_i a_i}\right), \tag{3,1}$$

kde $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Body polopřímky $AB$ (s počátkem $A$) mají tvar (3,1), kde $\lambda \geqq 0$, t. j. tvar (až na nenulový faktor) $x_k = \frac{a_k}{\Sigma a_i} + \lambda p_k$, kde $\lambda \geqq 0$ a $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 0$ (a ne všechna $p_i$ jsou rovna nule). Bod $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ tedy je nevlastní, je to (orientovaný) směr polopřímky $AB$.

Úhlem dvou orientovaných směrů $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 0$ je pak úhel $\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, pro který je

$$\cos \varphi = \frac{-(epq)}{\sqrt{-(epp)}\sqrt{-(eqq)}} \tag{3,2}$$

(pravá strana (3,2) je skutečně v absolutní hodnotě nejvýše rovna jedné: kdyby totiž $(epq)^2 > (epp)(eqq)$, pak body $P, Q$ jsou různé, takže pro bod $R = (r_1, \ldots, r_{n+1})$, $r_k = (epq)\, p_k - (epp)\, q_k$, je $\sum_i r_i = 0$, t. j. $(err) < 0$ podle věty 4; avšak je $(err) = (epp)[(epp)(eqq) - (epq)^2] > 0$, neboť $(epp) < 0$ a $(epp) \,.\, (eqq) - (epq)^2 < 0$ podle předpokladu, což je spor).

Úhel $\varphi$ neorientovaných směrů $P, Q$ je pak dán vztahy

$$\cos^2 \varphi = \frac{(epq)^2}{(epp)(eqq)}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{3,3}$$

Odtud plyne, že směry $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ a $Q = (q_1, \ldots, q_{n+1})$, $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 0$, jsou kolmé právě tehdy, je-li $(epq) = 0$. Lze dále ukázat, že směr $P$, kolmý k dané vlastní nadrovině $\alpha$ o rovnici $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ (který existuje a je jediný) má barycentrické souřadnice

$$p_i = \sum_{j=1}^{n+1} g_{ij} \alpha_j \tag{3,4}$$

(podle (2,15d) je skutečně $\sum_i p_i = 0$)*). Je-li obráceně $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$, $\sum_i p_i = 0$ daný směr, pak nadrovina $\alpha$ je kolmá ke směru $P$ právě tehdy, existuje-li reálné číslo $\lambda$ tak, že $\alpha$ je (až na nenulový faktor) tvaru

$$(epx) + \lambda \sum_i x_i = 0 \tag{3,5}$$

(přitom všechny nadroviny tvaru (3,5) existují a jsou vlastní, neboť pro bod $P$ je $(epp) + \lambda \sum p_i = (epp) \neq 0$).

Poněvadž úhel $\varphi$ dvou vlastních nadrovin $\alpha \equiv \sum_i \alpha_i x_i = 0$ a $\beta \equiv \sum_i \beta_i x_i = 0$ lze definovat jako úhel k nim kolmých směrů, je po snadném výpočtu

$$\cos^2 \varphi = \frac{(g\alpha\beta)^2}{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi, \tag{3,6}$$

kde je psáno stručně $(g\alpha\beta) = \sum_{i,j} g_{ij}\alpha_i\beta_j$ atp.

To plyne ihned ze (3,3) a ze vztahu

$$(epq) = \Delta(g\alpha\beta), \tag{3,7}$$

kde

$$p_k = \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\alpha_i, \quad q_k = \sum_{i=1}^{n+1} g_{ik}\beta_i$$

(je $(epq) = \sum_{k,l,i,j=1}^{n+1} e_{kl} g_{ik} g_{jl} \alpha_i \beta_j = -\sum_{i,j,l=1}^{n+1} e_{0l} g_{jl} g_{0i} \alpha_i \beta_j + \Delta \sum_{i,j,l=1}^{n+1} \delta_{il} g_{jl} \alpha_i \beta_j = \Delta(g\alpha\beta)$); přitom nejsou všechna $p_k$ rovna nule, neboť podle vět o minorech adjungovaného determinantu má matice $\|g_{ij}\|$ hodnost právě $n$, t. j. soustava $\sum_{k=1}^{n+1} g_{ik}x_k = 0$, $i = 1, \ldots, n + 1$ má (až na faktor) jediné řešení $x_k = 1$, $k = 1, \ldots, n + 1$.

Z (3,7) dále plyne: definujeme-li

$$\gamma = -\operatorname{sign} \Delta, \tag{3,8}$$

potom pro každou vlastní nadrovinu $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ je

$$\gamma(g\alpha\alpha) > 0. \tag{3,9}$$

Je-li totiž směr $P = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ dán vztahem (3,4), potom je podle věty 4 $(epp) < 0$, takže vzhledem k (2,14), (3,7) a (3,8) platí (3,9).

*) Můžeme teď najít význam čísel $g_{ij}$. Protože bod $P$ je podle (3,4) polárně sdružen s nadrovinou $\alpha$ (lépe se všemi směry v $\alpha$, neboť $P$ je sdružen i s nadrovinou $\Sigma\alpha_i x_i + \lambda\, \Sigma x_i = 0$, která obsahuje tytéž směry jako $\alpha$) vzhledem ke kvadrice v nadrovinných souřadnicích $\Gamma \equiv \Sigma g_{ij}\xi_i\xi_j = 0$, je kolmost konjugovaností dle $\Gamma$, t. j. $\Gamma$ je absolutní kvadrikou prostoru $E_n$ (AG II, str. 160).

Zavedeme-li ještě pojem úhlu $\varphi$ dvou vlastních nadrovin $\alpha \equiv \sum_i \alpha_i x_i = 0$, $\beta \equiv \sum_i \beta_i x_i = 0$ vzhledem k vlastnímu bodu $C = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$, který neleží na žádné z nich, jako úhel výplňkový (úhly $\varphi$ a $\psi$ jsou výplňkové, je-li $\varphi + \psi = \pi$) k úhlu orientovaných kolmic z bodu $C$ k nadrovinám $\alpha$ a $\beta$; orientovaná kolmice z bodu k nadrovině je polopřímka s počátkem v tomto bodě, kolmá k dané nadrovině a protínající tuto nadrovinu. Snadno se zjistí, že směr orientované kolmice z $C$ k $\alpha$ je (až na kladný faktor)

$$p_k = \varepsilon \sum_i g_{ik} \alpha_i ,$$

kde $\varepsilon = -\operatorname{sign} (\gamma \sum_i \alpha_i c_i \cdot \sum_i c_i)$.

Najdeme-li obdobně směr orientované kolmice z $C$ k $\beta$, dostaneme ze (3,2), (3,7) a (3,8), že úhel $\beta$ je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\eta(g\alpha\beta)}{\sqrt{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}} , \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi , \tag{3,10}$$

kde $\eta = -\operatorname{sign} (\gamma \sum_i \alpha_i c_i \cdot \sum_i \beta_i c_i)$.

Budeme ještě potřebovat, jak se vyjádří v barycentrických souřadnicích (pro $n > 2$) $(n - 1)$-dimensionální obsah stěny simplexu. To však vyplyne jako speciální případ tohoto vztahu, který lze bez obtíží dokázat ze známých vzorců z analytické geometrie v $E_n$*):

Jsou-li $\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P}$ vlastní body o barycentrických souřadnicích $\overset{\alpha}{P} = (\overset{\alpha}{p}_1, \overset{\alpha}{p}_2, \ldots, \overset{\alpha}{p}_{n+1})$, $\alpha = 1, \ldots, m + 1$, které jsou lineárně nezávislé, potom $m$-dimensionální obsah simplexu (v $E_m$, obsahujícím tyto body), který je má za vrcholy, je roven nezápornému $\varrho(\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P})$, jehož čtverec je

$$[\varrho(\overset{1}{P}, \overset{2}{P}, \ldots, \overset{m+1}{P})]^2 = \frac{1}{2^m (m!)^2} \frac{e[\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots, \overset{m+1}{p}]}{e[\overset{1}{p}] \cdot e[\overset{2}{p}] \ldots e[\overset{m+1}{p}]} , \tag{3,11}$$

kde je označeno

$$e[p, q, \ldots, v] = \begin{vmatrix} 0, & \sum_i p_i, & \sum_i q_i, & \ldots, & \sum_i v_i \\ \sum_i p_i, & (epp), & (epq), & \ldots, & (epv) \\ \sum_i q_i, & (eqp), & (eqq), & \ldots, & (eqv) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_i v_i, & (evp), & (evq), & \ldots, & (evv) \end{vmatrix} ,$$

*) *K. Borsuk*: Geometria analityczna, 1950, str. 105.

takže $e[\overset{\alpha}{p}] = -(\sum\limits_i \overset{\alpha}{p}_i)^2$. Vzorec (2,9') je skutečně speciálním případem (3,11) pro $m = 1$.

Snadno se také najde vyjádření vzdálenosti vlastního bodu $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ od vlastní nadroviny $\alpha \equiv \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$: čtverec této vzdálenosti je

$$[\varrho(A, \alpha)]^2 = -\frac{\Delta}{2} \cdot \frac{(\sum\limits_i \alpha_i a_i)^2}{(g\alpha\alpha) \cdot (\sum\limits_i a_i)^2} . \tag{3,12}$$

**4. Vnitřní úhly simplexu. Další věty o shodnosti simplexů.** V našem základním simplexu o vrcholech $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ a o stranách velikosti $\sqrt{e_{ij}}$ najdeme teď velikost t. zv. vnitřních úhlů. Nejprve nazveme jako obvykle vnitřním bodem simplexu každý vlastní bod $A$, který neleží v žádné ze stěn $\omega_i \equiv \equiv x_i = 0$ simplexu, který však leží ve všech poloprostorech*) $\omega_i O_i$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$. Snadno se zjistí, že v barycentrických souřadnicích je bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ vnitřní bod simplexu právě tehdy, existuje-li číslo $\varepsilon = \pm 1$ tak, že pro $i = 1, \ldots, n + 1$ je

$$\varepsilon a_i > 0 . \tag{4,1}$$

Vnitřními úhly $\varphi_{ij}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, $n > 1$, našeho simplexu pak rozumíme úhly nadrovin $\omega_i, \omega_j$ vzhledem k pevnému vnitřnímu bodu $A$. Z vyjádření (3,10) je zřejmé, že $\varphi_{ij}$ nezávisí na volbě vnitřního bodu $A$ a že platí

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{-\gamma g_{ij}}{\sqrt{\gamma g_{ii}} \sqrt{\gamma g_{jj}}} , \quad 0 < \varphi_{ij} < \pi , \tag{4,2}$$

kde $\gamma$ je definováno v (3,8) a přitom podle (3,9) je

$$\gamma g_{ii} > 0 . \tag{4,3}$$

Nemůže být ovšem $\varphi_{ij} = 0$ nebo $\varphi_{ij} = \pi$, t. j. $\cos^2 \varphi_{ij} = 1$, neboť pak by $g_{ij}^2 = g_{ii} g_{jj}$ a existovala by nenulová reálná dvojice $c_i, c_j$ tak, že $g_{ii} c_i^2 + 2 g_{ij} c_i c_j + g_{jj} c_j^2 = 0$, t. j. pro vlastní nadrovinu $c_i x_i + c_j x_j = 0$ (je $n > 1$) by platilo $\gamma(gcc) = 0$ (kde $c_k = 0$ pro $k \neq i, j$, $k = 1, \ldots, n + 1$) ve sporu s (3,9).

Podle (3,11) je čtverec $n$-dimensionálního obsahu daného simplexu roven

$$V^2 = \frac{(-1)^{n+1} \Delta}{2 (n!)^2} , \tag{4,4}$$

takže pro každý simplex v $E_n$ je

$$\gamma = (-1)^n . \tag{4,5}$$

*) Poloprostor $\alpha A$, kde $\alpha \equiv \Sigma \alpha_i x_i = 0$ je vlastní nadrovina a $A = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ vlastní bod, který neleží v $\alpha$, je množina všech vlastních bodů $X$ takových, že úsečka $AX$ nemá s $\alpha$ společný žádný vnitřní bod. Je-li $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, leží $X$ v $\alpha A$ právě tehdy, je-li $\sum\limits_i x_i \neq 0$ a je-li $\varepsilon \sum\limits_i \alpha_i x_i \sum\limits_i x_i \geq 0$, kde $\varepsilon = \operatorname{sign} \sum\limits_i \alpha_i a_i \sum\limits_i a_i$.

Abychom mohli snáze formulovat větu 6, zavedeme si tuto úmluvu: definujeme pro $i = 1, \ldots, n + 1$ vnitřní úhel

$$\varphi_{ii} = \pi , \tag{4,6}$$

takže pak na př. platí (4,2) i pro $i = j$.

**Věta 6.** *Jsou-li* $\varphi_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$ *vnitřní úhly simplexu, potom pro libovolná reálná čísla* $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ *platí*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \xi_i \xi_j \cos \varphi_{ij} \leqq 0 ; \tag{4,7}$$

*přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li*

$$\xi_i = \varrho \sigma_i , \tag{4,8}$$

*kde* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}$ *je pevná soustava kladných čísel,*

$$\sigma_i > 0 . \tag{4,9}$$

*Nechť obráceně je dána soustava reálných čísel* $a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, *tak, že*

1. $$a_{ii} = -1 , \quad a_{ij} = a_{ji} , \tag{4,10}$$

2. *pro každou soustavu* $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ *je*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \xi_i \xi_j \leqq 0 , \tag{4,11}$$

3. *existuje soustava kladných čísel* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$, $\sigma_i > 0$, *tak, že ve* (4,11) *nastane rovnost právě tehdy, je-li* $\xi_i = \varrho \sigma_i$ *pro* $i = 1, \ldots, n + 1$.

*Potom existuje simplex v* $E_n$, *jehož vnitřní úhly* $\varphi_{ij}$ *vyhovují vztahům* $(i, j = 1, \ldots, n + 1)$

$$\cos \varphi_{ij} = a_{ij} . \tag{4,12}$$

Důkaz. Ze vztahů (3,9), (2,15d), (4,2) a (4,3) plyne ihned první část věty pro $\sigma_i = \sqrt{\gamma g_{ii}}$.

Nechť tedy pro soustavu čísel $a_{ij}$ platí 1, 2, 3. Definujme čísla $e'_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$, vztahy

$$e'_{ij} = 1 + a_{ij} . \tag{4,13}$$

Snadno se přesvědčíme, že tato čísla vyhovují předpokladům věty 4, takže existuje simplex v $E_n$ s vrcholy $O'_1, \ldots, O'_{n+1}$ tak, že $[\varrho(O'_1, O'_j)]^2 = e'_{ij}$. Označme $\omega_i$ nadroviny, jejichž rovnice v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu $O'_1, \ldots, O'_{n+1}$ jsou

$$\omega_i \equiv e'_{i1} x_1 + e'_{i2} x_2 + \ldots + e'_{i,n+1} x_n = 0 .$$

Jestliže zavedeme opět čísla $g'_{ij}$, $g'_{0i}$, $g'_{00}$, $\Delta'$ jako v 2, platí podle věty 5, že

$|e'_{ij}| \neq 0$, t. j. nadroviny $\omega_i$ jsou lineárně nezávislé. Snadno se podle (2,15) dosazením přesvědčíme, že průsečík $O_i$ nadrovin $\omega_j$, $j \neq i$, má souřadnice

$$O_i \equiv (g'_{00}g'_{i1} - g'_{01}g'_{0i}, \ldots, g'_{00}g'_{i,n+1} - g'_{0,n+1}g'_{0i}) .$$

Body $O_1, \ldots, O_{n+1}$ tvoří vrcholy simplexu. Dokážeme, že tento simplex má vnitřní úhly $\varphi_{ij}$, pro něž platí (4,12).

Podle pomocné věty z 2 (vztah (2,16)) platí

$$(e'xx) \leqq -\frac{g'_{00}}{\Delta'}(\Sigma x'_i)^2 ,$$

a přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li $x_i = \varrho g'_{0i}$. Dosazením z (4,13) je tedy pro $c = -1 - \dfrac{g'_{00}}{\Delta'}$

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j \leqq c(\Sigma x_i)^2 , \tag{4,14}$$

a přitom rovnost nastane právě pro $x_i = \varrho g'_{0i}$. Dokážeme, že $c = 0$: kdyby $c > 0$, pak by $\sum_{i,j} a_{ij}g'_{0i}g'_{0j} = c(\Sigma g'_{0i})^2 = c\Delta'^2 > 0$, což je spor s (4,11); kdyby $c < 0$, potom by pro čísla $\sigma_i$ z 3 $\sum_{i,j} a_{ij}\sigma_i\sigma_j \leqq c(\sum_i \sigma_i)^2 < 0$, což je spor s 3. Odtud $c = 0$, takže

$$g'_{00} + \Delta' = 0 ; \tag{4,15}$$

srovnáním obou případů, kdy nastane ve (4,11) a (4,14) rovnost, dostáváme, že

$$g'_{0i} = \varrho\sigma_i , \tag{4,16}$$

kde

$$\Delta'\varrho > 0 , \tag{4,17}$$

jak plyne sečtením rovnic (4,16).

Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že vlastní bod $s = (g'_{01}, \ldots, g'_{0,n+1})$ je vnitřním bodem simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$. Vnitřní úhel $\varphi_{ij}$, $i \neq j$, nadrovin $\omega_i$, $\omega_j$ tohoto simplexu je tedy podle (3,10) vyjádřen vztahem

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{\eta_{ij}(g'_{00} + \Delta' e'_{ij})}{\sqrt{g'^2_{00}}} = \frac{\eta_{ij}\Delta'(e'_{ij} - 1)}{|\Delta'|} = \eta_{ij}a_{ij} \operatorname{sign} \Delta' = a_{ij} ,$$

neboť $\eta_{ij} = \operatorname{sign} (\Delta' . \sum_k e'_{ik}g'_{0k} . \sum_k e'_{jk}g'_{0k}) = \operatorname{sign} (\Delta' g'^2_{00}) = \operatorname{sign} \Delta'$. Tím je věta dokázána, neboť jsme takový simplex zkonstruovali.

Z rovnice (2,15d) plyne, že je pro čísla $g_{ij}$ v simplexu

$$|g_{ij}| = 0 . \tag{4,18}$$

Vzhledem ke (4,2) a úmluvě (4,6) proto platí

$$|\cos \varphi_{ij}| = 0 . \tag{4,19}$$

Vnitřní úhly $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, $i \neq j$, jsou tedy vázány rovnicí (4,19). Je-li $N$ počet těchto úhlů, t. j.

$$N = \binom{n+1}{2}, \qquad (4,20)$$

pak platí tato věta:

**Věta 7.** *Libovolnými $N - 1$ vnitřními úhly simplexu je zbylý vnitřní úhel jednoznačně určen.*

Důkaz. Předpokládejme totiž, že pro dva simplexy (čárkovaný a nečárkovaný) v $E_n$ s vnitřními úhly $\varphi_{ij}$, $\varphi'_{ij}$ platí (s úmluvou $\varphi_{ii} = \varphi'_{ii} = \pi$)

$$\varphi_{ij} = \varphi'_{ij} \text{ pro } i + j > 3,\ i, j = 1, \ldots, n + 1, \text{ avšak } \varphi_{12} \neq \varphi'_{12}\,.$$

Potom je podle věty 6 pro každou soustavu $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j \cos \varphi_{ij} \leqq 0$, a přitom $\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \cos \varphi_{ij} = 0$, $\sigma_i > 0$; rovněž $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j \cos \varphi'_{ij} \leqq 0$, $\sum_{i,j} \sigma'_i \sigma'_j \cos \varphi'_{ij} = 0$, $\sigma'_i > 0$. Platí proto také $\sum_{i,j} \xi_i \xi_j (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) \leqq 0$. Speciálně

$$\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) = 2(\cos \varphi'_{12} - \cos \varphi_{12})\, \sigma_1 \sigma_2 \leqq 0,$$

t. j. $\cos \varphi_{12} \geqq \cos \varphi'_{12}$, a obdobně $\sum_{i,j} \sigma_i' \sigma_j' (\cos \varphi_{ij} + \cos \varphi'_{ij}) = 2(\cos \varphi_{12} - \cos \varphi'_{12})\, \sigma'_1 \sigma'_2 \leqq 0$, t. j. $\cos \varphi_{12} \leqq \cos \varphi'_{12}$, $\varphi_{12} = \varphi'_{12}$, což je spor. Plyne tedy z $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$ pro $i + j > 3$, že také $\varphi_{12} = \varphi'_{12}$. Protože přečíslováním vždy můžeme dosáhnout toho, že zbylý úhel je $\varphi_{12}$, je tím věta dokázána.

**Věta 8.** *Dva simplexy v $E_n$, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikosti jedné hrany*) a ve velikostech $N - 1$ vnitřních úhlů.*

Důkaz. Podle věty 7 jsou všechny odpovídající si vnitřní úhly obou simplexů rovny, t. j.

$$\varphi_{ij} = \varphi'_{ij},\quad i, j = 1, 2, \ldots, n + 1\,;$$

nechť dále $e_{12} = e'_{12}$.

Vzhledem k (4,2) a (4,5) platí

$$\frac{g_{ij}}{\sqrt{\gamma g_{ii}}\sqrt{\gamma g_{jj}}} = \frac{g'_{ij}}{\sqrt{\gamma g'_{ii}}\sqrt{\gamma g'_{jj}}}\,.$$

Poněvadž podle (4,3) a (4,5) jsou $g_{ii}$ a $g'_{ii}$ téhož znamení, existují kladná čísla $\sigma_i$, $i = 1, \ldots, n + 1$, tak, že $g_{ii} = \sigma_i^2 g'_{ii}$. Vzhledem k předchozímu vztahu je pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$

$$g_{ij} = \sigma_i \sigma_j g'_{ij}\,.$$

*) Ve formulacích vět 8, 9, 10 vynecháváme pro stručnost označení simplexů a rčení „které si odpovídají".

Avšak podle (2,15d) je $\sum_j g_{ij} = 0$, tedy $\sum_j g'_{ij}\sigma_j = 0$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$; proto je $\sum_{i,j=1}^{n+1} g_{ij}\sigma_i\sigma_j = 0$. Vzhledem k (3,9) nemůže v barycentrických souřadnicích čárkovaného simplexu existovat vlastní nadrovina $\Sigma\sigma_i x_i = 0$, je tedy $\sigma_i = \sigma$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$, t. j.

$$g_{ij} = \sigma^2 g'_{ij}\,. \tag{4,21}$$

Užijeme teď této věty z theorie determinantů*):

Je-li $|a_{ij}|$ nenulový determinant $n$-tého řádu, $|A_{ij}|$ determinant vytvořený z doplňků jeho prvků, pak každý subdeterminant $m$-tého řádu, $1 \leqq m \leqq n$ determinantu $|A_{ij}|$ je až na nenulový faktor (na volbě tohoto subdeterminantu nezávislý) roven doplňku stejnolehlého subdeterminantu v determinantu $|a_{ij}|$.

V našem případě je $|g_{rs}|$ skutečně determinant doplňků nenulového determinantu $|e_{rs}|$, takže (pro $m = n - 1$) platí pro $i \neq j$ a $\lambda \neq 0$ (podle 2,13)

$$\lambda \begin{vmatrix} e_{00}, & e_{0i}, & e_{0j} \\ e_{0i}, & e_{ii}, & e_{ij} \\ e_{0j}, & e_{ij}, & e_{jj} \end{vmatrix} = 2\lambda e_{ij} = |g_{rs}|_{\substack{r\neq 0,i,j \\ s\neq 0,i,j}} = |g_{kl}|_{\substack{k\neq i,j \\ l\neq i,j}}\,. \tag{4,22}$$

Obdobně pro $\lambda' \neq 0$

$$2\lambda' e'_{ij} = |g'_{kl}|_{\substack{k\neq i,j \\ l\neq i,j}}\,, \tag{4,22'}$$

takže vzhledem k (4,21) a (4,22)

$$2\lambda e_{ij} = \sigma^{2(n-1)}\,|g'_{kl}|_{\substack{k\neq i,j \\ l\neq i,j}} = 2\lambda'\sigma^{2(n-1)}e'_{ij}\,.$$

Poněvadž podle předpokladu je $e_{12} = e'_{12}$, je $2\lambda = 2\lambda'\sigma^{2(n-1)}$ a $e_{ij} = e'_{ij}$ pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$. Podle věty 3 jsou tedy oba simplexy shodné.

**Věta 9.** *Dva simplexy v $E_n$, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikostech všech hran s jedním společným vrcholem a ve vzájemných vnitřních úhlech všech stěn, které procházejí tímto vrcholem.*

Důkaz. Nechť uvedený vrchol je $O_{n+1}$, takže platí $e_{i,n+1} = e'_{i,n+1}$, $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom podle (4,22) a (4,2) je pro $\lambda \neq 0$ a $i < n + 1$

$$2\lambda e_{i,n+1} = (-\gamma)^{n-1}\Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} g_{jj}\Big)|\cos\varphi_{kl}|_{\substack{k\neq i,\,n+1 \\ l\neq i,\,n+1}}$$

a obdobně pro čárkovaný simplex; srovnáním plyne pro $i = 1, \ldots, n$

$$g_{ii} = \sigma g'_{ii}\,, \quad \sigma > 0\,,$$

takže ze (4,2) pro $i, j = 1, \ldots, n$

$$g_{ij} = \sigma g'_{ij}\,.$$

*) *B. Bydžovský*: Úvod do theorie determinantů, Praha 1947, str. 129.

Vzhledem k (2,15d) však platí také

$$g_{i,n+1} = \sigma g'_{i,n+1} \quad \text{a} \quad g_{n+1,n+1} = \sigma g'_{n+1,n+1} \,.$$

Podle (4,2) je tedy $\varphi_{ij} = \varphi'_{ij}$ pro $i, j = 1, \ldots, n + 1$, a protože $e_{1,n+1} = e'_{1,n+1}$, jsou podle věty 9 oba simplexy shodné.

**Věta 10.** *Dva simplexy v $E_n$, $n \geqq 2$, jsou shodné, shodují-li se ve velikostech všech hran v jedné stěně a ve všech vnitřních úhlech k této stěně přilehlých.*

Důkaz. Je-li uvedená stěna $\omega_{n+1}$, platí tedy

$$e_{ij} = e'_{ij}, \quad \varphi_{i,n+1} = \varphi'_{i,n+1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Je předně

$$g_{n+1,n+1} = |e_{rs}|_{\substack{r \neq n+1 \\ s \neq n+1}} = |e'_{rs}|_{\substack{r \neq n+1 \\ s \neq n+1}} = g'_{n+1,n+1} \,,$$

takže z (4,2)

$$\frac{g_{i,n+1}}{\sqrt{\gamma g_{ii}}} = \frac{g'_{i,n+1}}{\sqrt{\gamma g'_{ii}}} \,.$$

Pro $i = 1, \ldots, n$ existují kladná čísla $\sigma_i$ tak, že

$$g_{ii} = \sigma_i^2 g'_{ii} \,; \tag{4,23}$$

podle předchozí rovnice je tedy

$$g_{i,n+1} = \sigma_i g'_{i,n+1} \,. \tag{4,24}$$

Užijeme-li opět uvedené věty z theorie determinantů, platí pro $i, j = 1, \ldots, n$ a $\lambda \neq 0$

$$\begin{vmatrix} g_{ij}, & g_{i,n+1} \\ g_{i,n+1}, & g_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \lambda |e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq j,\, n+1}} \,, \tag{4,25}$$

a obdobně pro čárkovaný simplex. Podle (4,23), (4,24) a (4,25) pro $i = j$

$$\lambda |e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} = \sigma_i^2 \begin{vmatrix} g'_{ii}, & g'_{i,n+1} \\ g'_{i,n+1}, & g'_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \lambda' \sigma_i^2 |e'_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} = \lambda' \sigma_i^2 |e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} \,.$$

Je (jako za rovnicí (4,2)) $g_{ii} g_{n+1,n+1} - g_{i,n+1}^2 \neq 0$, tedy $|e_{rs}|_{\substack{r \neq i,\, n+1 \\ s \neq i,\, n+1}} \neq 0$, a proto $\sigma_i^2 = \frac{\lambda}{\lambda'} = \sigma^2$, $\sigma_i = \sigma$. Podle (2,15d) a (4,24) však platí $0 = \sum_{i=1}^{n+1} g_{i,n+1} = \sigma \sum_{i=1}^{n} g'_{i,n+1} + g'_{n+1,n+1} = (1 - \sigma) \, g'_{n+1,n+1}$, takže $\sigma = 1$, celkem pro $i = 1, \ldots, n$

$$\sigma_i = 1 \quad \text{a} \quad \lambda = \lambda' \,.$$

Vzhledem k těmto vztahům plyne z (4,25) a analogické rovnice pro čárkovaný simplex, že i pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$g_{ij} = g'_{ij} \,;$$

oba simplexy se tedy shodují ve všech vnitřních úhlech a alespoň v jedné hraně, a proto jsou podle věty 8 shodné.

V dalších větách ještě najdeme minimální počet a rozložení ostrých vnitřních úhlů v simplexu. Nejprve nazveme dva simplexy v $E_n$ (stručně $n$-simplexy) *úhlově ekvivalentní*, jsou-li odpovídající si úhly $\varphi_{ij}$ a $\varphi'_{ij}$ vždy současně ostré, pravé nebo tupé. Vzhledem k této ekvivalenci se všechny $n$-simplexy rozpadají na konečně mnoho tříd, a to méně než $3^N \left(N = \binom{n+1}{2}\right)$; není totiž na př. možné, aby simplex měl všechny vnitřní úhly pravé (plyne z věty 6). V následující větě je (v terminologii theorie grafů)*) uvedena nutná a postačující podmínka pro to, aby taková třída simplexů byla neprázdná.

**Věta 11.** *Nutná a postačující podmínka, aby existoval n-simplex, je-li o všech jeho vnitřních úhlech předepsáno, které jsou ostré, které pravé a které tupé, je: graf, který má $n+1$ uzlů — označíme je $1, 2, \ldots, n+1$ — a právě ty hrany $ij$, pro které je předepsáno, že úhly $\varphi_{ij}$ jsou ostré, je souvislý.***)

Důkaz. Nechť je předně dán $n$-simplex a předpokládejme, že příslušný graf není souvislý. To znamená, že množinu indexů $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ lze rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny indexů $M_1$ a $M_2$ tak, že v příslušném grafu žádná hrana nespojuje uzel s číslem z $M_1$ s uzlem s číslem z $M_2$, t. j. $\varphi_{\alpha\beta} \geqq \frac{1}{2}\pi$ pro $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$. Je tedy podle (4,2) v obvyklém označení $\gamma g_{\alpha\beta} \geqq 0$ pro $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$, a proto

$$\sum_{\substack{\alpha \in M_1 \\ \beta \in M_2}} \gamma g_{\alpha\beta} \geqq 0 .$$

Avšak podle (2,15d) je

$$\sum_{\substack{\alpha \in M_1 \\ \beta \in M_2}} \gamma g_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha,\delta \in M_1} \gamma g_{\alpha\delta} ,$$

takže

$$\gamma \sum_{\alpha,\delta \in M_1} g_{\alpha\delta} \leqq 0 . \tag{4,26}$$

Označíme-li však $\varkappa$ nadrovinu o rovnici $\varkappa \equiv \sum_{i \in M_1} x_i = 0$ v barycentrických souřadnicích, je to ($M_1$ i $M_2$ jsou neprázdné) vlastní nadrovina, takže podle (3,9) platí $\gamma \sum_{\alpha,\delta \in M_1} g_{\alpha\delta} > 0$, což je spor s (4,26).

Nechť obráceně je předepsáno, že z dvojic indexů $D = \{(1, 2), (1, 3), \ldots, (n, n+1)\}$ mají být ty úhly simplexu, které mají indexy z $D_0$, ostré, úhly s indexy z $D_1$ pravé a s indexy z $D_2$ tupé, kde $D_0$, $D_1$ a $D_2$ tvoří disjunktní rozklad množiny $D$; nechť je přitom pro příslušný graf splněna podmínka věty.

*) Na př. *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

**) Nesmí tedy také být žádný uzel isolován.

Potom kvadratická forma

$$f \equiv \sum_{(i,j)\in D_0} (\xi_i - \xi_j)^2$$

je nezáporná a nabývá hodnoty nula jen pro $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n+1}$, což snadno plyne ze souvislosti grafu. Hlavní minory matice příslušné této kvadratické formě jsou až do $n$-tého řádu včetně kladné (a její determinant je roven nule). Existuje tedy kladné číslo $\varepsilon$ tak, že také forma

$$f^* \equiv f - \varepsilon \sum_{(i,j)\in D_2} (\xi_i - \xi_j)^2 \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} v_{ij}\xi_i\xi_j$$

má uvedenou vlastnost, t. j. je nezáporná a rovna nule jen pro $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n+1}$. Pro $\cos \varphi_{ij} = \frac{-v_{ij}}{\sqrt{v_{ii}v_{jj}}}$ existuje podle věty 6 simplex, který má úhly $\varphi_{ij}$ vyhovující podmínce věty. Tím je důkaz proveden.

Poněvadž souvislý graf o $m$ uzlech má alespoň $m - 1$ hran, a přitom existují grafy o $m - 1$ hranách (t. zv. stromy), plyne odtud ihned věta:

**Věta 12.** *Každý n-simplex má alespoň n ostrých vnitřních úhlů. Existují n-simplexy, které mají právě n ostrých vnitřních úhlů (a zbylé úhly tupé nebo pravé).*

**Věta 13.** *Z vnitřních úhlů přilehlých k jedné stěně simplexu je alespoň jeden ostrý.*

Důkaz. Kdyby žádný z těchto úhlů nebyl ostrý, byl by příslušný uzel v grafu isolován.

Ještě si zavedeme tuto definici, která zobecňuje pojem pravoúhlého trojúhelníka:

Definice. *Takový n-simplex, který má právě n ostrých vnitřních úhlů a všechny ostatní (t. j. $\binom{n}{2}$) vnitřní úhly pravé, nazveme pravoúhlý.*

Z věty 12 plyne existence pravoúhlých simplexů. Je jich pro $n > 2$ více typů, z nichž některé budeme studovat později.

**5. Koule.** Nazveme $(m - 1)$-koulí (podle AG) množinu bodů v $E_m$ této vlastnosti: existuje bod $S$ v $E_m$ a kladné číslo $r$ tak, že tato množina je totožná s množinou bodů v $E_m$, které mají od bodu $S$ vzdálenost $r$ (bod $S$ je střed a $r$ poloměr této $(m - 1)$-koule).

Ve větě 14 popíšeme strukturu všech $(n - 1)$-koulí v našem $E_n$ v barycentrických souřadnicích vzhledem k danému simplexu o hranách $\sqrt{e_{ij}}$:

**Věta 14.** *V $E_n$ má $(n - 1)$-koule v barycentrických souřadnicích tvar*

$$\alpha_0(exx) - 2\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0\,, \qquad (5,1)$$

*kde*

$$\alpha_0 \neq 0 \tag{5,2}$$

*a*

$$\gamma \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s > 0\,. \tag{5,3}$$

*Obráceně, každá množina s vlastností* (5,1), (5,2), (5,3) *je koule o středu* $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$,

$$s_i = \sum_{r=0}^{n+1} g_{ir}\alpha_r \tag{5,4}$$

*a poloměru*

$$r = \sqrt{-\frac{\sum\limits_{0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s}{2\Delta\alpha_0^2}}\,. \tag{5,5}$$

**Důkaz.** Budiž dána $(n-1)$-koule, t. j. existuje vlastní $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$ a $r > 0$ tak, že $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ leží na této kouli právě tehdy, je-li

$$-\frac{(exx)}{2(\sum\limits_i x_i)^2} + \frac{(esx)}{\Sigma s_i\, \Sigma x_i} - \frac{(ess)}{2(\Sigma s_i)^2} - r^2 = 0$$

čili platí-li $2(\sum\limits_i s_i)^2(exx) - 2\sum\limits_i x_i[2(esx)\,\Sigma s_i - (ess)\,\Sigma x_i - 2r^2(\Sigma s_i)^2\,\Sigma x_i] = 0$, tedy (5,1), kde $\alpha_0 = 2(\Sigma s_i)^2 \neq 0$, $\alpha_k = 2\sum\limits_i s_i \sum\limits_i e_{ik}s_i - (ess) - 2r^2(\Sigma s_i)^2$. Je proto podle (2,15)

$$\sum_{r=0}^{n+1} g_{kr}\alpha_r = 2\Delta\, s_k \sum_i s_i = \frac{\Delta}{\sum\limits_i s_i}\alpha_0 s_k\,, \quad k = 1, \ldots, n+1\,, \tag{5,6}$$

$$\sum_{r=0}^{n+1} g_{0r}\alpha_r = -\Delta[(ess) + 2r^2(\Sigma s_i)^2] = -\frac{\Delta}{2(\Sigma s_i)^2}[(ess) + 2r^2(\Sigma s_i)^2]\,\alpha_0\,. \tag{5,7}$$

Odtud $\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s = -4\Delta\alpha_0 r^2(\Sigma s_i)^2 = -2\Delta\alpha_0^2 r^2$, takže podle (3,8) skutečně platí (5,3).

Je-li obráceně dána množina bodů vyhovujících (5,1), (5,2) a (5,3), potom levé strany rovnic (5,6) nejsou vesměs rovny nule, neboť jejich součet je podle (2,15a) a (2,15d) roven $\Delta\alpha_0 \neq 0$. Položme

$$s_k = \sum_{r=0}^{n+1} g_{kr}\alpha_r\,, \quad k = 1, \ldots, n+1\,,$$

takže $\sum\limits_i s_i = \Delta\alpha_0$; bod $S = (s_1, \ldots, s_{n+1})$ je tedy vlastní.

Dále číslo $-\dfrac{\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s}{2\Delta\alpha_0^2}$ existuje a je kladné, jeho odmocnina $r$ a bod $S$

mají už vlastnost, že $(n-1)$-koule o středu $S$ a poloměru $r$ je totožná s danou množinou, jak plyne ihned výpočtem.

Poznámka I. Vztah (5,1) vznikne eliminací $x_0$ z

$$\sum_{r,s=0}^{n+1} e_{rs}x_rx_s = 0\,, \quad \sum_{r=0}^{n+1} \alpha_r x_r = 0\,. \tag{5,8}$$

Poznámka II. Věta 14 nás opravňuje přiřadit každé $(n-1)$-kouli v $E_n$ uspořádanou $(n+2)$-tici homogenních souřadnic $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, pro niž platí (5,2), (5,3) a naopak.

**Věta 15.** *Nechť* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ *a* $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ *jsou dvě* $(n-1)$*-koule, které mají společný vlastní bod* $Y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$. *Potom tečné nadroviny k oběma* $(n-1)$*-koulím v bodě* $Y$ *svírají úhel* $\varphi$, *pro který je*

$$\cos^2\varphi = \frac{\left(\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\beta_s\right)^2}{\left(\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s\right)\left(\sum\limits_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\beta_r\beta_s\right)}\,, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{5,9}$$

Důkaz. Tečná nadrovina v $Y$ k $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ má rovnici

$$\Sigma\alpha_i' x_i \equiv \alpha_0(exy) - \Sigma x_i\,\Sigma\alpha_i y_i - \Sigma y_i\,\Sigma\alpha_i x_i = 0\,.$$

Podle (2,15a, b, c, d) je $\sum\limits_{i=1}^{n+1} g_{ik}\alpha_i' = \Delta\alpha_0 y_k - \Sigma y_i \sum\limits_{r=0}^{n+1} g_{kr}\alpha_r$, takže (při obdobně nalezené tečné nadrovině $\Sigma\beta_i' x_i = 0$) platí

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik}\alpha_i'\beta_k' = (\Sigma y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\beta_s\,,$$

obdobně

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik}\alpha_i'\alpha_k' = (\sum_i y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s\,, \quad \sum_{i,k=1}^{n+1} g_{ik}\beta_i'\beta_k' = (\sum_i y_i)^2 \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\beta_r\beta_s\,,$$

takže z (3,6) plyne (5,9).

Poznámka I. Úhel $\varphi$ nezávisí na bodu $Y$, alespoň v tom smyslu, že je-li $\bar{Y}$ jiný společný bod obou $(n-1)$-koulí, je úhel příslušných tečných nadrovin opět $\varphi$. Můžeme tedy pro některé dvojice koulí definovat úhel vztahem (5,9).

Poznámka II. Kdybychom hledali úhel nadroviny a tečné nadroviny $(n-1)$-koule, postupovali bychom obdobně a výsledek by byl opět (5,9), kde $\alpha_0 = 0$. Že (5,9) platí (pro $\alpha_0 = \beta_0 = 0$) i pro úhel dvou nadrovin, plyne z (3,6). Můžeme tedy ztotožnit nadroviny $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$ a $(n+2)$-tice $(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$. Jako v AG II můžeme prostě prohlásit kvadriku o rovnici (5,1) za $(n-1)$-

sféru, kdykoliv $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}$ jsou reálná čísla, ne vesměs rovná nule, a klasifikovat tyto sféry ($[g\alpha\alpha] = \sum_{r,s=0}^{n+1} g_{rs}\alpha_r\alpha_s$):

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 \neq 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] > 0 \ \ldots\ (n-1)\text{-koule},\\
&\alpha_0 \neq 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] = 0 \ \ldots\ \text{bodová } (n-1)\text{-sféra},\\
&\alpha_0 \neq 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] < 0 \ \ldots\ \text{formálně reálná sféra},\\
&\alpha_0 = 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] > 0 \ \ldots\ \text{planární sféra},\\
&\alpha_0 = 0,\ \gamma[g\alpha\alpha] = 0 \ \ldots\ \text{(dvojnásobná) nevlastní nadrovina.}
\end{aligned}
$$

Poznámka III. Pro úplnost uvedeme jednoduché vzorce pro střed a poloměr (pokud existují) průsečné sféry lineárně nezávislých sfér $(\alpha)$, $(\beta)$, ..., $(\delta)$: Pro střed $S = (s_i)$ a poloměr $r$ platí

$$
s_i = \begin{vmatrix}
0, & \alpha_0, & \beta_0, & \ldots, & \delta_0 \\
\sum_r g_{ir}\alpha_r, & [g\alpha\alpha], & [g\alpha\beta], & \ldots, & [g\alpha\delta] \\
\sum_r g_{ir}\beta_r, & [g\beta\alpha], & [g\beta\beta], & \ldots, & [g\beta\delta] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sum_r g_{ir}\delta_r, & [g\delta\alpha], & [g\delta\beta], & \ldots, & [g\delta\delta]
\end{vmatrix}, \qquad (5,10)
$$

$$
r^2 = \frac{\begin{vmatrix}
[g\alpha\alpha], & [g\alpha\beta], & \ldots, & [g\alpha\delta] \\
[g\beta\alpha], & [g\beta\beta], & \ldots, & [g\beta\delta] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
[g\delta\alpha], & [g\delta\beta], & \ldots, & [g\delta\delta]
\end{vmatrix}}{2\Delta \begin{vmatrix}
0, & \alpha_0, & \beta_0, & \ldots, & \delta_0 \\
\alpha_0, & [g\alpha\alpha], & [g\alpha\beta], & \ldots, & [g\alpha\delta] \\
\beta_0, & [g\beta\alpha], & [g\beta\beta], & \ldots, & [g\beta\delta] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\delta_0, & [g\delta\alpha], & [g\delta\beta], & \ldots, & [g\delta\delta]
\end{vmatrix}}, \qquad (5,11)
$$

pokud ovšem zlomek v (5,11) má smysl a pokud nejsou $s_i$ vesměs rovna nule.


## Резюме.

## ГЕОМЕТРИЯ СИМПЛЕКСА В $E_n$ (первая часть)

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага.

(Поступило в редакцию 25/XI 1953 г.)

В работе изучаются симплексы в евклидовом пространстве. Приводятся теоремы о существовании и однозначности симплекса (с точностью до тождественных симплексов) при данных величинах некоторых ребер и неко-

торых внутренних углов между гранями. Основная теорема существования формулируется так:

*Необходимое и достаточное условие для того, чтобы в $E_n$ существовал симплекс $O_1, \ldots, O_{n+1}$ такой, что квадраты длин его ребер равны данным действительным числам $e_{ij}$:*

$$\varrho^2(O_i, O_j) = e_{ij}\ , \quad e_{ij} = e_{ji}\ , \quad e_{ii} = 0\ , \quad i, j = 1, \ldots, n + 1\ ,$$

следующее: *квадратическая форма*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j < 0$$

*для каждой ненулевой системы действительных чисел $x_1, \ldots, x_{n+1}$ такой, что* $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$.

В дальнейшем строится аналитический аппарат, используемый во второй части (при помощи барицентрических координат). Помимо других проблем решается также следующая:

*При каких обстоятельствах существует $n$-симплекс, если предписано, какие внутренние углы являются острыми, какие прямыми и какие тупыми?*

Решение можно просто сформулировать, пользуясь терминологией, заимствованной из теории графов:

*Такой $n$-симплекс существует тогда и только тогда, если граф, имеющий $n + 1$ узлов $1, 2, \ldots, n + 1$ и как раз те ребра $ij$, для которых внутренний угол $\varphi_{ij}$ является острым, будет связным.*

Отсюда непосредственно вытекает, что в каждом $n$-симплексе по крайней мере $n$ внутренних углов являются острыми. Существуют симплексы, у которых как раз $n$ внутренних углов являются острыми, а все остальные — прямые. Такие симплексы называются *прямоугольными.*

В заключение приводятся формулы для радиусов, центров и углов пересечения $(m - 1)$-сфер пересечения в $E_n$ в виде подготовки для дальнейших частей.


## Summary

### GEOMETRY OF THE SIMPLEX IN $E_n$ ($1^{st}$ part)

MIROSLAV FIEDLER, Prague.

(Received November 25, 1953.)

In the paper simplexes in Euclidean spaces are studied. Some theorems are proved concerning the existence and unicity of a simplex (omitting congruent simplexes) when the lengths of some edges and the sizes of some (interior)

angles of the faces are given. The main existence theorem is formulated in the following way:

*The necessary and sufficient condition for the existence of a simplex in $E_n$ such that the squares of the lengths of its edges $O_iO_j$ ($O_i$ are the vertices) are equal to given numbers $e_{ij}$ ($e_{ij} = e_{ji}$, $e_{ii} = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$) is: the quadratic form*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j < 0$$

*for any non-zero system of real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$,* such that

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 .$$

Further the apparatus (by means of barycentric coordinates) for the use in the second part is built up and the following problem is solved: What are the conditions for the existence of a simplex in $E_n$ when prescribed which of the angles of the faces are acute, which right and which obtuse.

The answer can be simply formulated in the terminology of the theory of graphs:

*The necessary and sufficient condition for the existence of such simplex is that the graph with $n + 1$ nodes $1, 2, \ldots, n + 1$ and with those edges $ij$ for which the angle $\varphi_{ij}$ has to be acute, be connected.*

It follows that for every $n$-simplex at least $n$ angles are acute. There exist simplexes in $E_n$ with exactly $n$ acute angles and all remaining angles right. Such simplexes are called *rectangular* and some types (for $n > 2$) will be studied in the further parts.

Finally formulae for the radii and centres of the intersection spheres in barycentric coordinates are given.