JEDNODUCHÝ DŮKAZ VĚT SPOJENÝCH S VĚTOU PELZOVOU

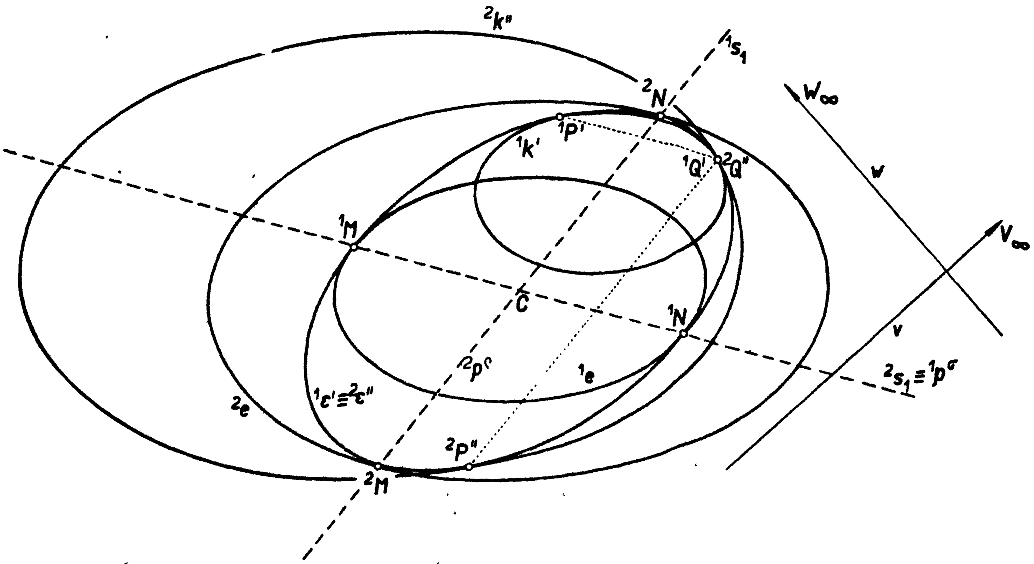
FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, Praha.

(Došlo dne 17. prosince 1953.)

DT: 513.565
513.511.6

Profesor *Karel Pelz* ve svých pojednáních: „Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades“ a „Ergänzung zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades“ uveřejněných ve Zprávách o zasedání II. třídy vídeňské Akademie věd z r. 1877 a 1878 ukázal, že průměty rovinných řezů plochy druhého stupně, které se promítají do homothetických kuželoseček, mají ohniska, která vyplňují dvě s obrysem uvažované plochy druhého stupně konfokální kuželosečky. Věty Pelzovy vedou k planimetrickým větám o kuželosečkách, které se dvakrát dané kuželosečky dotýkají a jsou mezi sebou homothetické. *Karel Havlíček* v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LXX z r. 1941, ukázal, že věty planimetrické jsou širší. Důkaz vedl cestou projektivní geometrie v rovině. Výsledky získané K. Havlíčkem je možno prokázati i jednoduchým pochodem prostorovým.

Zvolme v obraze středovou kuželosečku, elipsu ${}^1\varepsilon'$ v průmětně π. Kolmé průměty na tuto průmětnu budeme v dalším označovati připojeným ukazatelem 1. S touto elipsou sestrojme soustřednou elipsu ${}^1e$, dotýkající se křivky ${}^1\varepsilon'$ v koncových bodech ${}^1M, {}^1N$ průměru ${}^1p^\sigma$. Křivku ${}^1e$ můžeme pokládat za hlavní řez trojosého elipsoidu ${}^1\lambda$, který se kosoúhle promítne do průmětny π tak, že ${}^1\varepsilon'$ bude obrysem průmětu plochy ${}^1\lambda$. Osa elipsoidu kolmá k průmětně π promítá se do ní do průměru ${}^2M\,{}^2N$ sdruženého k průměru ${}^1M\,{}^1N$ a rovnoběžné řezy plochy ${}^1\lambda$ s průmětnou π dají v kosoúhlém průmětu kuželosečky, které jsou homothetické s ${}^1e$ a dotknou se kuželosečky ${}^1\varepsilon'$ vždy ve dvou bodech reálných či imaginárních sdružených. Tětiva spojující příslušné dotykové body je rovnoběžná s průměrem ${}^1M\,{}^1N$. Tak na př. řez ${}^1k$ rovnoběžný s průmětnou π promítá se do elipsy ${}^1k'$ a spojnice dotykových bodů ${}^1P'$, ${}^1Q'$ s elipsou ${}^1\varepsilon'$ je rovnoběžná s ${}^1M\,{}^1N$. Že tak musí býti, plyne z toho, že body ${}^1P$, ${}^1Q$ jsou body vlastního obrysu plochy ${}^1\lambda$ pro uvažované kosoúhlé promítání, položené v rovině σ, která jde body ${}^1M$, ${}^1N$ a má v jejich spojnici, přímce ${}^1p^\sigma$, svou stopu na π. S ní jsou rovnoběžné hlavní přímky ${}^1P\,{}^1Q, \ldots$ v rovinách rovnoběžných s π a nesoucích homothetické řezy elipsoidu. Opíšeme-li ploše ${}^1\lambda$ válcové plochy ze dvou úběžných bodů V_∞, W_∞ roviny π, protnou se tyto plochy, jakožto opsané téže ploše druhého stupně ${}^1\lambda$, ve dvou kuželosečkách, které budou procházeti průsečnými body tečen k řezům ${}^1e$, ${}^1k$ ... plochy ${}^1\lambda$ rovnoběžným s π a k těmto řezům body V_∞, W_∞ vedeným. Kosoúhlé průměty těchto křivek musí se dotýkati obrysů obou opsaných válcových ploch, které se též musí dotýkati obrysu ${}^1\varepsilon'$ plochy ${}^1\lambda$. Nahradíme-li body V_∞, W_∞ úběžnými kruhovými body průmětny π, budou průsečíky tečen vedených ke kuželosečkám ${}^1e$, ${}^1k$ ... ohniska těchto křivek a jejich kosoúhlé průměty v uvažovaném směru ohniska křivek ${}^1e$, ${}^1k'$ ...



Tato ohniska vyplní dvě kuželosečky, které s obrysem ${}^1\varepsilon'$ musí přináležeti téže řadě kuželoseček a jsou proto s obrysem ${}^1\varepsilon'$ konfokální. Z toho je zřejma Pelzova věta.

Křivku ${}^1\varepsilon'$ můžeme však pokládat též za obrys ${}^2\varepsilon''$ kosoúhlého průmětu jednoplášťového zborceného hyperboloidu ${}^2\lambda$, jehož hlavním řezem položeným v průmětně π je elipsa ${}^2e$, homotetická ke křivce ${}^1e$ a dotýkající se křivky ${}^1\varepsilon' \equiv {}^2\varepsilon''$ v bodech ${}^2M$, ${}^2N$, které omezují v ${}^1\varepsilon' \equiv {}^2\varepsilon''$ sdružený průměr k průměru ${}^1M, {}^1N$. Směr zde uvažovaného kosoúhlého promítání ${}^2s$ je položen v rovině kolmé k π a jdoucí stopou roviny σ, t. j. průměrem ${}^1M, {}^1N$ křivky ${}^2\varepsilon''$. Tato křivka se tu jeví jako obálka kosoúhlých průmětů řezů hyperboloidu ${}^2\lambda$ s průmětnou π rovnoběžných. Je to průmět kosoúhlých průmětů řezů plochy ${}^2\lambda$, který je položen v rovině ϱ o stopě ${}^2p^\varrho$, totožné s ${}^2M{}^2N$, a s ní jsou rovnoběžné dotykové tětivy křivek ${}^2e$, ${}^2k''$ ..., homothetických kuželoseček, které se rovněž dotýkají dvakrát křivky ${}^2\varepsilon'' \equiv {}^1\varepsilon'$. Také pro kosoúhlé průměty těchto křivek platí to, co bylo uvedeno u elipsoidu prve uvažovaného.

Z uvedené úvahy, kterou můžeme opětovati pro elipsu i pro homothetické jí se dvakráte dotýkající hyperboly a paraboly a pro hyperbolu, použijeme-li zborceného dvojplášťového hyperboloidu, vyplývá věta, kterou v její úplnosti vyslovil K. HAVLÍČEK: Při středové kuželosečce tvoří homothetické kuželosečky, které se jí dvakrát dotýkají, dvě skupiny křivek. Dotykové tětivy jedné skupiny jsou navzájem rovnoběžné a stejně jsou mezi sebou rovnoběžné i dotykové tětivy druhé skupiny. Směry těchto tětiv jsou rovnoběžné s dvojinou sdružených průměrů dané středové kuželosečky. Ohniska uvažovaných homothetických kuželoseček vyplňují čtyři, s danou středovou kuželosečkou konfokální kuželosečky.

Je-li křivka, z níž vycházíme, parabola, můžeme k řešení použít jen paraboloidy. Křivky homothetické, dvakrát se dané paraboly dotýkající, mohou býti buď elipsy nebo hyperboly anebo mezi sebou shodné paraboly o rovnoběžných osách.