Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

STUDIE O KONOIDU 5. STUPNĚ VYTVOŘENÉM VRCHOLY HYPERBOLICKÝCH PARABOLOIDŮ JDOUCÍCH DVĚMA KOLMÝMI MIMOBĚŽKAMI

VLADIMÍR MAŠEK, Brno.

(Došlo dne 28. dubna 1953.) 513.627.24

V tomto článku se budeme zabývati studiem rovinných řezů konoidu 5. stupně vytvořeného vrcholy všech ∞^2 hyperbolických paraboloidů obsažených v lineární kongruenci stanovené dvěma kolmými mimoběžkami a, b. Pro některé zvláštní polohy roviny sečné uvedeme některé vlastnosti průsečných křivek plynoucí jak z jejich vytvoření, tak z příslušných rovnic.

1. Volme dvě kolmé mimoběžky a, b tak (obr. 1), aby prvá byla totožná s osou x a druhá stála kolmo k π ve vzdálenosti $y = -2r$ od osy x. Osa o mimoběžek a, b leží v π a protíná je v bodech A a B. Geometrickým místem vrcholů ∞^2 hyperbolických paraboloidů obsažených v lineární kongruenci stanovené mimoběžkami a a b jest konoid 5. st.[1]) Označme jej K^5. Osou konoidu jest osa o mimoběžek a, b a rovina k ní kolmá jest jeho rovinou řídicí.

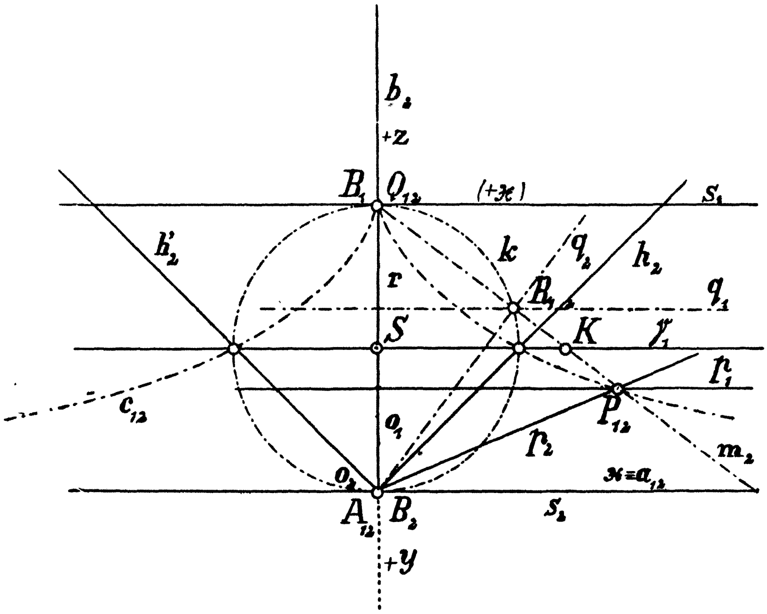
Rovina totožnosti, jdoucí mimoběžkou a, protíná konoid K^5 ještě v křivce afinní ku cisoidě Diokletově, jejímž průmětem do roviny půdorysné i nárysné je cisoida Diokletova c_{12} o základní kružnici k opsané nad průměrem $\overline{A_1B_1}$ a základní přímce $a \equiv x$. Přímky rovnoběžné s nárysnou, které protínají osu o a křivku c 3. stupně, vytvoří plochu 6. stupně, která se rozpadá v konoid K^5 a průmětnu π.

Označme Q průsečík přímky b s rovinou totožnosti a vytkněme na libovolném paprsku m protínajícím křivku c a jdoucím bodem Q její průsečík P s křivkou c a přímku p konoidu jím procházející ($p_1 \| x$; $p_2 \equiv P_1A_{12}$).

[1]) *Rasche:* „Untersuchung der Flächen zweiten Grades, welche durch zwei Windschiefe Gerade gehen" (Padeborn 1882). — *J. Klobouček:* „Methodické poznámky ku theorii komplexu A^2" (Rozpravy české akademie, 1905). — *J. Klobouček:* „O komplexu os ploch 2. st., které procházejí dvěma reál. mimoběžkami", XXX. roč. Zpráva reálky v Karlíně. — *J. Šimandl:* „O určitém konoidu st. 5", Čas. mat. a fys., roč. XLII. — *M. Lerch:* „Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danými mimoběžkami a útvarech přilehlých", Časopis mat. roč. XLVI. — *Vladimír Mašek:* „Poznámky ku ploše naplněné vrcholy hyperbolických paraboloidů procházejících dvěma kolmými mimoběžkami". Jubilejní vědecký Sborník české vysoké školy technické v Brně, 1924.

Uvažujme Plückerův konoid definovaný jako geometrické místo přímek protínajících kolmo osu daných mimoběžek a libovolnou jejich příčku.

Přímku konoidu Plückerova protínající kolmo zvolenou příčku m mimoběžek a, b a jejich osu o označme q . ($q_2 \perp m_2$; $q_1 \parallel x$). Bod S rozpolující vzdálenost $\overline{A_1B_1}$ na ose o je středem konoidu K^5. Jím procházející řídicí rovinu γ kolmo k o jmenujme rovinou středovou. K sobě kolmé přímky konoidu ležící



Obr. 1.

v rovině středové označme h a h'. Je-li R bod Plückerova konoidu na příčce m a K průsečík paprsku m s rovinou středovou γ, platí $\overline{R_{12}K} = \overline{KP_{12}}$. Jest tudíž z obrazce přímo patrno, že konoid K^5 a přidružený konoid Plückerův jsou plochy zborceně symetrické vzhledem k rovině středové γ, jakožto roviny zborcené symetrie, a přímkám a, b jako osám.

Pro konstrukci povrchových přímek konoidu bylo výhodné položiti jeho řídicí křivku c do roviny totožnosti. Pro úvahy analytické je výhodnější zavésti nový pravoúhlý souřadnicový systém, který dostaneme z původního posunutím o $2r$ ve směru osy $-y$. Průmět m_2 dříve uvažované příčky m mimoběžek a, b do nové roviny (x, z) jest

$$z - 2r = \lambda x, \; y = 0 .$$

Pak přímka p jest stanovena rovnicemi

$$y = \frac{2r}{1 + \lambda^2} ,$$
$$z = - \lambda^3 x .$$

Z nich eliminací parametru λ plyne ihned rovnice konoidu ve tvaru

$$z^2y^3 = x^2(2r - y)^3 . \tag{1}$$

Posunutím počátku do středu S plochy přejde rovnice (1) na tvar

$$z^2(r + y)^3 = x^2(r - y)^3 . \tag{2}$$

Mimoběžky a, b a osa o jsou dvojnými přímkami plochy. Svazek rovin procházejících některou z daných mimoběžek a, b protíná konoid v křivkách, jež se do roviny středové promítají jako cisoidy Diokletovy. Tyto jsou zřejmě homothetické vzhledem k bodu S jako středu homothetie.

Zabývati se budeme rovinnými řezy konoidu K^5. Rovina σ daná rovnicí

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 , \tag{2'}$$

kde $abc \neq 0$, protne konoid daný rovnicí (2) v křivce ε, jejíž průmět ε_2 do roviny středové obdržíme vyloučením y z rovnice roviny a rovnice (2) ve tvaru

$$z^2[acr + abc - bcx - abz]^3 = x^2[acr - abc + bcx + abz]^3, \; y = 0 . \tag{3}$$

Zavedením homogenních souřadnic $x = \dfrac{x_1}{x_3}, z = \dfrac{x_2}{x_3}$ v rovině $y = 0$ obdržíme pro $x_3 = 0$:

$$(x_1^2 + x_2^2)(ax_2 + cx_1)^3 = 0 .$$

Z toho plyne zajímavá vlastnost konoidu K^5: *Křivka 5. stupně, ve které libovolná rovina σ vyjádřená rov. (2′) konoid protíná, promítá se do roviny středové jako křivka cirkulární.* Tato má v nekonečnu trojnásobný bod daný směrem $\dfrac{x_2}{x_1} = -\dfrac{c}{a}$, t. j. směrem přímky konoidu rovnoběžné s rovinou sečnou σ.

Uvedená věta platí i pro roviny jdoucí počátkem O a pro roviny kolmé k rovinám souřadnicovým, pokud nejsou rovnoběžné s osou o konoidu anebo na ni kolmé.

Nevlastní přímka daná směrem řídicí roviny konoidu jest tudíž jeho trojnásobnou přímkou.

K témuž výsledku přijdeme, protneme-li konoid K^5 rovinou jdoucí jeho osou, ale nikoliv přímkou a nebo b, tedy rovinou $z = \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Pak půdorys řezu má rovnice

$$\lambda^2x^2y^3 = x^2(2r - y)^3, \; z = 0 .$$

Obdržíme

1. $x^2 = 0$; t. j. osa y jest dvojnou přímkou plochy;
2. $\lambda^2y^3 - (2r - y)^3 = 0.$

Z rovnice 2 plyne (rozkladem její levé strany)

(a) $y(\lambda^{\frac{2}{3}} + 1) - 2r = 0$ anebo

(b) $\lambda^{\frac{4}{3}}y^2 + \lambda^{\frac{2}{3}}y(2r - y) + (2r - y)^2 = 0.$

Rovnice (a) vede (uvažujeme ovšem pouze reálné roviny) k přímce

$$y = \frac{2r}{\lambda^2 + 1}, \quad z = 0$$

rovnoběžné s osou x. Rovnice (b) vede, pokud je $\lambda \neq 0$, t. j. s vyloučením půdorysny, ke dvěma imaginárním přímkám. Rovina $z = \lambda x$ protne tudíž plochu K^5 v dvojné ose o, jedné přímce reálné a dvou přímkách imaginárních.

Zavedením souřadnic homogenních $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ do rov. (1) plochy obdržíme po položení $x_4 = 0$:

$$x_2^3(x_1^2 + x_3^2) = 0\,.$$

Nevlastní rovina protíná tedy konoid v nevlastních přímkách isotropických rovin $x_1^2 + x_3^2 = 0$, jejichž průsečnice je osa o konoidu, a v trojnásobné přímce dané směrem roviny řídicí.

Průmět půdorysný ε_1, v němž rovina $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ konoid protíná, obdržíme po eliminaci z z příslušných rovnic ve tvaru

$$(abc - bcx - acy)^2(r + y)^3 = a^2b^2x^2(r - y)^3, \quad z = 0\,. \tag{4}$$

Zavedením homogenních souřadnic $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ v rovině $z = 0$ dostaneme při $x_3 = 0$

$$x_2^3[c^2(bx_1 + ax_2)^2 + a^2b^2x_1^2] = 0\,.$$

Má tudíž křivka ε_1 v nekonečnu bod trojnásobný daný směrem osy x. Dále protíná nekonečně vzdálenou přímku půdorysny ve dvou bodech imaginárních, v nichž nekonečně vzdálenou přímku protínají imaginární přímky o směrnicích $-\frac{a}{b} \pm \mathrm{i}\,\frac{b}{c}$.

V rovnici roviny sečné σ je $abc \neq 0$. Ze zhomogenisované rovnice průmětu ε_1 průsečné křivky plyne, že půdorysy ε_1 rovinných řezů konoidu při $abc \neq 0$ nejsou křivkami cirkulárními.

Půdorysy ε_1 budou křivkami cirkulárními pouze v tom případě, když nárys ε_2 i půdorys ε_1 budou křivky shodné, tedy při dané poloze průměten půdorysy průsečných křivek s rovinou souměrnosti a totožnosti a s rovinami s nimi rovnoběžnými.

Roviny rovnoběžné s osou o konoidu protínají jej v křivkách majících v nekonečnu jeden reálný bod trojnásobný, v němž rovina sečná protíná v nekonečnu ležící trojnásobnou přímku plochy a jeden dvojnásobný reálný bod isolovaný, v němž tato rovina protíná osu konoidu.

2. Blíže uvažujme průsečné křivky konoidu se svazkem rovin, jehož osa s jde průsečíkem B přímky b s π rovnoběžně s přímkou a, s vyloučením půdorysny a roviny rovnoběžné s nárysnou.

Při poloze počátku os souřadnic odpovídající rovnici (1) konoidu jsou uvedené sečné roviny vyjádřeny rovnicí

$$z = \lambda y\,. \tag{5}$$

Rovnice průmětů (ε_2) do roviny středové jsou:

$$z^5 = x^2(2r\lambda - z)^3,\ y = r\,. \tag{6}$$

Tyto křivky jsou 5. stupně a s kolmým průmětem osy z do roviny středové mají pětibodový styk v bodě S. Z rovnice je patrno, že křivka je souměrná podle přímky $x = 0$, $y = r$. Střed S konoidu je bodem vratu křivek (ε_2) a přímka $x = 0, y = r$ jest tečnou v něm.

Poněvadž trojnásobný bod křivky (ε_2) leží v nekonečnu ve směru osy x, je úsek, který tečna v tomto bodě utíná na přímce $x = 0$, $y = r$, roven $2r\lambda$.

Libovolné dvě roviny svazku (s) vytínají na přímkách konoidu K^5 úsečky téhož poměru měřené od osy o konoidu. Jsou proto nárysné průměty (ε_2) křivek (ε), v němž svazek rovin (s) seče konoid, křivky homothetické vzhledem ku průmětu o_2 osy o jako středu homothetie.

Poněvadž půdorysy přímek konoidu jsou rovnoběžné, pak z důvodu právě uvedeného, půdorysy (ε_1) průsečných křivek jsou vzájemně afinní vzhledem k ose $o \equiv y$ konoidu jako ose afinity.

Rovnici křivek (ε_1) obdržíme po vyloučení z z rovnice (1) a (5) ve tvaru

$$\lambda^2 y^5 = x^2(2r - y)^3,\ z = 0\,. \tag{7}$$

Z rovnice je zřejmo, že křivky mají v počátku B_1 bod vratu.

Dělíme-li rovnici (7) λ^2, je vztah afinní mezi křivkami (ε_1) zřejmý. Ze (7) plyne, že přímka $y = 2r$, $z = 0$ je společnou asymptotou křivek (ε_1).

Z rovin svazku o ose (s) volme rovinu σ svírající s π úhel 45° ($\lambda = 1$). V tomto případě půdorys i nárys jsou křivky shodné, souměrně položené ku přímce γ_1 jdoucí středem S plochy rovnoběžně k ose x. Pak rovnice

$$y^5 = x^2(2r - y)^3\,,\ z = 0 \tag{8}$$

vyjadřují půdorys ε_1 křivky ε a rovnice

$$z^5 = x^2(2r - z)^3,\ y = 2r \tag{9}$$

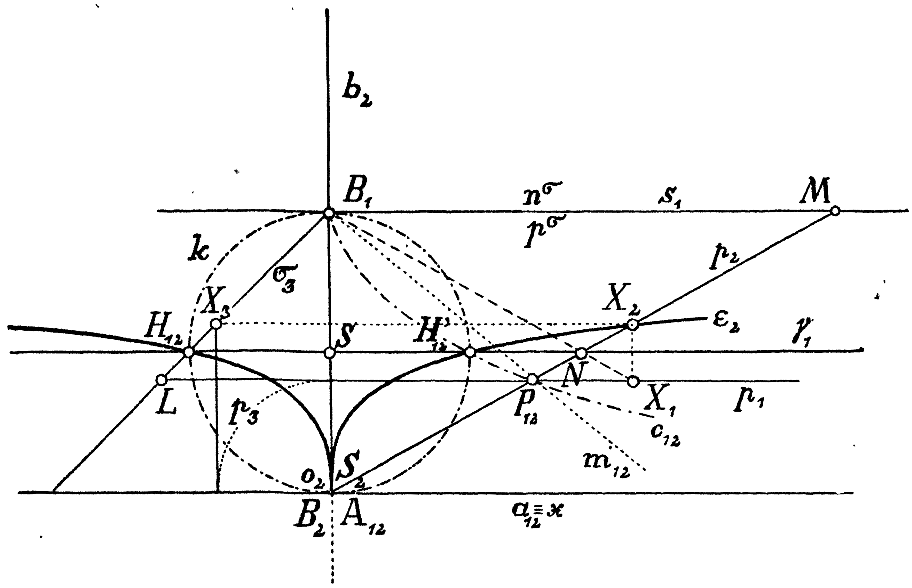
její nárys ε_2.

Přímka $z = r$, $y = 2r$, protne nárys ε_2 v bodech o úsečkách $x_{12} = \pm r$. Totéž plyne pro půdorys ε_1 a přímku $y = r, z = 0$. Podle dříve uvedeného jsou křivky ε_1 a ε_2 cirkulární. Půdorys ε_1 má asymptotu $y = 2r$, $z = 0$ a nárys ε_2 má asymptotu $z = 2r$, $y = 2r$.

Body průmětů ε_1 a ε_2 sestrojíme následovně: Rovina totožnosti (obr. 1) jde mimoběžkou $a \equiv x$ a protne konoid K^5 ještě v křivce c, jejímž průmětem do roviny nárysné i půdorysné jest cisoida Diokletova o základní kružnici k opsané nad průměrem $\overline{A_1B_1}$ a základní přímce $a \equiv x$. V našem případě

$c_1 \equiv c_2$. Na paprsku m bodem B_1 (obr. 2) vyznačme bod P_{12} cisoidy Diokletovy a přímku p konoidu jím jdoucí ($p_1 \parallel x$; $p_2 \equiv \overline{P_{12}A_{12}}$). Vyznačme po otočení do nárysny třetí průmět σ_3 roviny σ. Je-li p_3 třetím průmětem přímky p, obdržíme v průsečíku p_3 a σ_3 stranorys X_3 bodu X průsečné křivky ε roviny σ s konoidem. Průměty X_2 a X_1 jsou na průmětech přímky p.

Buďtež H'_{12} a H_{12} průsečíky půdorysu γ_1 středové roviny s kružnicí k. Je-li L průsečík přímky p_1 se σ_3, je z obrazu přímo patrno, že $\overline{X_3H_{12}} = \overline{H_{12}L}$. Značí-li N průsečík přímek p_2 a γ_1, platí $\overline{P_{12}N} = \overline{NX_2}$. Je tudíž konstrukce nárysu průsečné křivky konoidu s rovinou σ velmi jednoduchá. Stačí vést



Obr. 2.

koncovým bodem A_{12} průměru kružnice k libovolný paprsek a přenésti vzdálenost jeho průsečíku P_{12} cisoidou Diokletovou od průsečíku N s přímkou γ_1 na druhou stranu. Tím obdržíme bod X_2 průmětu ε_2 křivky ε.

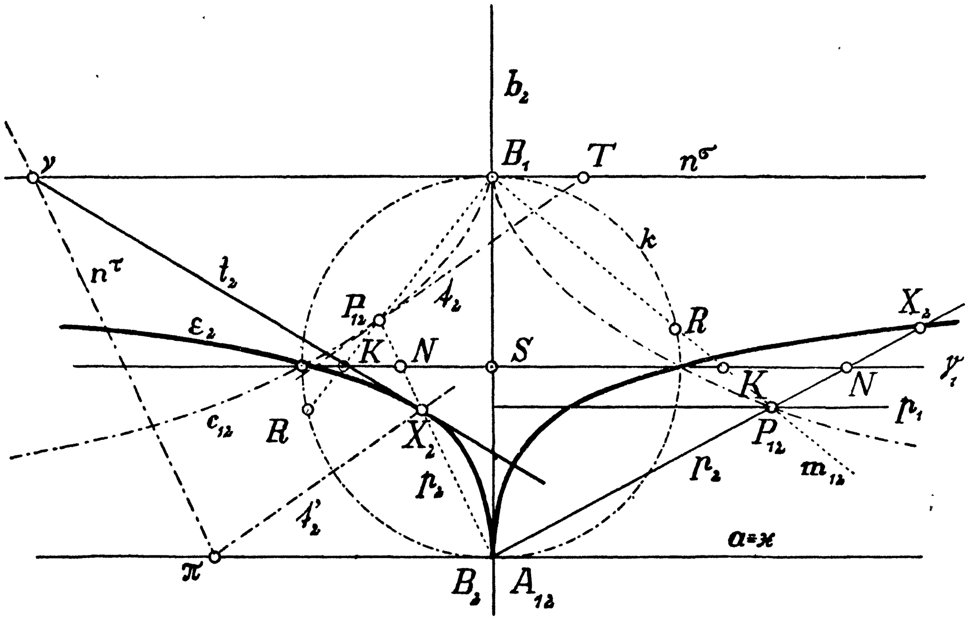
Je-li bod M průsečík přímky p_2 s tečnou s_1 kružnice k v bodu B_1, platí: $\overline{A_{12}M} - \overline{A_{12}\,P_{12}} = \overline{P_{12}M} = \overline{A_{12}X_2}$. Seznáváme, že na libovolný paprsek jdoucí bodem A_{12} nanášíme od bodu A_{12} rozdíl průvodičů bodů P_{12} a M, v nichž tento paprsek protíná cisoidu Diokletovu c_{12} a pevnou přímku s_1. Jest *tudíž nárysný průmět ε_2 průsečné křivky ε roviny δ s konoidem K^s cisoidou vytvořenou z dané cisoidy Diokletovy c_{12} a a pevné přímky s_1 co útvarů základních vzhledem k pólu $0 \equiv A_{12}$.*

Konstrukce křivky ε_2 v nejjednodušší úpravě jest vyznačena v obr. 3. Bodem B_1 kružnice k vedeme libovolný paprsek a vyznačíme jeho průsečík R s kružnicí a průsečík K s přímkou γ_1. Přenesením $RK = KP_{12}$ obdržíme od P_1

cisoidy Diokletovy. Spojíme-li P_{12} s bodem A_{12} a učiníme-li $\overline{P_{12}N} = \overline{NX_2}$ obdržíme bod X_2 křivky ε_2.

Z obr. 2 vidíme, že vzdálenost průmětů X_1 a X_2 od přímky γ_1 je táž, leží proto průmět X_1 na spojnici bodu B_1 kružnice k s bodem N. Průměty ε_1 a ε_2 jsou v našem případě křivky shodné, souměrné ku přímce γ_1.

Z rovnic (8) a (9) půdorysu ε_1 a nárysu ε_2 plyne, že ε_1 má pětibodový styk v bodu B_1 s osou y a křivka ε_2 pětibodový styk v bodu B_2 s osou z. Z rovnic



Obr. 3.

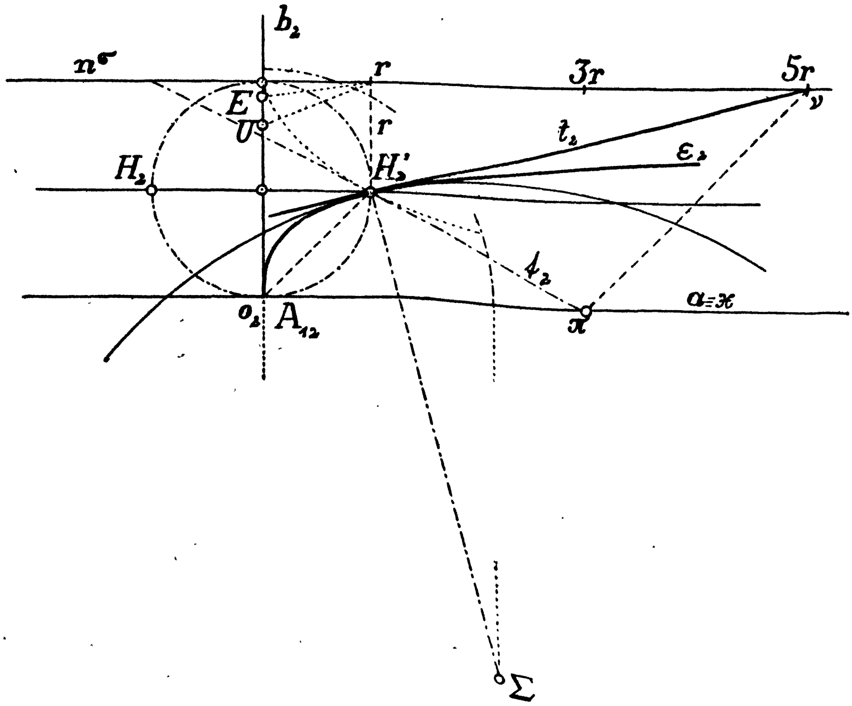
přímo je pak patrno, že křivky ε_1 a ε_2 jsou souměrné k ose y resp. ose z. B_1 je bodem vratu křivky ε_1 a B_2 bodem vratu křivky ε_2.

Z konstrukce plyne, že obě křivky procházejí body H_{12} a H'_{12}, ve kterých přímka γ_1 protíná kružnici k, neboť tyto body jsou průměty průsečíků H a H' přímek h a h' konoidu ležících v rovině středové γ s rovinou sečnou σ. Asymptota křivky ε_2 je podle dřívějšího stopa n^σ roviny sečné σ a asymptotou křivky ε_1 jest přímka $a_{12} \equiv x$.

Tečnu v bodu X_2 ku křivce ε_2 (obr. 3) obdržíme jako průsečnici roviny tečné konoidu v bodu X s rovinou sečnou σ. Tečná rovina v bodě X je určena přímkou p a tečnou ke křivce, v níž (kromě přímky a) seče konoid rovina jdoucí přímkou $a \equiv x$ a bodem X. Tato průsečná křivka promítá se do nárysny jako cisoida Diokletova homothetická k základní cisoidě c_{12}. Tedy nárys t'_2 tečny k ní v bodu X_2 je rovnoběžný s tečnou t_2 v bodu P_{12} cisoidy základní c_{12}. Spojíme-li bod P_{12} s bodem A_{12} a je-li N průsečík této spojnice s přímkou γ_1 a bod S středem kružnice k a učiníme-li na stopě n^σ $\overline{SN} = \overline{B_1T}$, je spojnice TP_{12} tečnou v bodu P_{12} k cisoidě Diokletově c_{12}. Pak tečna t_2' jde bodem X_2 rovnoběžně s t_2. Její půdorysný stopník π leží na stopě x roviny (aX) a jím prochází nárysná stopa $n^\tau \parallel p_2$ tečné roviny konoidu v bodu X. Bodem v, v němž nárysná stopa n^τ seče nárysnou stopu n^σ sečné roviny, prochází hledaná tečna t_2 v bodu X_2 křivky ε_2. *Po vytčení směru tečny v bodu P_{12} cisoidy Diokletovy c_{12} vyžaduje konstrukce tečny v bodu X_2 křivky ε_2 vedení pouze dvou rovnoběžek.*

Použijeme-li uvedené konstrukce tečny k sestrojení tečen v bodech H_2 resp. H_2', plyne z obr. 4 přímo, že směrnice tečen v těchto bodech jsou $\frac{1}{4}$ resp. $-\frac{1}{4}$. Totéž plyne početně, dosadíme-li do derivace z' vypočtené z rovnice (9_1) hodnoty $x = r$, $z = r$, resp. $x = -r$, $z = r$.

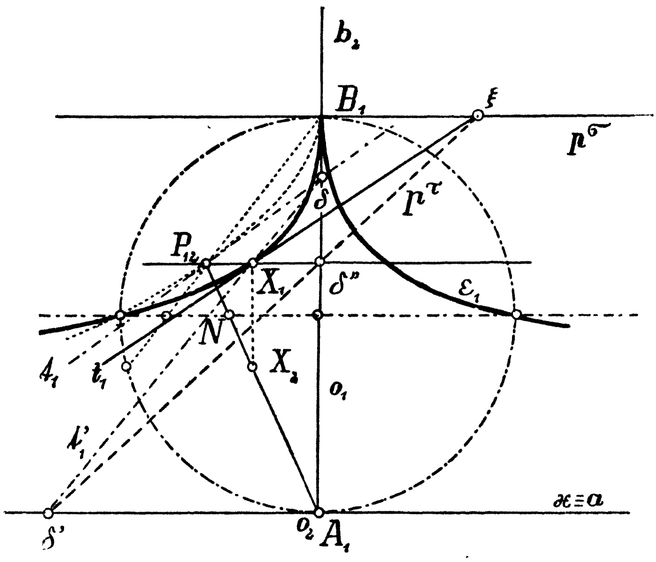
Vypočteme-li z rovnice (9_1) druhou derivaci z'' a dosadíme-li do ní $x = r$, $z = r$, obdržíme $z'' = -\frac{15}{64}r$, a dosadíme-li do vzorce $R = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''}$ za z' a z'' příslušné hodnoty pro $x = r$ a $z = r$, obdržíme poloměr křivosti v bodu



Obr. 4.

H_2': $R = -\dfrac{17\sqrt{17}}{15}\,r$. Souřadnice středu křivosti Σ jsou: $X = \frac{32}{15}r = 2r + \frac{2}{15}r$, $Z = -3r - 4 \cdot \frac{2}{15}r$ a lze je jednoduše sestrojiti.

V případě uvažovaném, kdy sečná rovina σ svírá s průmětnou úhel 45°, jsou křivky ε_1 a ε_2 symetrické ku přímce γ_1 a tedy tečny v bodech X_1 a X_2 se protínají na přímce γ_1.

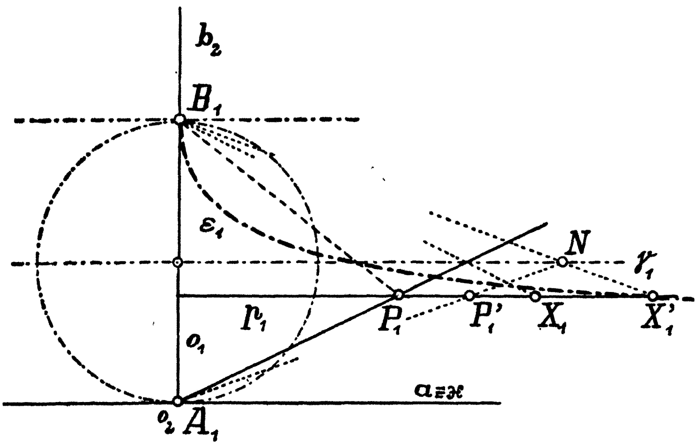


Obr. 5.

Odvoďme přímou konstrukci tečny v bodu X_1 (obr. 5). Tečna v bodu X ku průsečné křivce roviny σ s konoidem je určena přímkou p konoidu, na níž bod X leží, a tečnou ku průsečné křivce roviny jdoucí přímkou a a bodem X, jejíž půdorys je se základní cisoidou Diokletovou, pomocí které přímky konoidu sestrojujeme, ve vztahu afinním vzhledem k ose o konoidu jako ose afinity. Je-li tečna v bodu P_1 cisoidy Diokletovy t_1, pak jejím průsečíkem δ s osou o_1 jde tečna t_1' v bodu X_1 ku půdorysu průsečné křivky konoidu s rovinou (X, a) o půdorysné stopě a. V průsečíku δ' tečny δX_1 se stopou a je půdorysný stopník tečny t'. Spojnice půdorysného stopníku δ'' přímky p a půdorysného stopníku δ' tečny t' je půdorysnou stopou p^τ tečné roviny konoidu v bodu X, a proto v průsečíku jejím ξ se stopou p^σ roviny sečné je půdorysný stopník ξ hledané tečny t. Tedy ξX_1 jest tečna t_1 v bodu X_1 ku křivce ε_1. Konstrukce tečny v_1 vyžaduje po vytčení tečny v bodě P_{12} základní cisoidy Diokletovy sestrojení pouze dvou přímek.

Libovolné roviny uvažovaného svazku rovin o ose s, jdoucí bodem B rovnoběžně ku a, protínají konoid v křivkách (ε), jež se do nárysny promítají jako křivky homothetické ke křivce ε_2 vzhledem k bodu B_2 jako středu homothetie. Půdorysy (ε_1) průsečných křivek (ε), ležících v jednotlivých rovinách svazku (s), jsou křivky afinní vzhledem k ose o jako ose afinity ku právě vyznačené křivce ε_1.

Je-li bod P_1 (obr. 6) bodem základní cisoidy Diokletovy a bod X_1 půdorysem průsečíku přímky p konoidu jím jdoucí s rovinou svazku (s) svírající s $\pi \measuredangle 45°$, obdržíme půdorys X_1' průsečíku X přímky p s libovolnou rovinou σ svazku (s) jako bod afinně sdružený s X_1 v poměru daném poměrem homothetie průmětů nárysných těchto křivek. Sestrojíme-li k bodu P_1 základní cisoidy Diokletovy



Obr. 6.

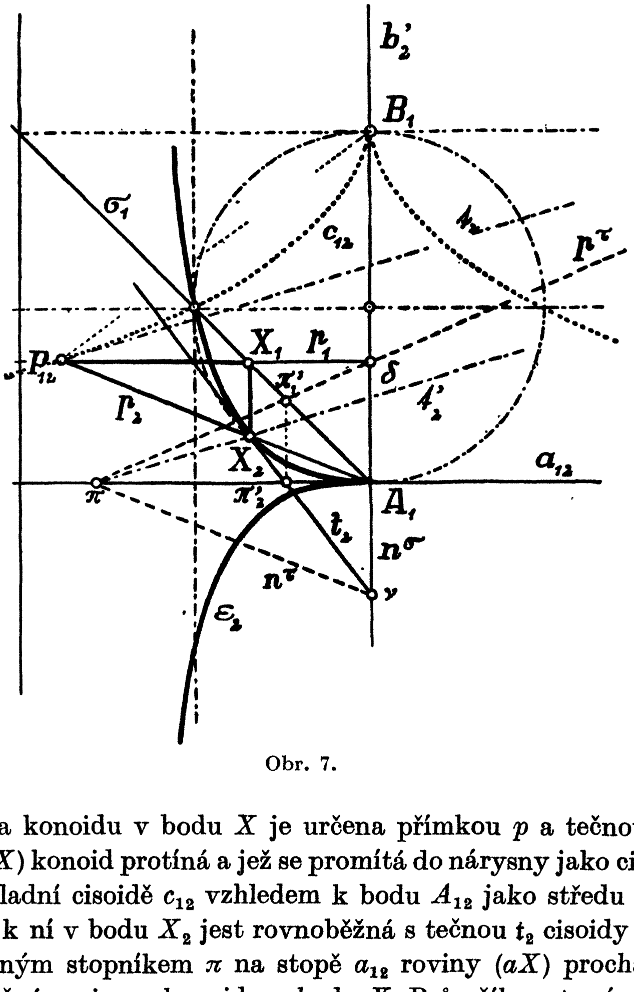
bod P_1' afinně sdružený v uvedeném poměru, můžeme sestrojiti půdorys X_1' průsečíku X' přímky p se zvolenou rovinou svazku (s) použitím konstrukce uvedené dříve v obr. 2. Bod P_1' spojíme s bodem A_1 a průsečík N této spojnice s přímkou γ_1 spojíme s B_1. Tato spojnice protne přímku p_1 v hledaném půdorysném průmětu X_1' přímky p s rovinou σ.

Tečnu v bodu X_1' sestrojíme přesně touž konstrukcí, jako jsme v obr. 5 sestrojili tečnu ku půdorysu ε_1 průsečné křivky konoidu s rovinou svazku (s) svírající s $\pi \measuredangle 45°$.

3. Použijeme-li přímku $b' \parallel b$ jdoucí průsečíkem A osy o s mimoběžkou a za osu svazku sečných rovin, obdržíme samozřejmě tytéž průsečné křivky. Jejich bod vratu bude však průsečíkem mimoběžky a s osou b' svazku sečných rovin. Přijdeme k novému jednoduchému vytvoření průmětu ε_2 průsečné křivky ε.

V obr. 7 zvolena je poloha mimoběžek a, b shodně jako dříve a vyznačen je bod P_{12} základní cisoidy Diokletovy c_{12}, v níž rovina totožnosti protíná konoid. Za sečnou rovinu volme rovinu svazku o ose b' svírající s nárysnou

$\sphericalangle$ 45° o půdorysné stopě σ_1 v obraze 7 vyznačené. Jsou-li p_1 a p_2 průměty přímky konoidu jdoucí bodem P_{12}, pak v průsečíku stopy σ_1 a přímky p_1 je půdorys bodu X_1 průsečné křivky. Jeho nárys X_2 leží na p_2. *Průmět ε_2 je vytvořen vrcholem X_2 proměnného pravoúhlého trojúhelníka $P_{12}X_1X_2$, jehož vrchol P_{12} opisuje cisoidu Diokletovu c_{12} a vrchol X_1 přímku σ_1*, při čemž strana $\overline{P_{12}X_2}$ jde stále bodem A_{12} a strana P_1X_1 jest rovnoběžná s osou x.



Obr. 7.

Tečná rovina konoidu v bodu X je určena přímkou p a tečnou ke křivce, v níž rovina (aX) konoid protíná a jež se promítá do nárysny jako cisoida homothetická k základní cisoidě c_{12} vzhledem k bodu A_{12} jako středu homothetie. Proto tečna t'_2 k ní v bodu X_2 jest rovnoběžná s tečnou t_2 cisoidy v bodu P_{12}. Jejím půdorysným stopníkem π na stopě a_{12} roviny (aX) prochází nárysná stopa $n^\tau \parallel p_2$ tečné roviny τ konoidu v bodu X. Průsečíkem t_v nárysných stop n^τ a n^σ jde tečna t_2 v bodu X_2 křivky ε_2.

Též použitím půdorysné stopy p^τ tečné roviny τ snadno sestrojíme tečnu v bodu X_2 Stopa půdorysná p^τ spojuje bod π se stopníkem δ přímky p. Stačí její průsečík π'_1 se σ_1 promítnout na osu x do bodu π'_2. Pak spojnice $\overline{\pi'_2X_2}$ je tečnou křivky ε_2 v bodu X_2.

Je-li rovinou sečnou libovolná rovina svazku o ose b', tvoří stopy půdorysné těchto rovin svazek o středu A_1. Konstrukce nárysu průsečné křivky s konoidem se pro určitou polohu stopy σ_1 nemění (pokud ovšem rovina σ nejde žádnou z přímek a, b) a konstrukce tečny v libovolném jejím bodu X rovněž zůstává táž.

4. Otočme konoid K^5 okolo jeho osy o o $45°$ tak, aby otočený průmět b_2 přímky b svíral úhel $45°$ s kladným směrem osy x. Tím rovnice (2) konoidu přejde ve tvar

$$(z + x)^2(r + y)^3 = (z - x)^2(r - y)^3\,, \tag{10}$$

při čemž počátek souřadnic leží ve středu S plochy.

Roviny rovnoběžné s π protínají konoid v křivkách 5. stupně, majících v průsečících s mimoběžkami a, b body vratu V a V'. Tečny v nich jsou rovnoběžny s osou y, neboť jsou to průsečnice roviny sečné s rovinami jdoucími osou o konoidu a danými mimoběžkami a, b.

Průměty půdorysné průsečných křivek jsou mezi sebou afinní vzhledem k ose o konoidu jako ose afinity, neboť dvě roviny rovnoběžné s π protínají libovolnou přímku konoidu v bodech, jichž poměr vzdáleností od osy o je konstantní pro všechny povrchové přímky konoidu a tedy i pro jejich půdorysné průměty.

Z rovin sečných rovnoběžných s π volme rovinu σ ve vzdálenosti $z = r$ od průmětny π. Vložíme-li do rovnice (10) $z = r$, obdržíme rovnice půdorysného průmětu ε_1 průsečné křivky ε ve tvaru

$$(r + x)^2(r + y)^3 = (r - x)^2(r - y)^3,\ z = 0\,. \tag{11}$$

Zavedením homogenních souřadnic $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$ obdržíme pro $x_3 = 0$:

$$x_1^2 \,.\, x_2^3 = 0.$$

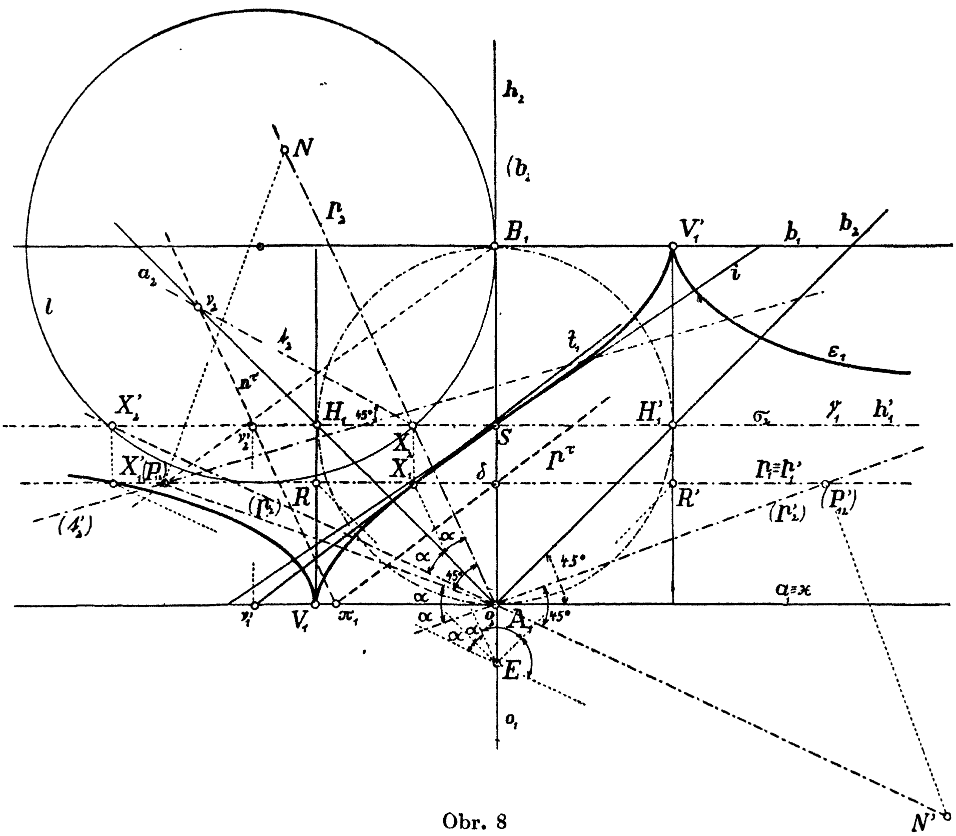
Křivka má v nekonečnu jeden bod trojnásobný, který je průsečíkem v nekonečnu ležící trojnásobné přímky konoidu dané směrem roviny řídicí s rovinou sečnou σ a bod dvojnásobný isolovaný daný nekonečně vzdáleným průsečíkem osy konoidu jako přímky dvojnásobné s rovinou sečnou.

Pro $x = \pm r$ obdržíme z rovnice (11): $(y \pm r)^3 = 0$. Odpovídající body V_1 a V_1' jsou body vratu o tečnách rovnoběžných s osou y. Z rovnice (11) plyne pro $x = 0$, že křivka jde počátkem, a poněvadž tato rovnice zaměněním x za $(-x)$ a y za $(-y)$ se nemění, jest křivka ε_1 k počátku souměrná a počátek je jejím bodem inflexním.

Vypočteme-li z rovnice (11) derivaci y', obdržíme po dosazení do ní hodnot $x = 0$, $y = 0$ směrnici tečny inflexní: $y' = -\frac{2}{3}$, což podává snadnou její konstrukci.

V rovině středové γ konoidu leží jeho přímky $h \perp h'$. Z nich h leží v π.

Konstrukce bodů křivky ε_1: Volme mimoběžku b odchýlenou od π o 45° a mimoběžku a o 135° (obr. 8). Abychom sestrojili povrchovou přímku p konoidu, otočme konoid okolo osy o zpět do polohy původní, aby otočená mimoběžka (b) stála kolmo k π. Pak vytkneme bod (P_{12}) základní cisoidy



Obr. 8

Diokletovy a jím procházející přímku (p), kterou otočíme zpět o 45°. Půdorys $(p)_1 \equiv p_1$ se nemění, a nárys p_2 přímky p po otočení zpětném bude svírati $\sphericalangle$ 45° s nárysem $(p)_2 \equiv (P_{12})A_1$. V průsečíku nárysu p_2 se stopou σ_2 roviny sečné σ, obdržíme nárys X_2. Jeho půdorys X_1 leží na p_1.

Konstrukce jednotlivých bodů půdorysu ε_1 jest tudíž následující: Okolo vrcholu A_1 otáčíme úhel 45° (viz obr. 8) a bodem (P_{12}), v němž rameno prvé protne cisoidu Diokletovu, vedeme půdorys přímky $p_1 \parallel x$. Pak kolmice spuštěná ku p_1 z průsečíku X_2 druhého ramene se stopou σ_2 protne p_1 v bodu X_1 půdorysu ε_1. Též platí: Vztyčíme-li v bodu (P_{12}) cisoidy Diokletovy kolmici ku (p_2) a přeneseme-li $\overline{(P_{12})A_1} = \overline{(P_{12})N}$, obdržíme body X_1 křivky ε_1

při pohybu proměnného pravoúhlého trojúhelníka $A_1(P_{12})N$, spustíme-li vždy s průsečíku X_2 jeho přepony se stopou σ_2 roviny sečné kolmici ku přímce p_1.

Přímka (p_2') souměrná ku (p_2) vzhledem ku průmětu osy y, protne po otočení zpět o $\sphericalangle 45°$ rovinu σ v bodu X', jehož půdorys leží na přímce $p_1' \equiv p_1$. Vidíme, že přímky (p_2) a (p_2') svírají s přímkou $(a) \equiv x$ stejné úhly α, což zůstává v platnosti i po otočení do původní polohy. Jsou-li body H_1 a H_1' ležící na kružnici k průsečíky stopy σ_2 s tečnami v bodech vratu V_1 a V_1', platí, že paprsky o_2H_1, o_2H_1', o_2X_2, o_2X_2' tvoří harmonickou čtveřinu. Nárysy spojnic průsečíků X_2, X_2', ... atd. s bodem o_2 tvoří paprskovou involuci o samodružných paprscích o_2H_1 a o_2H_1'. Platí tudíž: *Nárysné průměty všech bodů průsečné křivky ε konoidu s rovinou σ tvoří (uvedeným způsobem) na přímce σ_2 páry involuce. Jejími samodružnými body jsou průsečíky H_1 a H_1' s tečnami v bodech vratu a bodem centrálným je střed S kružnice k.*

Kružnice l jdoucí odpovídajícími body X_2 a X_2' uvedené involuce a mající střed na přímce b_1, dotýkají se průmětu o_1 osy o konoidu v bodu B_1, a to vzhledem k tomu, že body H_1 a H_1' jsou body samodružné a bod S bodem centrálným uvažované involuce. Naopak kružnice svazku dotýkající se průmětu o_1 osy o v bodě B_1 protínají průmět $\varepsilon_2 \equiv \sigma_2$ ve dvojicích odpovídajících si bodů X_2 a X_2'.

O křivce ε_1 platí: *Libovolná přímka p_1 rovnoběžná s její asymptotou protíná ji ve dvou bodech X_1 a X_1', jejichž spojnice s bodem E, vzdáleným od jejího průsečíku δ s osou o_1 o délku poloměru r, svírají se spojnicí bodu E s R resp. R', v nichž přímka p_1 protíná tečny v bodech vratu V_1 a V_1', rovné úhly.* Této vlastnosti lze použíti ku jednoduchému sestrojení bodu X_1', známe-li bod X_1.

5. V rovině středové γ leží přímka h konoidu kolmá k π. Na ní jsou inflexní body průsečných křivek konoidu s rovinami rovnoběžnými s π. Příslušné inflexní tečny jsou asymptotickými tečnami plochy v jednotlivých bodech přímky h a naplňují oskulační hyperbolický paraboloid konoidu podél přímky h. Rovina půdorysná jest jednou jeho rovinou řídicí a rovina středová druhou. Jest to hyperbolický paraboloid orthogonální.

Směrnice v inflexním bodě křivky ε_1 ležící v rovině $\sigma \parallel \pi$ ve vzdálenosti r od π byla $y' = -\frac{2}{3}$, pročež roviny rovnoběžné s nárysnou a mimoběžkami a resp. b procházející, protínají tento oskulační hyperbolický paraboloid v přímkách m a m' o směrnicích $-\frac{2}{3}$, resp. $+\frac{2}{3}$ (obr. 9). Vrcholem jeho je střed plochy S. Přímka h' ležící v π je jeho osou. Jednou jeho hlavní přímkou je osa o konoidu a druhou hlavní přímkou je přímka h konoidu, podél níž konoid oskuluje. Průsečná křivka 10. stupně uvažovaného oskulačního hyperbolického paraboloidu s konoidem K^5 rozpadá se v osu o konoidu dvojnásob počítanou, v přímku konoidu v nekonečnu trojnásob počítanou a v přímku h, podél níž plochu oskuluje, rovněž trojnásob počítanou. Zbývající část průseku jest stupně 10 — — (3 + 3 + 2) = 2 a sestává ze dvou přímek u a u' daných rovnicemi

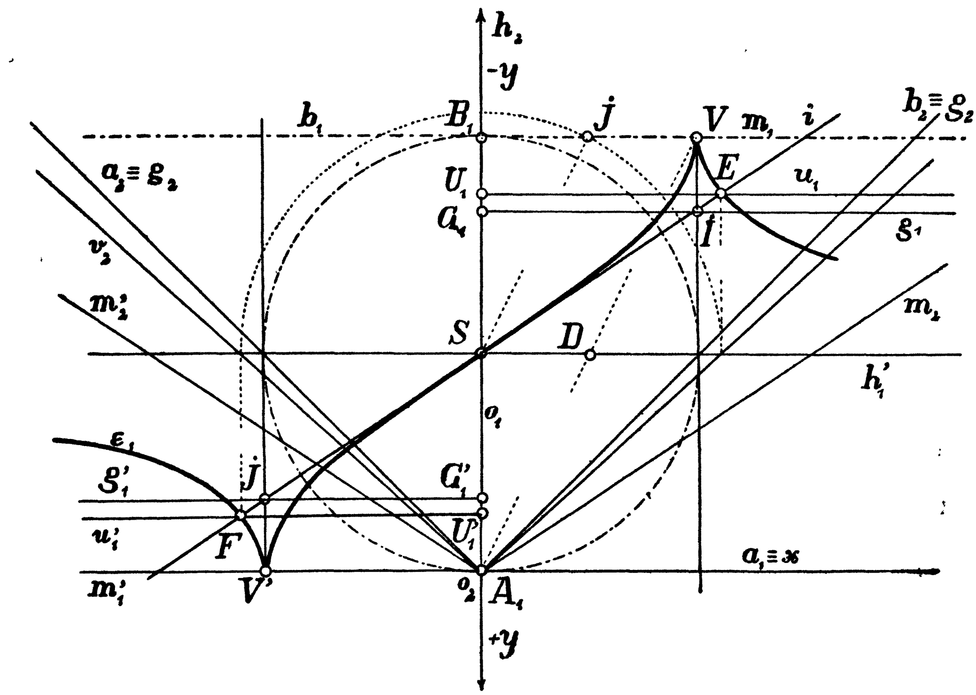
$$z = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} x ,$$
$$y = \mp \frac{r\sqrt{5}}{3} .$$

Přímky u a u' procházejí body E a F (obr. 9), ve kterých inflexní tečna i protíná křivku ε_1 a jsou povrchovými přímkami plochy K^5 i oskulačního hyperbolického paraboloidu.

Vyšetříme-li průsečíky E a F křivky ε_1 s tečnou inflexní o rovnici $y = -\frac{2}{3}x$, obdržíme po úpravě

$$x = \pm \frac{r\sqrt{5}}{2} ; \quad y = \mp \frac{r\sqrt{5}}{3}$$

a můžeme ihned psáti uvedené rovnice přímek u a u'. Konstruktivně $\frac{r\sqrt{5}}{2}$ rovná se úsečce $\overline{A_1D}$ neb $\overline{DV}$, jíž přímka h_1' vytíná na spojnici bodu A_1 s bodem vratu V, nebo pro konstrukci výhodnější úsečce $\overline{SJ}$, kterou na paprsku vedeném středem S rovnoběžně s A_1V odtíná tečna kružnice k v bodu B_1.



Obr. 9.

Volíme-li roviny sečné kolmé ku přímce h' ležící v průmětně π, protnou konoid obdobně v křivkách 5. stupně majících inflexní body na přímce h'. Tečny inflexní naplňují oskulační hyperbolický paraboloid plochy K^5 podél přímky h'. Řídicími rovinami jsou rovina středová a rovina kolmá ku přímce h'. Jednou jeho hlavní přímkou je osa o a druhou přímka h', podél níž konoid oskuluje. Vrcholem jeho je střed S plochy.

Oskulační hyperbolické paraboloidy podél přímek h a h' v rovině středové konoidu K^5 mají společnou přímku v nekonečnu, danou směrem roviny středové, a společnou přímku v ose o konoidu. Zbývající část jejich průniku jsou přímky g a g' rovnoběžné s rovinou nárysnou a svírající s π úhly 45° resp. 135°. Přímky g a g' náleží oběma hyperbolickým paraboloidům a jsou vyplněny průsečíky tečen inflexních křivek (ε) s odpovídajícími tečnami v bodech vratu. Jejich rovnice jsou tudíž

$$z = \pm x, \; y = \mp \tfrac{2}{3} r \, .$$

6. Tečnu v bodu X_1 (obr. 8) ke křivce ε_1 sestrojíme jako půdorys průsečnice roviny tečné τ konoidu v bodu X a roviny sečné σ. Tečná rovina konoidu v bodu X jest určena povrchovou přímku p jím jdoucí a tečnou v bodě X ku průsečné křivce, ve které rovina určená mimoběžkou a a bodem X ještě konoid protne. Jejím nárysem jest cisoida Diokletova. Vyjdeme-li od konoidu otočeného o 45°, bude tečna t_2 v bodu X_2 svírat úhel 45° s tečnou (t_2') v bodu (P_{12}) cisoidy otočené, vzhledem k homothetičnosti nárysů průsečných křivek konoidu s rovinami jdoucími mimoběžkou a. Nárysný stopník ν_2 tečny t leží na přímce a_2, stopě nárysné roviny (Xa). Jím prochází nárysná stopa n^τ hledané tečné roviny rovnoběžně s průmětem p_2 přímky p. Vyznačíme-li nárys ν_2' a půdorys ν_1' průsečíku ν' stopy n^τ s rovinou sečnou σ, prochází bodem ν_1' tečna t_1 křivky ε_1 v bodu X_1.

Tuto tečnu též obdržíme, vytkneme-li půdorysnou stopu p^τ roviny tečné τ, jež spojuje průsečík π_1 stopy n^τ a osy x s půdorysnou stopníkem δ přímky p. Pak *tečna t_1 křivky ε_1 v bodě X_1 je rovnoběžná se stopou p^τ*, neboť sečná rovina σ je rovnoběžná s π.

7. Otočíme-li konoid K^5 do takové polohy, aby mimoběžka a ležela v π a aby mimoběžka b byla k π kolmá, a zvolíme-li za rovinu sečnou rovinu σ' kolmou k nárysně, vytínající na osách z a x úseky rovné $2r$ (je-li r poloměrem základní kružnice cisoidy Diokletovy, do níž se promítá průsečná křivka konoidu s rovinou totožnosti), přijdeme k nové jednoduché konstrukci právě uvažované křivky.

Je-li počátek souřadnic ve středu S plochy K^5, je rovnice konoidu dána rovnicí (2):

$$z^2(r + y)^3 = x^2(r - y)^3 \, .$$

Rovnice roviny sečné σ' je

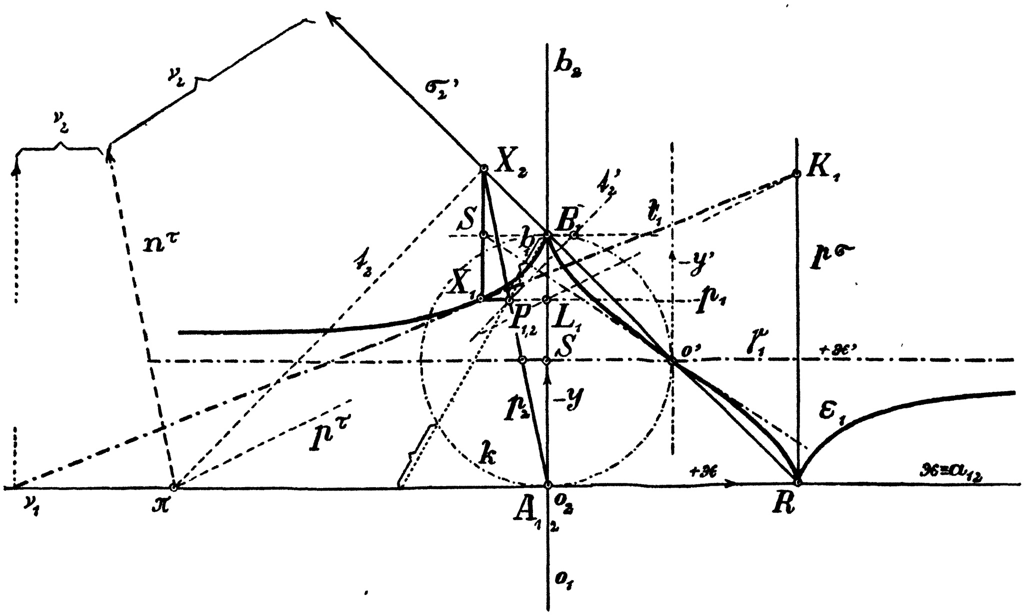
$$z - 2r = -x \, . \tag{12}$$

Eliminací z z rovnice konoidu a z rovnice (12) obdržíme po přeložení počátku do inflexního bodu $O'(r, 0, 0)$ průmětu ε_1' křivky ε' do roviny $z = 0$ rovnice půdorysu ε_1' ve tvaru

$$(r - x)^2(r + y)^3 = (x + r)^2(r - y)^3, \; z = 0\,. \tag{13}$$

Záměnou x za $(-x)$ přejde rovnice (13) ve tvar

$$(r + x)^2(r + y)^3 = (r - x)^2(r - y)^3\,,$$



Obr. 10.

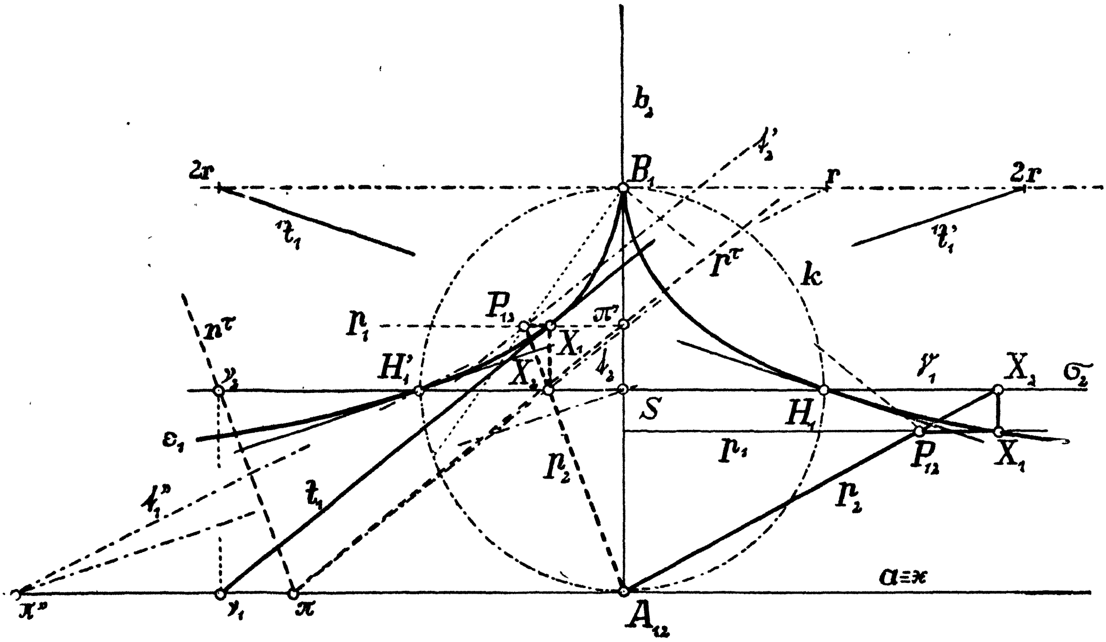
t. j. na rovnici totožnou s rovnicí (11), čímž je dokázáno, že křivky ε_1, ε_1' přejdou v sebe translací, převádějící bod O' ve střed S konoidu a pak symetrií podle osy o konoidu.

Průsečík libovolné přímky p konoidu s rovinou σ' (obr. 10) je dán nárysem X_2, v němž přímka p_2 protíná průmět σ_2' roviny σ'. Půdorys X_1 leží na přímce p_1. *Křivku ε_1' opíše tudíž vrchol X_1 pravého úhlu proměnného pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách rovnoběžných s osami x a y, jehož přepona se otáčí okolo bodu A_1 a jehož vrchol P_{12} opisuje danou cisoidu Diokletovu a vrchol X_2 pevnou přímku σ_2'.*

Tečná rovina τ v bodu X křivky ε je určena tečnou t ku průsečné křivce, v níž rovina (aX) konoid protne, a přímkou p. Jak bylo již dříve uvedeno, prochází t_2 bodem X_2 rovnoběžně s tečnou t_2' v bodu P_{12} a má půdorysný stopník π na přímce a. Půdorysná stopa p^τ tečné roviny spojuje bod π s půdorysným stopníkem L_1 přímky p. Průsečík K_1 půdorysné stopy p^τ roviny tečné τ a půdorysné stopy p^σ roviny sečné σ je půdorysným stopníkem tečny t v bodu X. Po vytčení tečny t_2' cisoidy Diokletovy vyžaduje konstrukce tečny v bodu X_1 pouze dvou pomocných přímek.

Nárysná stopa n^τ tečné roviny jde stopníkem π rovnoběžně ku p_2 a protíná nárysnou stopu σ_2' roviny sečné v bodu ν_2, jehož půdorysem ν_1 rovněž musí tečna t_1 procházeti.

Je-li sečnou rovinou libovolná rovina kolmá k nárysně neprocházející osou o konoidu, nemění se uvedená konstrukce bodů a tečen půdorysného průmětu průsečné křivky. Mění se pouze poloha stopy σ_2.



Obr. 11.

8. Uvažujme průsečnou křivku konoidu K^5 v poloze právě uvedené s rovinami rovnoběžnými s π. Půdorysy průsečných křivek jsou mezi sebou afinní vzhledem k ose o konoidu jako ose afinity.

Je-li průsečík přímky b s π počátkem, je rovnice konoidu vyjádřena rovnicí

$$z^2y^3 = x^2(2r - y)^3 . \qquad (1)$$

Z rovin sečných volme rovinu σ ve vzdálenosti $z = r$ od průmětny π; půdorys průsečné křivky je

$$y^3r^2 = x^2(2r - y)^3, \ z = 0 . \qquad (14)$$

Z rovnice (14) plyne přímo, že počátek B_1 je bodem vratu křivky ε_1 s tečnou v ose y.

Zavedením homogenních souřadnic obdržíme pro $x_3 = 0$

$$x_1^2 \cdot x_2^3 = 0 \, .$$

Křivka má v nekonečnu dvojný bod isolovaný daný směrem osy y a bod trojnásobný daný směrem osy x, jenž je průsečíkem sečné roviny s trojnásobnou přímkou konoidu v nekonečnu danou směrem řídicí roviny.

Je-li bod P_{12} bodem základní cisoidy Diokletovy a p přímka konoidu jím jdoucí, jest nárys X_2 průsečíku X přímky p s rovinou σ v průsečíku σ_2 a p_2. Půdorys X_1 leží na přímce p_1.

Konstrukce půdorysu ε_1 průsečné křivky ε odvodí se tudíž jednoduše z bodu dané základní cisoidy (obr. 11). Stačí zvolený bod cisoidy spojit s bodem A_{12} a z průsečíku této spojnice s přímkou $\sigma_2 \equiv \gamma_1$ spustit kolmici ku rovnoběžce vedené bodem cisoidy s její asymptotou. Patou této kolmice je bod X_1 křivky ε_1. *Křivka ε_1 je tudíž vytvořena vrcholem X_1 proměnného pravoúhlého trojúhelníka, jehož prodloužená přepona jde bodem A_1, při čemž vrchol P_{12} opisuje danou cisoidu Diokletovu a druhý vrchol X_2 přímku σ_2.* Tohoto vytvoření lze použíti ke konstrukci normály a tečny v libovolném bodě X_1 křivky ε_1. Snadnější konstrukci tečny dostaneme však, jako v předcházejících případech, sestrojujeme-li tečnu v bodě X jako průsečnici roviny tečné konoidu v bodu X s rovinou sečnou σ.

Rovina tečná v bodu X je určena přímkou p konoidu a tečnou ku průsečné křivce konoidu s rovinou (aX), jež se promítá do roviny nárysné jako cisoida Diokletova homothetická ku cisoidě Diokletově základní. Tedy tečna $\mathbf{t}_2$ k ní v bodě X_2 jest rovnoběžná s tečnou $\mathbf{t}_2'$ v bodu P_{12} cisoidy Diokletovy. V průsečíku jejím π s osou x je stopník půdorysný tečny $\mathbf{t}$. Pak spojnice π s půdorysným stopníkem π' přímky p je půdorysná stopa p^τ tečné roviny τ konoidu v bodu X. Poněvadž sečná rovina δ je rovnoběžná s průmětnou π, je tečna v bodu X_1 křivky ε_1 rovnoběžná se stopou p^τ.

Tečna t_1 též musí procházeti půdorysem ν_1 průsečíku ν nárysné stopy $n^\tau \parallel p_2$ roviny tečné τ a nárysné stopy σ_2 roviny sečné σ.

Po vytčení tečny $\mathbf{t}_2$ můžeme tečnu t_1 v bodu X_1 křivky ε_1 rýsovat již přímo, vedeme-li bodem X_1 rovnoběžku se spojnicí $\pi\pi'$, kterou není třeba vyznačovat.

Přímky h a h' konoidu ležící v rovině středové protínají konoid v bodech H a H', jichž půdorysy H_1 a H_1' jsou průsečíky kružnice k se stopou γ_1 roviny středové. Tyto body náleží též základní cisoidě Diokletově. Směrnice tečen cisoidy Diokletovy v nich je $\pm \frac{1}{2}$. Označme π'' průsečík tečny $\mathbf{t}_1''$ cisoidy v bodu H_1' s přímkou a. Pak podle uvedené konstrukce tečny je tečna v bodu H_1 křivky ε_1 rovnoběžná se spojnicí $\pi'' S_1$. Z obr. 11 je patrno, že vzdálenost $\overline{\pi'' A_1} = 3r$. Jsou proto směrnice tečen ${}^1t_1$ a ${}^1t_1'$ křivky ε_1 v bodech H_1 a H_1' rovny $\pm \frac{1}{3}$.

Volíme-li za počátek souřadnic střed S plochy, přejde rovnice (14) křivky ε_1 ve tvar

$$r^2(r + y)^3 - x^2(r - y)^3 = 0, \; z = 0 \, . \tag{15}$$

Vypočteme-li z rovnice (15) druhou derivaci y'' a dosadíme-li do ní $x = \pm r$, $y = 0$, obdržíme $y'' = -\frac{1}{3r}$. Pak délka R poloměru křivosti v bodech H_1' a H_1 je

$$R = \frac{10r\sqrt{10}}{9}.$$

Seznáváme, že délka R poloměru křivosti v těchto bodech je přeponou pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $\frac{10r}{9}$ a $\frac{10r}{3}$.

Souřadnice X, Y středů křivosti Σ a Σ' v bodech H_1 a H_2' jsou pak

$$X = \pm 2r + \frac{r}{9}, \; Y = -\left(3r + \frac{r}{3}\right),$$

což vede ku snadnému jich zobrazení.

Zvolíme-li některou z přímek h neb h' za osu svazku sečných rovin, promítají se jejich (zbývající) průsečné křivky 4. stupně s konoidem K^5 do roviny středové vesměs jako dvojrohy (bicorne) homothetické ku průmětu osy o konoidu jako středu homothetie, jak jsem odvodil i s vlastnostmi dvojrohu z tohoto vytvoření plynoucími v práci „O dvojrohu“.[2])

Zde budiž pouze uvedeno, že půdorysy těchto průsečných křivek jsou křivky afinní ke dvojrohu, jenž je půdorysem průsečné křivky konoidu s onou rovinou svazku uvažovaných rovin, jež svírá s půdorysnou i nárysnou týž úhel. Osou afinity jest osa o konoidu.

Průsek konoidu s rovinou jdoucí osou o a některou z daných mimoběžek a, b sestává z dvojnásob počítané osy o a z trojnásob počítané příslušné mimoběžky, jak z příslušných rovnic ihned plyne. Pouze tyto roviny mají s konoidem v přímce a resp. b třípřímkový styk.

Libovolná rovina protínající obě dané mimoběžky a, b a zaujímající k nim polohu zcela obecnou protne tedy konoid v křivce 5. stupně mající na mimoběžkách a, b body vratu. Tečny v nich jsou průsečnice roviny sečné s rovinami určenými mimoběžkami a, b a osou o konoidu.

---

[2]) *Vladimír Mašek:* „O dvojrohu“. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LI.