Alfréd Rényi

Základní problémy počtu pravděpodobnosti ve světle dialektického materialismu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 3, 189--218

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117121`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 79 * PRAHA, 30. IX. 1954 * ČÍSLO 3

ČLÁNKY

ZÁKLADNÍ PROBLÉMY POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI VE SVĚTLE DIALEKTICKÉHO MATERIALISMU

ALFRÉD RÉNYI, Budapest.

DT :51:3K 519.21

Maďarský originál tohoto článku vyšel v Časopise *A Filozófiai Évkönyv*, Budapest 1952, str. 63—97. Otiskujeme zde překlad I. a II. části článku.

Úvod

Ve svém díle „Materialismus a empiriokriticismus" Lenin jasně ukázal, že přírodovědci, pokud zkoumají odborné otázky své vědy, většinou se instinktivně stavějí na materialistické stanovisko a to i tehdy, jestliže po filosofické stránce jsou stoupenci nějakého idealistického směru; současně pak zdůraznil, že těm buržoasním vědcům, kteří ve své specialisaci dospěli k cenným výsledkům, ani slova nesmíme věřit, běží-li o filosofii. Avšak Lenin poukázal také na to, že vývoj přírodních věd nevyhnutelně vede k závěru, že stanovisko instinktivně materialistické nestačí jako záruka dalšího úspěšného vývoje vědy, který je možno zaručit jenom uvědomělým materialistickým chápáním skutečnosti. Prudký vývoj přírodních i technických věd, mnohonásobně zvýšený význam vědy v období budování socialismu a komunismu, třídní boj a s ním spojená otázka zostřeného ideologického boje, to vše vytvořilo situaci, ve které nejenom v zásadních otázkách vědy vůbec a přírodních věd zvláště, nýbrž ani v konkretní problematice denního života není možná žádná jiná správná orientace nežli ta, která je založena na dialektickém materialismu. Jako důkaz našeho tvrzení můžeme uvést vítězství mičurinsko-lysenkovské biologie nad nesprávnými idealistickými názory; dalším důkazem je vývoj moderní fysiky, kde sice proces vyjasnění základních otázek teprve probíhá, ale je už zřejmé, že vyjasnění se může uskutečnit pouze na základě dialektického materialismu důsledným bojem proti idealismu ve fysice. Je jasné, že v tomto ohledu ani matematika nemůže být výjimkou a že je třeba stupňovat kritické zkoumání zásadních otázek spojených s matematikou ve světle dialektického materialismu.

Zásadní otázky matematiky a jejích různých disciplin, mimo jiné též počtu pravděpodobnosti, je nutno vyšetřovat zejména s těchto tří hledisek:

1. Matematika podle své podstaty nezkoumá jednotlivé konkretní jevy, nýbrž obecné závislosti mezi nimi, slovy ENGELSOVÝMI „jejich prostorové formy a kvantitativní vztahy", a to pro matematiku charakteristickým abstraktním způsobem: „geometrie vytváří své zákony, abstrahujíc od konkretních předmětů a zkoumajíc předměty jako tělesa bez konkretnosti a určujíc vztahy mezi nimi nikoliv jako konkretní vztahy jakýchsi konkretních předmětů, nýbrž jako vztahy mezi tělesy vůbec bez jakékoliv konkretnosti".[1]) Tato obsažná, stručná a hluboká definice neplatí jenom pro geometrii, nýbrž také pro jiné obory matematiky. Abstraktní a obecný charakter matematiky dává této vědě velmi značný význam v theorii poznání. Obecnost matematických vět a možnost používat týchž vět na zdánlivě velmi různorodé obory skutečnosti je nade vše přesvědčivým a nevývratným důkazem poznatelnosti světa a jeho jednotné hmotné podstaty. „Jednota přírody se projevuje v ‚překvapující analogii' diferenciálních rovnic, vztahujících se k různým oblastem jevů", pravil Lenin[2]), když analysoval jeden Boltzmannův projev. Jak ukážeme v dalším, nejsou to jen diferenciální rovnice, nýbrž také obecné methody počtu pravděpodobnosti, kde pozorujeme „překvapující analogie" při aplikaci na různé oblasti jevů. Objasnění zásadních otázek matematiky vrhá tedy světlo na odraz v lidském vědomí pohybových zákonů hmoty, která je ve stálém pohybu, proměně a vývoji, a vrhá tak světlo i na hmotný svět, a *proto má zkoumání zásadních otázek matematiky i s filosofického stanoviska základní význam.*

2. Matematik se neomezuje na to, aby vyslovoval přírodní zákony v abstraktním obecném tvaru, nýbrž sleduje cestu, po které jde lidské poznání vůbec: „Od živého nazírání k abstraktnímu myšlení *a od něho k praxi* — taková je dialektická cesta poznávání *pravdy*, poznávání objektivní reality", praví Lenin.[3]) Obecných výsledků matematiky se dá použít v různých oborech a ony jsou nepostradatelným nástrojem při vědecké práci ve fysice, chemii, geologii, astronomii, meteorologii, mimo to pak z části přímo, z části prostřednictvím přírodních věd, téměř ve všech odvětvích věd technických a v menší míře i v biologii, v zemědělských vědách, v lékařství a konečně prostřednictvím statistiky též ve vědách společenských. Používání matematiky, kde

[1]) *J. V. Stalin:* O marxismu v jazykovědě, 1. svazek knižnice „Marxismus ve vědě", vyd. Svoboda, Praha 1950, str. 23.

[2]) *V. I. Lenin:* Materialismus a empiriokriticismus, 2. vydání, Praha 1945, str. 220.

[3]) *V. I. Lenin:* Filosofické sešity; český překlad, Praha 1953, str. 140. Ruský orig. Огиз 1947, стр. 146: „От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности."

je to účelné a děje-li se to správně, může těmto vědám poskytnout velmi značnou pomoc v jejich úsilí poznat a přetvářet materiální svět. Jestliže však používáme matematiky formálně bez náležitého věcného podkladu, tu můžeme tyto vědy ovlivnit škodlivě. Víme na př., že se buržoasní vědci snažili ospravedlnit mendelovskomorganovskou biologii matematickými prostředky, známo je též, že idealističtí fysikové maskují své názory a skrývají se za matematický formalismus ve snaze, učinit je takto přijatelnými. Známy jsou též pokusy buržoasních ekonomů, kteří se snaží falšovat vědu a nepřehlednými vzorci formalistické matematiky se pokoušejí zakrývat krisi a rozpory kapitalismu. Tyto z části vědomé pokusy o falšování vědy jsou nebezpečné proto, že v širokých kruzích je rozšířen názor, že užívání matematických prostředků samo o sobě může theorii učinit neomylnou. Pro nás je zcela jasné, že matematika je pouze pomůckou různých věd a že se v každém konkretním případě její použití musí zdůraznit předběžným kritickým zkoumáním, a především je jasné, že konečná shoda výsledků obdržených matematickou methodou s reálnou skutečností je nezbytným ospravedlněním používání matematiky, a dále, že žádná matematická theorie nemůže vést od nesprávných předpokladů ke správným výsledkům. Naopak je situace taková, a pokud domnělá „neomylnost" matematiky má vůbec jaký reálný podklad, spočívá právě v tom, že správnost závěru, ke kterému dojdeme matematickou cestou, stojí a padá se správností, adekvátností výchozího předpokladu.

Odhalení zneužívání matematiky a vyjasnění hranic použitelnosti matematických method za účelem jejich úspěšného používání, to je druhé hledisko, ke kterému musíme přihlížet při studiu zásadních otázek spojených s matematikou.

Je třeba konstatovat, že odhalení zneužívání matematických method mělo na mnohé ten účinek, že se zdráhají těchto method používat a že se jich bojí. To se vztahuje stejně na biology jako na statistiky. Je nepochybné, že v těchto oblastech je nutná zvýšená opatrnost a obezřetnost, ale striktně se zříkat matematických method neslouží pokroku vědy, nýbrž dříve či později se stane překážkou pokroku. Je nesporné, že dát přednost tomu, místo složitého zkoumání otázky o použitelnosti matematiky raději se touto otázkou nezabývat vůbec, je pohodlnější, ale takové „pohodlné" stanovisko by nás nemohlo vésti vpřed. Správným postupem je právě kritické zkoumání použitelnosti matematických method na podkladě dialektického materialismu. Toto kritické zkoumání je nejenom povinností pěstitelů těch věd, ve kterých se matematiky používá, nýbrž je také povinností matematiků, na což důrazně upozorňuje B. V. GNEDENKO.[4])

3. Třetím, ač ne posledním, důležitým bodem je to, že *zkoumání zásadních otázek matematiky na podkladě dialektického materialismu má velký význam pro vývoj matematiky.*

[4]) *Б. В. Гнеденко*, Теория вероятностей и познание реального мира. Успехи математических наук, V (1950), 3—23, I.

Vývoj moderní matematiky dal vznik četným otázkám, ve kterých správná orientace je možná jen na podkladě dialektického materialismu a pouze zaujetí správného stanoviska k těmto otázkám je zárukou toho, aby se další výzkumy vyvíjely správným směrem. Mám zde na mysli v prvé řadě ty výzkumy o základech matematiky, vzhledem k nimž se mluvívalo o „krisi matematiky". Ve skutečnosti zde nejde o krisi, vždyť vývoj matematiky ještě nikdy nepostupoval takovým tempem a na tak široké frontě, jako právě v posledních třech desetiletích, nýbrž jde tu o boj mezi idealistickým a materialistickým chápáním matematiky, který se stále více zostřuje.

Cílem tohoto článku nemůže být probírání všech zásadních otázek matematiky, nýbrž hodláme se soustředit na jediný komplex otázek, a to na základní otázky počtu pravděpodobnosti s hlediska tří výše formulovaných bodů. Otázky spojené s počtem pravděpodobnosti mají mimořádný význam ve všech těchto třech směrech. Pokud se týče obecných filosofických vztahů, tu zkoumání základů počtu pravděpodobnosti vrhá jasné světlo na dialektickou jednotu nahodilosti a determinovanosti, a k úplnému porozumění této otázce je klíčem právě počet pravděpodobnosti, neboť jeho poslání je právě v tom, zkoumat, jak náhodné „přechází" v determinované, jak miliardy náhodností nutně vedou k přírodním zákonům. Zkoumání základů pravděpodobnosti vrhá do jisté míry světlo i na to, jak se objektivně uplatňují společenské zákonitosti prostřednictvím velkého počtu nahodilostí.

Pokud se týče nesprávného používání matematiky, tu v připomenutých příkladech (biologie, fysika, ekonomická statistika) jde právě o nesprávné používání počtu pravděpodobnosti a o mylnou interpretaci docílených výsledků. Se stanoviska vývoje matematiky má zkoumání zásadních otázek pravděpodobnosti zvláštní význam právě proto, že diskuse o počtu pravděpodobnosti a vítězství materialistického stanoviska sovětských matematiků jasně ukazuje, že subjektivně idealistické, machistické a positivistické názory také v matematice vedly do slepé uličky, a že řešení nesmírně mnoha úloh, které klade počtu pravděpodobnosti vývoj přírodních a technických věd, jakož i odstranění závažných omylů a zdravý další vývoj theorie, to vše může být zajištěno pouze vyjasněním fundamentálních zásadních otázek počtu pravděpodobnosti na podkladě dialektického materialismu. Poučení, které z toho můžeme čerpat, ač se dosud v jiných odvětvích matematiky tak ostře a jednoznačně neprojevilo, je přece jen typické a dá se ho použít i k vyjasnění jiných sporných zásadních otázek matematiky.

Objasnění základních pojmů počtu pravděpodobnosti na podkladě dialektického materialismu je především zásluhou sovětských matematiků a v prvé řadě akademika A. N. KOLMOGOROVA.[5]) V počtu pravděpodobnosti nám musí

[5]) Viz sborník Математика в СССР за тридцать лет 1917—1947, *Б. В. Гнеденко, и А. Н. Колмогоров,* Теория вероятностей, str. 701—727.

být vzorem též sovětská věda, abychom vytvořili plodnou synthesu theorie a praxe a abychom rozvíjeli počet pravděpodobnosti správným směrem a úspěšně používali jeho výsledků při budování socialismu v naší vlasti.

I. Předmět a úkoly počtu pravděpodobnosti

Předmětem počtu pravděpodobnosti je zkoumání *náhodných hromadných jevů*. Především musíme zdůraznit, že dialektickomaterialistický světový názor uznává existenci náhodných jevů a jejich zkoumání považuje za důležitý úkol vědy na rozdíl od mechanickomaterialistického a od idealistického světového názoru, které náhodnost buďto popírají nebo ji mystifikují a prohlašují za nepoznatelnou. Engels s ostrou ironií poukazuje na omezenost a na mylné stanovisko mechanickomaterialistického názoru, který náhodnost popírá nebo ji prohlašuje za bezcennou pro vědu. Engels poukazuje i na to, že jestliže někdo tvrdí, že vše je determinováno, je to shodné s tvrzením, že vše je náhodné. Vede to nejen k popření náhodnosti nýbrž i k popření determinovanosti, k zamlžení kvalitativního rozdílu mezi oběma pojmy. Engels důrazně poukazuje na to, že dialektický materialismus nezná strohý protiklad mezi náhodností a determinovaností. Determinovanost se skládá ze spousty náhodností a uplatní se prostřednictvím řady náhodností. Náhodnost a úplná determinovanost jsou v dialektickém protikladu, tvoří dialektickou jednotu a jsou neoddělitelné.

Abychom jasně vnikli do této otázky, musíme především poukázat na to, že náhodnost není v rozporu se zákonem kausality. Stavět proti sobě náhodnost a kausalitu je buďto hloupost nebo mysticismus. Náhodné jevy přirozeně také mají svou příčinu. To je nutno obzvláště zdůraznit, neboť jenom tak se můžeme ostře ohradit proti mystickému nevědeckému chápání pojmu náhodnosti. Kausální souvislost nesmíme ztotožňovat s úplnou determinovaností. Úplná determinovanost je podstatně více nežli kausální souvislost.

Jestliže poukážeme na příčiny jevů, pak jsme ještě velmi málo řekli o těchto jevech. Neboť složité řetězy příčin by se mohly také jinak seskupit a pak by jevy probíhaly zcela jinak. To je právě charakteristické pro náhodné jevy, při kterých se setkáváme se spletitými a v celku nepřehlednými řetězy velkého počtu příčin, jejichž podrobná znalost v praxi není vždy možná, ale kromě toho ještě hlavní příčiny neurčují jednoznačně průběh jednotlivého případu, připouštějí řadu různých možných případů, a proto neumožňují přesnou předpověď průběhu těchto případů. Abychom se isolovali od falešného subjektivismu, zdůrazníme už na tomto místě, že náhodnost jevu nespočívá v tom, že jeho přesný průběh neznáme, nýbrž právě naopak v tom, že přesný průběh nahodilého jevu objektivně není jednoznačně determinován. Náhodnost je tedy objektivní kategorie a ne subjektivní. Vztahy mezi kausální souvislostí, náhodností a úplnou determinovaností snad nejlépe objasníme příkladem.

Vyšetřujme jakoukoli radioaktivní látku, na př. radium. Jádro atomu radia, jak známo, není stabilní a pro svou složitou stavbu každý atom radia dříve či později se rozpadne. Jaké změny probíhají v jádře atomu radia, to dnes ještě dopodrobna neznáme. S jistotou však víme, že každý atom radia je ve stavu stálé proměny, že každý atom radia „prožívá skutečné dějiny“[6]) a že se následkem pochodů v něm probíhajících dříve či později rozpadne. Je jasné, že okamžik, ve kterém se rozpadne daný atom radia, závisí na určité příčině. Tato příčina pozůstává v tom, že atomové jádro v průběhu neustálých změn přijde do takového stavu, ve kterém jej rozštěpí síly působící mezi jednotlivými jeho částmi. Pochody probíhající v jádru atomu jsou velmi spletité a nemáme o nich ještě jasnou představu. Rozpad atomu radia je tedy náhodný jev, který má úplně určenou příčinu. Nedovedeme říci předem, kdy se rozpadne určitý daný atom, neboť ani nemáme přesnou představu o průběhu změn odehrávajících se v jádru, ani nemůžeme tento průběh pozorovat; příčiny rozpadu známe pouze v obecných rysech. Je tedy rozpad atomu radia náhodný jev s úplně určenou příčinou. Znamená to snad, že pro rozpad atomů radia neplatí určitý zákon? Naprosto nikoliv. Víme, že rozpad každé radioaktivní látky, tedy i radia, pozorujeme-li větší množství, děje se s určitou „rychlostí“ a můžeme říci předem, že z daného množství radia za danou dobu taková a taková část se rozpadne. Rozpad radioaktivních látek se děje podle exponenciálního zákona, který je určen buďto rozpadovou konstantou, nebo nepřímo jí úměrným „poločasem“ t. j. dobou, za kterou se rozpadne právě polovina původního množství radia (v případě prvku radia je poločas přibližně roven 1600 rokům). Jestliže tento zákon zkoumáme podrobněji, zjistíme, že neplatí zcela přesně; vyšetřujeme-li počet rozpadlých atomů, pozorujeme nepatrné odchylky, malé kolísání kolem hodnoty zákonem předepsané (a počet pravděpodobnosti objevil také zákonitost těchto odchylek). Odchylky jsou však tak nepatrné, že vyšetřujeme-li podle váhy úbytek dosti „velkého“ množství (na př. 1 mg radia), už nepozorujeme odchylky od exponenciálního zákona. Můžeme směle říci, že pozorování potvrzují exponenciální zákon radioaktivního rozpadu s právě takovou (nebo ještě větší) přesností jako kterýkoli jiný za deterministický považovaný (ve skutečnosti však právě tak statistický) fysikální zákon. Můžeme shrnout provedenou úvahu tak, že jev radioaktivního rozpadu je náhodný jev, vyvolaný úplně určenými příčinami (které ovšem dosud neznáme), a že takový náhodný jev v případě velkého počtu atomů vykazuje nutně platnou zákonitost. Tuto zákonitost dovedeme plně vysvětlit pomocí počtu pravděpodobnosti. Obecnou úlohou počtu pravděpodobnosti je právě zkoumání zákonitostí tohoto druhu. Nebylo také nutné obracet se k problémům atomové fysiky za účelem ilustrace dialektické jednoty mezi náhodností a determinovaností. K témuž cíli lze dospět také jednoduššími příklady.

[6]) *B. Engels:* Anti-Dühring, Praha 1947, str. 23: „příroda se nepohybuje ve věčné jednotvárnosti stále se opakujícího kruhu, nýbrž prodělává skutečné dějiny.“

Tak na př. víme, že při našich klimatických poměrech na podzim stromy v celku ztrácejí své listy. To je nutný přírodní zákon. Že však skutečně spadne určitý list určitého stromu, to je jev náhodný. Tento náhodný jev má ovšem zcela přesně určitelné příčiny (list uschne, vane vítr atd.). Mohli bychom udat neomezený počet podobných případů z oblasti kterékoli vědy nebo z denního života. Vrátíme se však k našemu příkladu z radioaktivity, abychom poukázali na fakt, který na první pohled se jeví překvapujícím, že totiž exponenciální zákon radioaktivního rozpadu neplatí proto, že by snad existoval nějaký vztah mezi rozpady jednotlivých atomů, nýbrž právě naopak platí proto, že žádný takový vztah neexistuje, právě proto, že rozpady jednotlivých atomů jsou navzájem naprosto nezávislé.

Příklad radioaktivního rozpadu objasňuje nám i to, že vzhledem k určitému jednotlivému náhodnému jevu nelze mluvit o nutnosti (nanejvýš můžeme říci tolik, že každý jednotlivý atom se dříve či později rozpadne), že však nutné zákonitosti se objeví tehdy, jestliže zkoumáme velké množství náhodných jevů. Jednotlivý isolovaný náhodný jev, který se nemůže za týchž okolností znovu opakovat, není předmětem počtu pravděpodobností a nemůže být předmětem žádného vědeckého bádání. To je nutné zdůraznit jednak proto, že v běžné mluvě se užívá výrazu „náhodný" právě při charakterisaci takových ojedinělých, překvapujících, neočekávaných jevů, ale na druhé straně i proto, že se v počtu pravděpodobnosti objevoval nesprávný názor, podle něhož i zkoumání takových ojedinělých případů domněle může být předmětem počtu pravděpodobnosti. K takovým otázkám, jako na př. „jaká je pravděpodobnost, že na Marsu je život", nebo „jaká je pravděpodobnost, že Bronštejn porazí Botvinnika", počet pravděpodobnosti žádný vztah nemá a ani mít nemůže. Fakt, že počet pravděpodobnosti se zabývá těmi náhodnými jevy, které se vyskytují hromadně, musíme zdůraznit už z toho důvodu, že nás to povede k možnosti porozumět pojmu pravděpodobnost. Připomeňme již nyní, abychom mohli mluvit o pravděpodobnosti nějakého jevu, že je nezbytné zjistit a vzít v úvahu všecky okolnosti, které mají vliv na příslušný jev a které vůbec mohou být předmětem úvahy. Změnou těchto okolností se vlastně změní celý jev. Když na př. v tkalcovně je v činnosti více strojů a když všecky stroje vyrábějí z vláken téže jakosti touž látku, pak můžeme mluvit o pravděpodobnosti náhodného přetržení vlákna. Je však známo, že četnost přetržení vlákna je ve značné míře závislá na počtu otoček stroje a na vlhkosti vzduchu. O pravděpodobnosti přetržení vlákna je tedy možné mluvit pouze tehdy, jestliže jsou dány hodnoty těchto faktorů. Abychom znovu připomenuli to, co jsme si už řekli o ojedinělých jevech bez charakteru hromadnosti, uveďme jako příklad, že přetržení vlákna, jehož následkem je, že se nám utrhl knoflík u kabátu, je též náhodným jevem, který však přirozeně nemůže být předmětem vědeckého bádání.

Přirozeně není možné vzít v úvahu všecky ty faktory, které mají vliv na zkoumaný náhodný jev. Vždyť právě takové jevy nazýváme náhodné, u kterých počet působících příčin a faktorů je tak veliký a vztahy mezi nimi jsou tak spletité, že je prakticky nemožné vzít je v úvahu všecky. Dokonce je tomu tak, že kdybychom je všecky vzali v úvahu, odvrátili bychom pozornost od podstaty věci. V oblasti přírodních věd je možné vytknout dvě nejdůležitější schemata jevů, které mohou být předmětem zkoumání.

Do prvého obecně známého schematu náležejí ty jevy, u kterých je v podstatě možná celková důkladná znalost všech okolností, takže se dá s určitostí předpovědět, co se stane. Tak na př. jestliže destilovanou vodu při tlaku vzduchu 760 mm zahřejeme na 100 °C, pak přejde do varu, takže určitý souhrn předpokladů (destilovaná voda, tlak vzduchu 760 mm, teplota 100 °C) nutně vyvolá vznik určitého jevu (var vody). Takové schema nazýváme jednoduchým kausálním schematem. Druhé schema, které nazýváme stochastickým (slovo stochastický má týž význam jako slovo pravděpodobnostní; řecké στοχάζομαι znamená po česku „hádám") charakterisuje, že podmínky a okolnosti, ke kterým můžeme přihlédnout, nepostačí k tomu, abychom mohli s úplnou jistotou říci, co se stane, ale dávají nám možnost utvořit si nějakou představu o průběhu jevu. Tak na př. jestliže v rozmnožovači elektronů padne jeden elektron na desku, není možné na základě všech v úvahu přicházejících fysikálních údajů říci, zda deska vymrští sekundární elektrony, a v případě kladném, jaký je jejich počet. Je však možné říci, opakuje-li se takový pokus mnohokrát, kolik sekundárních elektronů průměrně vznikne, a tento průměr je přesně určen, jsou-li předepsány fysikální podmínky experimentu.

Taková stochastická schemata jsou předmětem počtu pravděpodobnosti. Mylný je však názor, jako by mezi jednoduchými kausálními schematy a stochastickými schematy byl nepřeklenutelný kontrast. To tvrdí pouze ti, kdo mají mystické názory o pojmu náhodnosti. Ve skutečnosti jsou kausální schemata pouze krajními případy takových stochastických schemat, u kterých účinek těch faktorů, které působí na vyšetřovaný jev a které nelze vzít v úvahu, je tak malý, že je možné jej zanedbat. Kausální schema je pouhou aproximací, ale ve mnoha případech je to aproximace tak přesná, že přesnější aproximace není třeba.

Klasickou oblastí kausálních schemat je mechanika. Je známo, že LAPLACE snil o takovém zobecnění kausálního schematu, pomocí kterého by bylo možné předvídat průběh kteréhokoli jevu ve světě[7]). Je jasné, že tato Laplaceova představa, která je charakteristická pro mechanický materialismus, je

[7]) *Pierre-Simon Laplace:* Essai philosophique sur les probabilités, Paris, Gauthier-Villars, 1921, I. sv., str. 3. Poukazujeme především na tuto větu: „Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrass rait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux."

naivní. Zkoumáme-li blíže libovolný problém z mechaniky, shledáme, že jde vlastně jen o krajní případ stochastického schematu.

Všimněme si na př. tohoto jednoduchého problému: Podle zákonů mechaniky, vystřelíme-li z děla střelu při daném úhlu s vodorovným směrem a při dané počáteční rychlosti, pak střela v první aproximaci opíše parabolu. Přesnějším zkoumáním zjistíme, že v důsledku odporu vzduchu dráha střely není přesná parabola, nýbrž balistická křivka, jejíž klesající větev je příkřejší. Potud běží stále ještě jenom o jednoduché kausální schema. Avšak dělostřelci vědí, že místo dopadu střely předpovědět přesně je nemožné a že zásah cíle střelou i při nejpřesnějších měřeních stále ještě závisí na náhodě. Existuje totiž celá řada činitelů, jako proudění vzduchu, některé detaily složení střely, chvění hlavně děla, nepatrné nepravidelnosti tvaru střely, t. j. řada příčin, jejichž existence je nám známa, ale jejichž účinek nemůžeme vzít v úvahu (vždyť je na př. nemožné vzít v úvahu polohu a rychlost všech těch molekul vzduchu, se kterými se střela na své dráze setká), které však mají vliv na místo dopadu střely. Právě proto je i při tomto jednoduchém problému z mechaniky nutný počet pravděpodobnosti, kterého se skutečně při dělostřelbě hojně používá.

Podobně také každé jiné na prvý pohled kausální schema ve fysice, v chemii atd. při důkladnějším rozboru se stane schematem stochastickým, ačkoli ovšem praktický význam není vždy tak značný jako v právě uvedeném příkladě. Tak na př. tlak plynu v uzavřené nádobě je dán známým Boyle-Mariotte-Gay Lussacovým zákonem, který jsme si zvykli považovat za jednoduchý kausální zákon. Ve skutečnosti vzniká tlak plynu z nárazů jednotlivých molekul plynu na stěnu nádoby, a kolik molekul průměrně narazí na stěnu za jednotku času a jaká je průměrná rychlost nárazů, na tom závisí průměrný tlak plynu, a kolem této hodnoty nastávají menší kolísání pozorovatelné fluktuace.

Vyšetřování chování plynů založené na počtu pravděpodobnosti je předmětem kinetické theorie plynů. Tato theorie umožňuje odpovědět na otázky po chování plynů s každého prakticky významného hlediska právě proto, že pohyb plynu a nárazy molekul na stěny zkoumá jakožto náhodné jevy. Dá se na př. dokázat, že vyjdeme-li z jakéhokoli počátečního uspořádání polohy a rychlosti molekul, vždycky se následkem pohybu molekul, nárazů jedné molekuly na druhou, jakož i nárazů molekul na stěny vytvoří takový stav, že molekuly plynu jsou rozděleny skoro rovnoměrně po celé nádobě. Z iniciativy H. Steinhause[8]) dokázali tento fakt Pavel Turán a Evžen Egerváry[9]) při jistých zjednodušujících předpokladech přísně deterministicky na základě klasické mechaniky. Jejich výsledky mají se zásadního stanoviska velký význam, neboť ukazují, že rovnoměrné rozložení molekul plynu v nádobě, které

[8]) *H. Steinhaus:* Sur les fonctions indépendantes VII, Studia Math. *12* (1949), str. 1—20, I.

[9]) *Egerváry J.* és *Turán P.*, A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiröl. Magy. Tud. Akad. III o. közl. I 2—4, 303—313.

je typickým příkladem zákonitosti náhodných hromadných jevů, není následkem jakési mystické neurčitosti, nýbrž vyplývá přísně kausálním způsobem ze zákonů mechaniky molekul, z čehož je patrné, že také náhodné jevy mají přesně určené příčiny. Výklad kinetické theorie plynů pomocí kausálního schematu je tedy v zásadě možný, třebaže v praxi jej dovedeme provést jen při velmi značném zjednodušení předpokladů a jen pro nejjednodušší jevy. Ale i v případě takových otázek, kdy výklad pomocí kausálního schematu je možný, musíme v kinetické theorii plynů (a podobně u jiných náhodných jevů) dát bezvýhradně přednost výkladu pomocí stochastického schematu, který je mnohem jednodušší a rychleji vede k cíli. V čem záleží velká přednost stochastického schematu? V tom, že nebere v úvahu ty příčiny se spletitým mechanismem účinků, které jenom překážejí přehlednosti a zakrývají podstatu jevů. Tak na př. stochastické chápání kinetické theorie plynů se nezabývá vlastnostmi počátečního stavu, protože se dá ukázat, že rovnovážný stav, nastávající za velmi krátkou dobu, je do značné míry nezávislý na tomto počátečním stavu a je tedy úplně zbytečné a bezúčelné brát v úvahy podrobnosti počátečního stavu. Samozřejmě máme u počátečního stavu také takové jednoduché údaje (celková energie), které jsou podstatné, ale ty bere v úvahu přirozeně i stochastická methoda výkladu. Ale na př. počáteční rozložení energie na jednotlivých molekulách je údaj, který není třeba brát v úvahu, protože se následkem srážek molekul vytvoří za krátkou dobu takový stav, ve kterém rozložení energie na molekulách plynu se řídí zákonitostí nezávislou na počátečním stavu, čemuž odpovídá také rozložení rychlostí molekul nezávislé na počátečním stavu plynu (t. zv. Maxwellův zákon o rychlostech). Podobně také Newtonův zákon ochlazování jakož i barometrický výškový vzorec jsou též kausální zákony, které se dají odůvodnit větami počtu pravděpodobnosti, a u kterých se dají zjistit menší fluktuační ochylky, ale tyto fluktuace se dají předvídat na základě počtu pravděpodobnosti. Abychom uvedli ještě jeden příklad: jestliže v nádobě s vodou rozpustíme dvě tuhé látky, buďtež to látky A a B, které na sebe navzájem chemicky působí, pak je známo, že rychlost průběhu reakce bude při splnění určitých známých podmínek úměrná součinu koncentrací obou látek (bimolekulární reakce). Zkoumáme-li tuto jednoduchou kausální větu blíže, shledáme, že se molekuly (ionty) těchto látek ve vodě volně pohybují, a součin koncentrací vlastně udává, kolikrát se *průměrně* stane za časovou jednotku, že se molekula A srazí s molekulou B. Tedy uvedený chemický zákon je vlastně statistický zákon týkající se hromadného jevu náhodné srážky molekul. Při důkladnějším rozboru se ukazuje, že skoro všecky zákony fysiky a chemie, které se „ve velkém" jeví jako kausální zákony, stanou se „v malém" stochastickými.

Můžeme tedy shrnout tak, že předmětem počtu pravděpodobnosti jsou takové determinované jevy, které se odehrávají hromadně za totožných okolností, které je možno neomezeně opakovat, u kterých však vedle těch činitelů, které je možno vzít v úvahu, působí ještě jiní činitelé, jejichž existence a povaha je sice známa, ale jejichž působnost je nepřehledná, kteří tudíž znemožňují přesnou předpověď průběhu jevů. Výklad takových jevů založený na jejich náhodném charakteru nazýváme výkladem pomocí stochastického schematu. Náhodný charakter těchto jevů není v rozporu s tím, že tyto náhodné jevy mají determinované příčiny, nýbrž právě v důsledku determinovanosti jejich příčin se dají stanovit v oblasti náhodných hromadných jevů nutné zákonitosti, jejichž zkoumání je hlavní úlohou počtu pravděpodobnosti. Ačkoli podrobnější zkoumání ukazuje, že každý přírodní jev patří do uvedeného (stochastického) schematu, počet pravděpodobnosti se zabývá pouze těmi jevy, u kterých přibližný popis jednoduchým kausálním schematem není možný, je příliš spletitý a není dostatečně přesný a při tom neodhaluje podstatu jevu. Které otázky patří do oblasti počtu pravděpodobnosti, nedá se stanovit předem, neboť oblast počtu pravděpodobnosti stále roste, stále se vyvíjí. Vývojem vědy se stává potřebným u jevů, které před tím byly zkoumány jenom v hrubých rysech kausálně, aby se prozkoumaly fluktuace dříve zanedbávané. Na druhé straně se také může stát, že vývojem našich vědomostí dojdeme k hlubšímu poznání takových jevů, které se dnes dají popsat jenom stochastickým schematem, a že se stane možným jejich částečný nebo úplný výklad kausálním schematem. Abychom mohli zjistit, jaké konkretní prakticky užitečné výsledky může poskytnout vyšetřování hromadných náhodných jevů pomocí počtu pravděpodobnosti, musíme si vyjasnit pojem pravděpodobnosti, neboť z možnosti číselného vyjádření pravděpodobnosti vyplývá, že počet pravděpodobnosti může poskytnout nejen výsledky kvalitativní, nýbrž i kvantitativní.

Ale na základě toho, co bylo dosud řečeno, můžeme vyslovit závěr, že jen dialekticko-materialistický světový názor je s to, dát nám správnou představu o pojmu náhodného a nutně determinovaného, resp. o protikladu a jednotě těchto pojmů. Metafysický názor nedovede překlenout tento protiklad[10]) a buďto nemůže pochopit pojem náhodnosti nebo jej chápe mysticky. A tak pouze dialektický materialismus nás může vést ke správnému rozpoznání předmětu a úkolů počtu pravděpodobnosti.

II. Pojem pravděpodobnosti

1. *Je pravděpodobnost objektivní nebo subjektivní?*

U pojmu pravděpodobnosti je s filosofického stanoviska základní otázkou, která je ústřední otázkou dodnes trvajícího ideologického boje různých názorů, zdali pravděpodobnost případu vyjadřuje objektivní fakt, či zda to je

---

[10]) *B. Engels:* Dialektika přírody, vyd. Svoboda, Praha 1950, str. 185: Věta, na kterou tu poukazujeme, je tato: „Jiný protiklad, v jehož zajetí je metafysika, je protiklad náhodnosti a nutnosti."

subjektivní soud. Podle důsledně materialistického stanoviska v této otázce je pravděpodobnost objektivně platná hodnota nezávislá na vědomí a na znalostech pozorovatele, která udává, v jakém přibližném poměrném počtu pokusů při provedení velkého počtu pokusů nastane očekávaný případ. Je tedy pravděpodobnost číslo, jež má objektivní platnost a pravděpodobnost případu má i tehdy objektivní hodnotu, jestliže ji neznáme nebo jestliže ji známe jenom přibližně. Subjektivní soud vztahující se na možnost uskutečnění případu můžeme považovat za výsledek snahy usilující o určení objektivní pravděpodobnosti případu, ale jestliže uvedený soud nemá tento nárok nebo jestliže tento nárok neodpovídá vědeckým podmínkám, pak nemá a nemůže mít nic společného s počtem pravděpodobnosti a s vědou vůbec.

Obvyklý argument idealistů a positivistů proti materialistickému názoru hlásajícímu objektivní povahu počtu pravděpodobnosti je týž, který uvádějí proti základním zásadám materialismu. Podle nich nejsme oprávněni přisuzovat pravděpodobnosti jevu objektivní realitu, protože tuto pravděpodobnost známe obecně jenom přibližně a na její hodnotu můžeme soudit jenom nepřímo na základě zkušenosti. Podle známého zvyku idealistů právě tak nazývají „metafysickým" důsledně materialistické stanovisko o objektivní podstatě pravděpodobnosti, jako považují za metafysickou základní větu materialismu o existenci hmotného světa nezávisle na našem vědomí. Falešné usuzování idealistů v otázce pravděpodobnosti je právě tak prázdné a bezobsažné, jako jejich „argumenty" uváděné proti objektivní realitě materiálního světa, a také se dají právě tak vyvrátit poukazem na zkušenost a na praxi.

Kdyby pomocí pokusů určená pravděpodobnost nějakého případu (na př. při radioaktivním rozpadu, při jevech difuse nebo při jevech emise elektronů) nevyjadřovala na našem vědomí nezávislý zákon pohybu nebo přeměny hmoty, musili bychom považovat za „zázrak", že se dá pomocí počtu pravděpodobnosti průběh těchto jevů předem určit a že zkušenost v plné míře potvrzuje výsledky těchto výpočtů. Vzdor tomu se idealisté znovu a znovu vracejí k tomu svému názoru, že pravděpodobnost případu je měrou naší „víry", našeho „očekávání", že nastane uvažovaný případ, a tak podle nich může mít každý člověk jiný pravděpodobnostní „úsudek" o témž případě, který se může více nebo méně lišit podle subjektivních vědomostí nebo podle letory jednotlivců.

Toto stanovisko zastával na př. DE MORGAN[11]) (1808), který napsal, že „měrou pravděpodobnosti rozumíme vlastně míru naší víry nebo že je třeba, abychom jí tuto míru rozuměli ..." Objektivní pravděpodobnost úplně zavrhují a slovo pravděpodobnost vysvětlují tak, že znamená stav našeho mínění ve vztahu k nějakému tvrzení o případě, který má v budoucnosti nastat, nebo o libovolné jiné věci, o které nemáme absolutní vědomost. S. MILL[12])

[11]) Formal Logic, str. 172.
[12]) Logic, 2. sv., str. 63.

(1875) píše: „Nesmíme zapomenout, že pravděpodobnost případu není vlastností toho případu, nýbrž je to prostě název pro míru těch argumentů, na základě kterých my nebo někdo jiný očekáváme uskutečnění tohoto případu." S. JEVONS[13]) (1907) píše: „Pravděpodobnost náleží cele k vědomí; důkazem toho je fakt, že různí lidé očekávají uskutečnění téhož jevu v témž čase s podstatně různými pravděpodobnostmi."

Výraz „subjektivní pravděpodobnost" doporučuje také COURNOT (1843), který doporučuje k definování pravděpodobnosti „zásadu nepostačujícího důvodu", o které se v dalším ještě zmíníme. Týž názor má v přítomnosti LORD KEYNES (ostatně buržoasní ekonom), B. DE FINETTI a různí buržoasní matematikové a filosofové.

Na konkretním příkladu se dá nejlépe konfrontovat subjektivní a objektivní stanovisko. Vyšetřujme na př. klasické thema počtu pravděpodobnosti, které mělo také význam při vytváření počtu pravděpodobnosti, které však nyní má už jen význam školského příkladu, totiž házení kostkou.

Při házení kostkou, stejně jako u jiných podobných hazardních her (házení mincí, ruleta atd.) můžeme použít klasického způsobu výpočtu pravděpodobnosti (který mnozí nazývají také klasickou definicí pravděpodobnosti, ačkoli jej při objektivním chápání pravděpodobnosti nemůžeme považovat za definici), který praví, že jestliže všecky možné výsledky pokusu mají touž šanci na uskutečnění, jinými slovy, jsou všecky stejnou měrou možné, přicházejí rovnoprávně v úvahu, jsou stejně pravděpodobné, pak pravděpodobnost případu spojeného s pokusem dostaneme, jestliže počet všech možností příznivých případů dělíme počtem všech možností vůbec.

Tak na př. u geometricky pravidelné kostky z homogenního materiálu přichází rovnoprávně v úvahu padnutí na kteroukoli ze stěn vyznačených číslicemi 1 až 6, takže pravděpodobnost, že padne určité číslo, je rovna $\frac{1}{6}$ a pravděpodobnost, že padne číslo sudé, tedy 2, 4 nebo 6, je rovna $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Tento klasický způsob výpočtu pravděpodobností bývá brán, jak jsme už připomenuli, za definici pravděpodobnosti, a proti takové definici se namítá, že obsahuje bludný kruh, jelikož se při definici pravděpodobnosti užívá pojmu pravděpodobnosti samého, neboť tvrzení, že dva případy mají touž šanci na uskutečnění, je jiný způsob vyslovení výroku, že mají touž pravděpodobnost.

Jestliže však výrok „počet příznivých možností dělený počtem všech možností vůbec" nepovažujeme za definici, nýbrž za způsob výpočtu pravděpodobnosti v jednoduchých případech, kdy rovnost pravděpodobností jednotlivých možností můžeme stanovit na základě objektivních fysikálních úvah (v uvedeném příkladě je to geometrická a fysikální souměrnost kostky), pak tato námitka padá sama sebou.

Jestliže nyní předpokládáme, že kostka je falešná, na př. že není z homogenního materiálu nebo že není geometricky pravidelná, pak zřejmě nepadne

[13]) Principle of science, str. 198.

s touž pravděpodobností na kteroukoli ze svých stěn. Podle hlasatelů subjektivní povahy pravděpodobnosti jsou pro hráče, který se domnívá, že kostka je pravidelná, všecky stěny stejně pravděpodobné i tehdy, když kostka ve skutečnosti je falešná. Tento příklad už sám o sobě jasně prokazuje neudržitelnost subjektivního chápání pravděpodobnosti. Při odůvodnění, že všecky stěny mají touž pravděpodobnost, odvolávají se stoupenci subjektivní povahy pravděpodobnosti na to, že rozumný hráč nemá důvod k předpokladu, že jednotlivé stěny kostky se navzájem liší. V souvislosti s tím se někteří odvolávají na mlhavou „filosofickou zásadu", zvanou „zásadou nepostačujícího důvodu" (Prinzip des mangelnden Grundes). (Na př. de Morgan píše: „zdá se mi, že mnohé naše úsudky spočívají na zásadě, která se v matematice (?) nazývá zásadou nepostačujícího důvodu".) Není třeba velké moudrosti, abychom poznali, že taková zásada, která se chce opírat o naši nevědomost, je naprosto neudržitelná. Kries se pokusil zachránit tuto domnělou zásadu tím, že ji překřtil na „zásadu nutného důvodu" (Prinzip des zwingenden Grundes). Je však zřejmé, že změnou názvu se prázdná „zásada" nikdy nestane obsažnou.

Vskutku fakt, že pravidelná kostka padne se stejnou pravděpodobností na kteroukoli stěnu, není následkem naší nevědomosti, nýbrž objektivních fysikálních vlastností, její symetrie, a můžeme jej pokusně kontrolovat mnohonásobným házením kostky. Věda nezakládá své výsledky na tom, co nevíme, a neopírá své úsudky o domnělé „zásady", nýbrž o zkušenost a o praxi. Pramenem mylného názoru o subjektivní povaze pravděpodobnosti je částečně fakt, že zakladatelé počtu pravděpodobnosti neměli v této otázce jasno a následkem toho se výrazy a koncepce se subjektivní příchutí staly tradičními v literatuře počtu pravděpodobnosti, a rovněž že přejímali názvy pojmu počtu pravděpodobnosti z běžné denní řeči, která skutečně dává těmto výrazům, i samému slovu „pravděpodobný", subjektivní význam. (Podobným výrazem se subjektivní příchutí je na př. zastaralý název „matematická naděje".) Výraz „pravděpodobný" také v jiných jazycích poukazuje na subjektivní obsah (na př. wahrscheinlich). Rozhodující příčinou rozšířenosti subjektivního chápání pojmu pravděpodobnost však není toto, nýbrž fakt, že matematikové a filosofové, kteří se zabývali počtem pravděpodobnosti, až na sovětské matematiky a některé západní pokrokové vědce, nestáli na basi důsledného materialistického světového názoru, což by je bylo uchránilo od takových ideologických omylů, nýbrž značnou měrou byli a jsou vědomými hlasateli idealisticko-agnostického nebo positivistického světového názoru.

Tak na př. de Finetti[14]), který se prohlašuje za Humeova stoupence, hlásá, že to, do jaké míry je nějaký případ pravděpodobný, může být jenom předmětem subjektivního soudu, tak jako to, do jaké míry je mi někdo sympatický.

[14]) Viz na př. *B. de Finetti*, Le vrai et le probable, Dialectica 3 (1949), str. 78—92.

Podle jeho názoru to, do jaké míry je pro X.Y. nějaký případ sympatický, dá se měřit tím, jakou částku peněz by byl ochoten vsadit proti 1 Kčs (1 forintu) na to, že tento případ nastane.

Podle něho je třeba ke každému výroku, který se vztahuje na pravděpodobnost nějakého případu, ještě přidat údaj, pro koho to platí, právě tak jako o sympatii jsou možné pouze výroky podobné povahy. Je pravda, že takových krajních idealistů jako de Finetti, který pravděpodobnost řadí mezi psychologické pojmy, bylo i v minulosti jenom málo. Toto stanovisko je i mezi idealisty křiklavé a ukazuje naprostý úpadek celé idealistické filosofie.

Avšak dějiny počtu pravděpodobnosti ukazují, že se v otázkách počtu pravděpodobnosti nedovedli vyznat ani ti, kteří stáli na spontánním materialistickém stanovisku. Tak na př. J. Bernoulli, který jako prvý poznal na počátku 18. století, že význam zákonů počtu pravděpodobnosti daleko přesahuje meze hazardních her, z nichž vznikl, který objevem zákona velkých čísel učinil v počtu pravděpodobnosti krok revolučního významu a který ve svém bádání stál na spontánně materialistickém stanovisku, přece jen tu a tam sklouzl na idealistické chápání pravděpodobnosti. Tak na př. od něho pochází výrok, že „pravděpodobnost je stupeň jistoty a liší se od ní jako část od celku“[15] (probabilitas est gradus certitudinis et ab hac differt ut pars a toto), což může vyvolat nedorozumění v tom směru, že se tu myslí na subjektivní pravděpodobnost; dále pak napsal, že „pravděpodobnost se dá odhadnout podle počtu a váhy argumentů, které dokazují nebo nasvědčují, že něco je, bude nebo bylo; vahou argumentu musíme rozumět jeho průkaznou sílu.“[16] To už je víc než pouhé sklouznutí a vyjadřuje subjektivní chápání pravděpodobnosti. Subjektivní chápání pravděpodobnosti se u mnohých projevovalo tím, že pravděpodobnost nepřisuzovali samým jevům, které se ve skutečnosti odehrávají, nýbrž jen soudům, které uskutečnění těchto jevů tvrdí.

Tak praví na př. Boole (1854)[17]: „Je ještě jiný způsob, jak můžeme nazírat na všecky otázky, kterými se zabývá počet pravděpodobnosti; ten záleží v tom, že případy nahradíme tvrzeními, která vyslovují uskutečnění případu v minulosti nebo v budoucnosti, a na číselnou hodnotu pravděpodobnosti nazíráme tak, že se vztahuje na pravděpodobnost těchto tvrzení a ne na uskutečnění případů, o jejichž uskutečnění je v těchto tvrzeních řeč.“ Takto chápal pravděpodobnost Bolzano a také Peano. Borel, který má ostatně v počtu pravděpodobnosti nesporně veliké zásluhy a kterého je možno do jisté míry považovat za předchůdce Kolmogorovovy theorie, zastává v některých zásadních otázkách naprosto nesprávný názor i ve své poslední knize[18]) (1949), kde vedle objektivní pravděpodobnosti, kterou i on považuje za základní, připouští také

[15]) *J. Bernouilli:* Ars coniectandi, Basilej 1713, str. 211.
[16]) Loc. cit., str. 214.
[17]) Laws of Thought, str. 247.
[18]) *E. Borel:* Élements de la théorie des probabilités, Paris, 1949.

pravděpodobnost subjektivní. Podstatou jeho argumentace je, že o výsledku ojedinělého případu — jako na př. o výsledku jedněch dostihů — může existovat jen subjektivní úsudek. Je pravda, že o výsledku ojedinělých případů, které nelze za totožných okolností vícekrát opakovat, může existovat jen subjektivní soud. To však dokazuje pouze to, že v takovýchto případech nelze mluvit o pravděpodobnosti, takové případy nemohou být předmětem vědeckého bádání. I když formulujeme nějakou hypothesu o pravděpodobnosti takových případů, nemůžeme ji nikdy kontrolovat, neboť případ buď nastane, nebo nenastane, a obě možnosti jsou slučitelné s jakoukoli pravděpodobností mezi 0 a 1. Kontrola našeho předpokladu o pravděpodobnosti případu je založena obecně na pozorování četnosti případu (četností případu rozumíme, že když provedeme velký počet pokusů, dělíme počet těch pokusů, ve kterých nastal zkoumaný případ, celkovým počtem všech pokusů). Pravděpodobnost případu je ta číselná hodnota, kolem které osciluje četnost toho případu. Je tedy pravděpodobnost případu číslo, které vždy padne mezi 0 a 1. Tak na př. náš předpoklad, že kostka je pravidelná a že v důsledku toho pravděpodobnost, aby padla na kteroukoli ze svých stěn, je rovna $\frac{1}{6}$, dá se kontrolovat tak, že provedeme velký počet vrhů a obdržené výsledky zkoumáme methodou matematické statistiky. Tento postup je dosti složitý, neboť ani v případě naprosto pravidelné kostky nemůžeme očekávat, že při 600 vrzích padne kostka na každou stěnu právě stokrát, nýbrž menší odchylky jsou zajisté možné.

Počet pravděpodobnosti vypracoval přesné postupy pro rozhodnutí, zdali odchylky, které v daném případě pozorujeme, jsou prostě náhodné oscilace, či zda jsou vyvolány nepravidelnostmi kostky. Není zde k tomu místa, a pro vyjasnění zásadního stanoviska není ani třeba, abychom zde líčili podrobnosti těchto postupů; pro nás je nyní důležité jen to, že počet pravděpodobnosti takovými postupy disponuje.

Vrátíme-li se k Borelovým názorům, musíme ještě připojit, že vzhledem k ojedinělému případu nemůžeme mluvit o pravděpodobnosti nejen proto, že ji nelze pokusně určit, nýbrž také proto, že pravděpodobnost ojedinělého případu nemá smysl. Abychom to jasně poznali, musíme přesněji stanovit, co máme rozumět pod pravděpodobností případu.

Už v předcházejícím jsme řekli, že náhodným případem rozumíme případ, který za určitých okolností nastat může, ale nemusí. Každou realisaci těchto okolností nazveme pokusem.

Výsledkem pokusu může být uskutečnění uvažovaného případu nebo jeho neuskutečnění (uskutečnění něčeho jiného). Je-li tedy řeč o tom, že pravděpodobnost nějakého případu je rovna p, tu nemyslíme při tom na žádné určité provedení pokusu, nýbrž na jakékoli jeho provedení vůbec. Jinými slovy, jestliže mluvíme o pravděpodobnosti případu, pak máme na mysli uskutečnění případu při pokuse konaném nebo pozorovaném za daných okolností na kterémkoli místě a v kterémkoli čase.

Tedy ojedinělý případ nemá žádnou pravděpodobnost, a to ani tehdy, jestliže se dá za okolností v podstatě stejných neomezeně opakovat, nýbrž o pravděpodobnosti mluvíme jenom ve spojení s kategoriemi případů. Jestliže mluvíme na př. o pravděpodobnosti rozpadu atomu uranu pod vlivem vnikajícího neutronu, pak nemáme na mysli rozpad určitého atomu pod vlivem určitého elektronu, nýbrž rozpad libovolného atomu radia na libovolném místě a v libovolném čase pod vlivem kteréhokoli neutronu.

V případech, které se dají neomezeně opakovat a u hromadných jevů se toto rozlišování zdá logickou finesou a činí dojem bezvýznamné nuance. Ve skutečnosti má však toto rozlišování základní význam, neboť bez něho nelze rozumět objektivnímu pojmu pravděpodobnosti, dále pak jenom toto rozlišování ukazuje jasně, proč nemá smysl mluvit o pravděpodobnosti ojedinělého případu. Zavedením pojmu kategorie případů se nám vyjasní, že když prozkoumáme kostku geometricky i fysikálně a zjistíme, že je úplně pravidelná, pak má smysl mluvit o pravděpodobnosti toho, že při jediném vrhu kostkou vyjde šestka, a to i tehdy, jestliže kostku po vrhu zničíme a nikdo s ní další vrhy provádět už nemůže. Neboť výsledkem předcházejícího zkoumání bylo zjištěno, že daná kostka patří mezi pravidelné kostky a že náš vrh patří do kategorie vrhů pravidelnou kostkou, a v této kategorii známe pravděpodobnost výskytu šestky. Zničením kostky jsme nezničili uvažovanou kategorii případů a s representanty této kategorie můžeme provádět další pokusy v neomezeném počtu. Dále se vyjasní také to, že když na základě zkušenosti určíme pravděpodobnost kategorie případů pozorováním četností a matematickým zhodnocením tohoto pozorování, že pak můžeme použít tohoto výsledku i v budoucnosti na případy náležející do téže kategorie případů, tedy na jednotlivé konkretní případy. Tak dostáváme objektivní základ pro předvídání případů, které je jednou z nejzákladnějších úloh počtu pravděpodobnosti. Od jednotlivého k obecnému a odtud zpět k jednotlivému, od konkretního k abstraktnímu a odtud zpět ke konkretnímu, tento leninský zákon dialektiky se uplatňuje i v počtu pravděpodobnosti.

Pojem pravděpodobnosti jeví překvapující obdobu s pojmem masy, pokud jde o pojem rozptylu pravděpodobnosti a rozptylu masy. Tato obdoba není jen formální, zdánlivá, nýbrž je velmi hluboká. Nepochybně se měření masy děje mnohem jednodušší a bezprostřednější cestou než určení (měření) pravděpodobnosti případu na základě zkušenosti. Chápeme-li pravděpodobnost objektivně, můžeme mluvit o měření pravděpodobnosti případu a musíme nazírat na tento postup tak, že se jenom formálně a ne obsahově liší od měření kterékoli jiné fysikální veličiny. V nejjednodušším případě se „měření" pravděpodobnosti děje tak, že provádíme opětovně posloupnosti velké řady pokusů, v těchto posloupnostech pozorujeme četnost uvažovaného případu a zkoumáme, zdali tato četnost vykazuje poměrnou stálost, a jestliže ano, okolo které hodnoty osciluje. Tato hodnota bude pravděpodobnost případu. Přirozeně dává pokusné stanovení pravděpodobnosti jen přibližnou hodnotu stejně jako každé měření, ale pravděpodobnost se dá určit s předepsanou přesností, zvýší-li se dostatečně počet pokusů. Ve mnoha případech si můžeme měření pravděpodobnosti usnadnit tím, že z určitých theoretických úvah dojdeme k nějaké představě, pomocí které si můžeme utvořit hypothesu o uvažované pravděpodobnosti a tuto hypothesu pokusně kontrolujeme. Jsou ovšem také případy, ve kterých se pravděpodobnost neurčuje přímo, nýbrž jinou cestou. Jestliže určíme pokusně pravděpodobnost nějakého jednoduššího případu, můžeme pak usuzovat na pravděpodobnosti jiných složitějších případů na základě logických vztahů mezi těmito případy a pomocí vět z počtu pravděpodobnosti. Tudíž určení pravděpodobnosti se ve většině případů obecně děje nepřímo. V souvislosti s tím musíme však poukázat na to, že měření masy, na př. elektronu nebo stálice, je také často možné jenom nepřímou cestou. Přes to nikoho se zdravým rozumem nemůže napadnout (s výjimkou fysikálních idealistů), aby řekl, že masa elektronu vyjadřuje naši víru vztahující se k rozměrům elektronu. Právě tak absurdním a nevědeckým stanoviskem je každé chápání pravděpodobnosti jako veličiny subjektivní povahy.

Abychom vymezili v hlavních rysech pojem pravděpodobnosti, musíme ještě upozornit na jednu velmi důležitou okolnost. U náhodného hromadného jevu nemůžeme bezpodmínečně a vždycky mluvit o jeho pravděpodobnosti, nýbrž podmínkou je, aby četnost tohoto jevu jevila poměrnou stálost; nemůžeme stanovit pravděpodobnost jevu na základě jediného pozorování četnosti, dokud nezkontrolujeme, že tato četnost vykazuje poměrnou stálost. Jiná věc je, že vývoj počtu pravděpodobnosti umožnil také zkoumání pravděpodobnosti měnící se s časem, ale kontrola poměrné stálosti četnosti je nutná i v tomto případě, jenom je třeba jinak ji prakticky provádět. O této otázce bude řeč v následujícím oddílu ve spojení s pravděpodobností a četností.

Předcházející úvahy ukazují, že idealistické stanovisko nutně vede ke zcela chybnému chápání pravděpodobnosti, což se jeví i v praxi zcela nesprávnými úsudky. Pochopení a porozumění pravděpodobnosti jako objektivní vlastnosti jistých náhodných hromadných jevů je možné jen na základě důsledného materialistického stanoviska. V následujícím oddílu poznáme, že ani positivisté nemohli dospět ke správnému pochopení pojmu pravděpodobnosti a že také positivistické stanovisko vede k mylnému jeho chápání.

2. *Pravděpodobnost a četnost.*

Jak jsme viděli v předcházejícím oddílu, jsou pravděpodobnost a četnost neoddělitelné pojmy, souvisící navzájem jako theorie s praxí. Pravděpodobností případu je určena jeho četnost při hromadném opakování pokusu za totožných okolností, jestliže jednotlivé pokusy jsou navzájem nezávislé a výsledkem pokusu je uskutečnění nebo neuskutečnění uvažovaného případu.

Avšak souvislost mezi pravděpodobností a četností neznamená totožnost těchto dvou pojmů, nýbrž jde tu o složitou dialektickou souvislost, kterou právě vysvětlují základní věty počtu pravděpodobnosti, „zákony velkých čísel" a t. zv. „centrální limitní zákony". Souvislost mezi pojmy pravděpodobnosti a četnosti tvůrcové počtu pravděpodobnosti v hlavních rysech rozpoznali, tak na př. POISSON, od něhož pochází také název zákona velkých čísel. Ale většina nepronikala do této otázky zcela jasně, což je také pochopitelné, neboť ani mechanistický materialismus stejně jako subjektivní idealismus nebo positivismus nevedou ke správnému porozumění této souvislosti. ELLIS (1842)[19]) píše: „Se své strany nevidím rozdílu mezi soudem, že jeden případ je pravděpodobnější než druhý nebo že jeho uskutečnění se dá očekávat častěji, a mezi přesvědčením, že se při dlouhodobém pozorování prvý vyskytuje častěji". Ve skutečnosti mezi těmito dvěma tvrzeními rozdíl je, ačkoli jsou neoddělitelná, a to ten rozdíl, který máme vždy mezi příčinou a následkem. Souvislost mezi pojmy pravděpodobnost a četnost se velmi podobá souvislosti mezi pojmy masa a váha. Hlasatelé subjektivní povahy pravděpodobnosti popírali souvislost mezi pravděpodobností a četností a to samo o sobě už stačí k důkazu nevědeckosti subjektivního stanoviska. Zároveň se však v dějinách počtu pravděpodobnosti už dávno objevila i opačná krajnost, která je následek positivistického stanoviska, totiž ztotožňování pravděpodobnosti a četnosti. Tento nesprávný názor se po prvé vyskytl u Cournota (1843). Je zajímavé rozpoznat, jak se v tomto bodě spojuje subjektivní idealismus s positivismem. Cournot považuje subjektivní pravděpodobnost za prvotní, ale při tom mluví i o objektivní pravděpodobnosti, jíž rozumí právě četnost. Jeho stoupenci VENN, TIMMERDING a jiní úplně zavrhují abstraktní pojem pravděpodobnosti a uznávají jenom četnost a tu nazývají pravděpodobností. Podle tohoto chápání se nedá o pravděpodobnosti případu předem říci nic (neuznávají pravděpodobnost „a priori"), nýbrž pouze dodatečně („a posteriori") se dá zjistit, kolikrát se v provedených pokusech vyskytl uvažovaný případ, totiž jaká byla jeho četnost. Hodíme-li 100krát mincí a padne-li 52krát „líc", je podle nich v této posloupnosti vrhů pravděpodobnost líce rovna 52/100. Na takovém základě nemá ovšem smyslu otázka, kolikrát padne líc v následující posloupnosti 100 vrhů. Z toho je zřejmé, že toto chápání znamená úplné popření vědeckého charakteru pojmu pravděpodobnosti. Přes to bylo takové chápání u některých statistiků a přírodovědců populární, protože se odvolávalo na zkušenost a ne na „zásadu nepostačujícího důvodu" nebo na jinou mlhavou zásadu, která je cizí spontánně materialistickému smýšlení přírodovědců. Takové chápání pravděpodobnosti se snažil vybudovat v konsistentní theorii R. v. MISES počínajíc r. 1919, ale jak uvidíme, jeho pokus ztroskotal. Jestliže Misesova theorie vystoupila s nárokem postavit

[19]) *R. L. Ellis:* On the Foundations of the Theory of Probabilities, Transactions of the Cambridge Phil. Soc. 8 (1842), str. 4—5.

počet pravděpodobnosti na zcela nové „empirické", přírodovědecké základy a jestliže jeho theorie v různých „opravených" tvarech je do jisté míry ještě dodnes předmětem diskuse u některých badatelů počtu pravděpodobnosti, jestliže dále Mises ještě ani dnes neuznává ztroskotání své theorie a v r. 1950 vydal svou knihu v novém vydání[20]), kde setrvává na své původní koncepci, tu je třeba, abychom se jeho theorií zabývali podrobněji, a to též proto, že právě tím se objasní, že mechanistické, positivistické chápání, kterým je Misesova theorie úplně proniknuta a jejímž přívržencem je podle vlastního doznání, ztroskotá v matematice právě tak, jako ve fysice a ve filosofii. Stejně jako machisté vůbec tvrdí i Mises, že vychází ze „zkušenosti", kritisuje idealistické chápání a zdůrazňováním toho si získává stoupence. Ale už Lenin upozorňuje, že není každá theorie, která se odvolává na zkušenost, skutečně materialistickou, a upozorňuje na nutnost boje proti idealistickému chápání zastřenému materialistickým rouchem. Mises rozhodně odmítá subjektivní definici pravděpodobnosti a zdůrazňuje, že jen u hromadných jevů je možno mluvit o pravděpodobnosti. Ale abstraktního pojmu kategorie případů nemůže jako positivista dosáhnout. Mises definuje pravděpodobnost případu pomocí „kolektivu", t. j. souhrnem výsledků nekonečněkrát provedeného pokusu, a to jako limitu četnosti. Už z toho je patrné, že odvolávání na zkušenost je u Misesa jen frází, neboť ve skutečnosti nikdy nemáme k disposici výsledky nekonečněkrát opakovaného pokusu a mimo to ve skutečnosti při zvětšování počtu pokusů kolísání četnosti nikdy neustane; ve skutečnosti ani nemůžeme říci, že se četnost blíží limitní hodnotě, neboť během doby okolnosti nikdy nezůstanou nezměněné a nikdy není možné provádět neomezený počet pokusů za totožných okolností. Na tyto základní nedostatky Misesovy theorie poukázal Karel Jordan, vynikající pracovník v klasickém počtu pravděpodobnosti v naší vlasti (v Maďarsku, pozn. překl.) už ve svém díle[21]) vyšlém r. 1929. Jordana můžeme v určitém smyslu považovat za předchůdce Kolmogorovovy theorie, neboť on zdůrazňuje nutnost vybudovat počet pravděpodobnosti na základě theorie množin, ale jen na základě klasického chápání stejných možností, za které se dále nedostal. Definice pravděpodobnosti u Misesa je kromě uvedeného v základě pochybená proto, že úplně směšuje empirické prvky a matematické pojmy. Mises se často odvolává na mechaniku a tvrdí, že buduje počet pravděpodobnosti po vzoru mechaniky jako přírodní vědu. Ve skutečnosti jeho theorie má nejvýš jakous analogii s Machovým positivistickým vybudováním mechaniky. Kdybychom vybudovali mechaniku na základě Misesova počtu pravděpodobnosti, musili bychom definovat masu jako limitní hodnotu nekonečné posloupnosti měření masy. Je jasné, že něco takového není potřebné ani v mechanice ani v počtu pravděpodobnosti; mechanika připisuje každému

[20]) *R. v. Mises:* Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.

[21]) *Jordan K.:* Véletlen, valószínüség és természeti törvény (Náhoda, pravděpodobnost a přírodní zákon). Athenaeum 1929, sešit 5—6.

tělesu zcela určitou masu, která má objektivní realitu, nezávislou na našem vědomí, a kterou určujeme vědeckými měřeními (konečným a ne nekonečným počtem měření). Úloha mechaniky záleží v tom, že vyšetřuje pohyb těles známé masy pod účinkem daných sil, a stanovení masy jednotlivých konkretních těles je úkolem pokusu, založeného ovšem na zákonech mechaniky. V podstatě je situace táž i v počtu pravděpodobnosti. Není úlohou počtu pravděpodobnosti formálně definovat pravděpodobnost případů (právě ztroskotání Misesovy theorie ukázalo, že je to nemožné), nýbrž vycházet z pravděpodobnosti některých případů, z toho usuzovat na pravděpodobnost jiných složitých případů a předvídat v hlavních rysech průběh náhodných jevů. Stanovení hodnot výchozích pravděpodobností není úlohou theorie, nýbrž úlohou pokusů, ke kterým ovšem theorie poskytne zásadní základy. K určení pravděpodobnosti má počet pravděpodobnosti vhodné prostředky právě tak, jako fysika má vybudovány methody pro měření masy. Methody „měření" pravděpodobnosti, které obecně nejsou bezprostřední, ale které jsou vždy konec konců založeny na pozorování četnosti, vyplývají z method matematické statistiky. Misesova definice pravděpodobnosti je až nápadně podobná snahám, které směřovaly k vytvoření „empirické" geometrie a kvetly ve fašistickém Německu a Italii. Tuto theorii popularisovali zejména B. Mania a H. Dingler, třebaže její myšlenka pochází od Pasche a od Hjelmsleva. Dingler rozhodně tvrdí, že empirická geometrie je organickou součástí nacistických „idejí".[22]) Přívrženci empirické geometrie chtěli definovat geometrický bod jako limitní hodnotu kousíčku křídy, jehož rozměry se neomezeně zmenšují. Arciže právě tak jako Misesův počet pravděpodobnosti i empirická geometrie se zakládá na neporozumění matematické abstrakce a na jejím positivistickém skreslení. Správnou materialistickou theorii počtu pravděpodobnosti, jak jsme už připomenuli, vytvořili sovětští matematikové; jejich theorie je v ostrém kontrastu s Misesovou theorií a je založena na dialektickém chápání matematické abstrakce. Avšak nežli přistoupíme k výkladu této theorie, musíme poukázat na to, že Misesova theorie i se stanoviska theoretické matematiky vedla do slepé uličky a ukázala se nevhodnou k vytvoření zásadní základny pro nejnovější vývoj počtu pravděpodobnosti. Definice pravděpodobnosti jako limitní hodnoty četnosti, kterou volil Mises jako svůj první axiom, sama o sobě nepostačí k vybudování nejelementárnějších klasických partií počtu pravděpodobnosti. Aby se dostal dále, potřeboval Mises ještě jeden axiom, kterému dal romantický název „nemožnost soustavy hry". Tento axiom vytyčuje, že když z dané nekonečné posloupnosti pokusů vybereme libovolnou částečnou nekonečnou posloupnost, pak její četnost rovněž bude mít limitu, a to limitu touž jako je limita četnosti celé původní posloupnosti. Názvem

[22]) *H. Dingler* ve svém díle: Die Grundlagen der Geometrie (1933) píše: „Geometrie přestala být poznáním a stala se činem. Úsilí ve směru této nové geometrie ... je součástí protibolševické národní revoluce."

nemožnost soustavy hry poukazoval Mises na to, že mnozí blázni ztroskotali v Monte Carlu se svou soustavou hry, kterou považovali za neklamnou, neboť žádná soustava hry nemůže zajistit výhru. Na př. při ruletě pravděpodobnost nuly zůstane beze změny, jestliže někdo vsadí na nulu při každé druhé nebo při každé sedmé hře. Tento druhý Misesův axiom nejen je zásadně nesprávný, ale je prostě logicky nesmyslný. Taková posloupnost pokusů, která by vyhovovala druhému Misesovu axiomu, jednoduše neexistuje. Někteří jako WALD, DÖRGE, KAMKE, REICHENBACH, POPPER a jiní vytvořili umělkované a neobyčejně složité theorie, aby „zachránili" Misesovu theorii a učinili ji logicky bezespornou. Tyto theorie však obsahují takové libovolné a ničím neodůvodněné předpoklady, které zužují obor jejich použitelnosti, že ani sám Mises tyto theorie nepřijal. Na všecky tyto theorie se dále vztahuje vše to, co jsme výše uvedli o nesprávnosti základů Misesovy theorie. Tyto záchranné pokusy byly dobré jen k tomu, že jimi jasněji vynikla pochybená podstata Misesovy theorie. Ztroskotání Misesovy theorie je i se stanoviska formální matematiky do té míry jasné, že to uznali i matematikové buržoasních zemí a s větší či menší reservou přijali Kolmogorovovu theorii. Byly také činěny pokusy „sjednodit" Misesovu a Kolmogorovovu theorii; myslím tu v prvé řadě na pokusy TORNIEROVY a DOOBOVY, které sám Mises s velkým zájmem sledoval. Při bližším zkoumání však vychází najevo, že co tyto pokusy z Misesova chápání zachránily, je buďto pro budování theorie zbytečné nebo je přímo závadou, a tyto „sjednocovací" pokusy nevedly konec konců k ničemu nežli k zúžení Kolmogorovovy theorie.

Ztroskotání Misesova pokusu nás nemůže překvapit a musíme z něho v prvé řadě čerpat poučení, že matematické theorie založené na positivistických machistických názorech nemohou vyhovovat požadavkům, které klade na matematickou theorii bouřlivý vývoj vědy a techniky na dnešním vývojovém stupni, a že v základních otázkách matematiky dává správný orientační základ jen dialekticko-materialistické chápání matematické theorie a vztahu mezi matematikou a praxí.

V krátkosti se musíme ještě dotknout toho, jak posuzovali Misesa idealisté, neboť poukazujeme-li na pochybenou podstatu Misesovy theorie, musíme se isolovat od těch, kteří nekritisují Misesa proto, že nestojí v důsledné materialistické linii, nýbrž proto, že není dostatečně idealistický. Tak na př. BOREL ve své práci vyšlé r. 1949 kritisoval druhý Misesův axiom proto, že se snaží napodobit náhodu „lidským rozumem". Naproti tomu podle Borela lidský rozum nikdy nedokáže věrně napodobit náhodu, to se může podařit jenom intuici. Je jasné, že toto mysticky metafysické chápání náhody musíme rozhodně odmítnout. Ve skutečnosti není v náhodě nic „záhadného"; házíme-li mincí a zapisujeme postupné výsledky „líc" a „rub", nemá takto získaná posloupnost žádné takové „záhadné" vlastnosti, které bychom lidským rozumem nedovedli napodobit. Je pravda, že ve většině případů nezjistíme žádnou mechanickou zákonitost, se kterou by za sebou následoval „líc" a „rub". Borel plete mechanické myšlení s lidským myšlením vůbec. To je typický příklad, jak může mechanický způsob myšlení vést přímo k idealismu, k mysticismu. Pro dialektické myšlení nepravidelnost vyvolaná náhodou nemá v sobě nic záhadného. „Absolutní" nepravidelnost, o které medituje Borel a kterou připisuje magické síle náhody, neexistuje v žádné konečné posloupnosti a konečné posloupnosti tu nijak nemůžeme třídit, neboť náhoda může vyvolat kteroukoli. Ovšem Borel zde mluví o nekonečných posloupnostech, což však v daném případě nemá smyslu.

3. *Kolmogorovova theorie počtu pravděpodobnosti.*

Sovětský matematik S. N. Bernstein byl první, kdo si uvědomil nutnost vybudování axiomatických základů počtu pravděpodobnosti.[23]) Je však zásluhou Kolmogorovovou, že vytvořil takovou axiomatickou výstavbu počtu pravděpodobnosti, která je založena na správných principech a na materialistickém chápání a která staví počet pravděpodobnosti na pevné základy, které umožňují počtu pravděpodobnosti, aby zmohl své rostoucí úkoly. Kolmogorovova epochální práce vyšla r. 1933[24]) a další vývoj vědy plně potvrdil správnost Kolmogorovovy theorie. Kolmogorovova theorie vychází z toho, že masovým jevům, které tvoří základ počtu pravděpodobnosti, jinak řečeno, náhodným kategoriím událostí, přiřazuje v souvislosti se stochastickým schematem určitou objektivní pravděpodobnost. Neklade si za úkol formálně definovat pravděpodobnost určité události, nýbrž místo toho formuluje axiomaticky ty základní souvislosti, které platí mezi pravděpodobnostmi různých událostí, a vycházeje z těchto axiomů, buduje počet pravděpodobnosti stejně, jako se obecně buduje jiná matematická theorie. Kolmogorovova theorie vyjasňuje v oboru počtu pravděpodobnosti rozdíly a souvislosti mezi zkušeností a matematickými pojmy, čímž se stávají stejně jasnými jako obdobné souvislosti ve kterémkoli jiném oboru matematiky, na př. v geometrii, kde tyto otázky jsou dávno vyjasněny a jsou mimo diskusi. S hlediska matematiky je pro Kolmogorovovu theorii typické to, že buduje počet pravděpodobnosti na theorii množin a theorii míry a tím akcentuje analogii mezi pojmem pravděpodobnosti a pojmem masy. To umožnilo aplikovat bohatě rozvinutý aparát nejnovějších matematických theorií, jako je theorie reálných funkcí, theorie množin a funkcionální analysa, také v oblasti počtu pravděpodobnosti a tím přispět k tomu, aby také počet pravděpodobnosti se rozvíjel jako matematická theorie. Kolmogorovova theorie je tedy abstraktní axiomatickou theorií — Kolmogorov sám se ve zmíněné práci málo dotýká zásadních otázek — ale je takovou abstraktní theorií, která je založena na správném zobecnění, která

[23]) *С. Н. Бернштейн,* Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей, Харк. Зап. Матем. Т-ВА 15 (1917), 209—274.
[24]) *A. Kolmogorov:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlín, 1933.

zdůrazňuje společné rysy kategorie náhodných jevů a jejich objektivní pravděpodobnost, sjednocuje zkušenosti několika století a dává jim tvar vhodný pro užití matematiky. To právě umožnilo vybudovat theorii vhodnou pro klasické i moderní partie počtu pravděpodobnosti, na př. pro theorii stochastických procesů. Správnost Kolmogorovovy theorie nejjasněji vyplývá z možnosti úspěšně ji aplikovat. Musíme však poukázat na to, že Kolmogorov proto dokázal správně vyřešit otázku fundování počtu pravděpodobnosti, o které se mnoho diskutovalo, a tím otevřít cestu k dalšímu vývoji, že vycházel z materialistického názoru, z dialektického chápání jednoty a protikladu náhodnosti a nutnosti a z dialekticko-materialistického hodnocení úkolu a významu matematické abstrakce. Správné filosofické pochopení základních otázek počtu pravděpodobnosti znamenalo ovšem jenom spolehlivý výchozí bod, ze kterého bylo nezbytné vycházet, aby bylo možné vytvořit správnou a plodnou theorii. Avšak nalézt východisko z krise základů počtu pravděpodobnosti nebylo nikterak lehké ani po objevení správného filosofického výchozího bodu, a je nepochybné, že Kolmogorovova theorie je obrovským *vědeckým* úspěchem, k jehož dosažení bylo třeba mnoha hlubokých původních myšlenek, jejichž rozvedení vyžadovalo řešení mnohých matematických problémů. Přesto, že zde není místa na to, abychom podrobně rozbírali Kolmogorovovu theorii, jelikož k jejímu pochopení je nezbytná mnohem hlubší znalost matematiky, než jakou předpokládáme v této studii*), pokusíme se v krátkosti načrtnout hlavní linie Kolmogorovovy theorie.

Jak Kolmogorov poznamenává v předmluvě ke své práci „Základy počtu pravděpodobnosti", bylo jeho snahou „základní pojmy počtu pravděpodobnosti, do té doby považované za svérázné, zařadit mezi pojmy moderní matematiky."[25]) Na jiném místě poznamenává, že „počet pravděpodobnosti lze ve stejném smyslu a stejnou cestou budovat axiomaticky jako každou jinou matematickou theorii, na př. jako geometrii nebo algebru."[26]) Axiomaticky vybudovat matematickou theorii znamená zavést určité základní pojmy a pro ně zavést určité základní předpoklady, zvané axiomy. Další úvahy pak jsou založeny výhradně na těchto axiomech; jinými slovy, průběhem úvah neužíváme případného názorného obsahu základních pojmů a předpokládáme, že o základních pojmech je dáno jen to, co ve vztahu k nim je řečeno v axiomech. Tak se podařilo Kolmogorovovi zařadit základní pojmy počtu pravděpodobnosti mezi obecné třídy pojmů moderní matematiky tím, že je převedl na pojmy z theorie množin a theorie míry. Proto dříve než přistoupíme k výkladu Kolmogorovova axiomatického systému, shrneme několika slovy to, co k jeho pochopení třeba znát z theorie množin. Množinou nazýváme přesně

*) Autor se snažil, aby byl srozumitelný těm čtenářům, kteří nemají speciální matematické znalosti a nevyznají se ve speciálních formálních matematických termínech, ale mají představu o zásadních otázkách matematiky.

[25]) Loc. cit., str. 1.

[26]) Loc. cit., str. 1.

vymezený soubor určitých prvků. Pokud je počet prvků množiny konečný, můžeme definovat množinu tak, že vyjmenujeme její prvky; je-li však počet prvků množiny nekonečný, musíme obyčejně jiným způsobem vymezit, z jakých prvků se množina skládá. Množinu A nazýváme podmnožinou množiny B, jsou-li všechny prvky množiny A též prvky množiny B, jinými slovy, když množina A se skládá z některých prvků množiny B. Že množina A je podmnožinou množiny B značíme takto: $A \subseteqq B$. Každá množina je částí sebe samy: $A \subseteqq A$, dále prázdná množina (t. j. množina, která neobsahuje žádný prvek), kterou značíme $\emptyset$, je částí každé jiné množiny. Prvky v matematice nejčastěji používaných množin jsou: body, přímky, čísla, funkce atd.; později budeme mluvit o množinách, jejichž prvky jsou události, ale zatím o povaze prvků množin nic určitého nepředpokládáme. Součtem neboli sjednocením dvou množin rozumíme souhrn všech prvků, které patří do aspoň jedné z nich. Součet množiny A a množiny B značíme $A + B$. Průnikem dvou množin rozumíme souhrn těch prvků, které patří do obou množin zároveň. Průnik množin A a B značíme $A \,.\, B$. Je-li množina A podmnožinou množiny B, rozumíme rozdílem $B - A$ tu množinu, která se skládá z těch prvků, které patří do B, ale nepatří do A. Je zvykem nazývat množinu $B - A$ komplementární množinou množiny A vzhledem k B. Je-li jasné, vzhledem ke které množině B tvoříme komplementární množinu množiny A, je zvykem značit komplementární množinu znakem $\overline{A}$.

Již v nejzákladnějších kapitolách počtu pravděpodobnosti pozorujeme určitou formální podobnost s pojmy theorie množin. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ možné výsledky nějakého pokusu a nazveme je elementárními případy. Utvořme z elementárních případů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ všechny možné kombinace a označme je velkými latinskými písmeny, ku př. $A = (a_1, a_2, a_5)$, $B = (a_3, a_4)$ atd. Budiž A některá kombinace prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$, na př. $A = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$. Označme A^* případ, který záleží v tom, že se při pokuse uskuteční některá možnost obsažená v kombinaci A, jinými slovy případ A^* nastane, když výsledkem pokusu je některá z možností $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Přeloženo do řeči theorie množin, rozumíme složeným případem, krátce jen případem, libovolnou podmnožinu množiny, o které jednáme. Podobně můžeme najít ekvivalenty všech pojmů počtu pravděpodobnosti v pojmech theorie množin, jinými slovy, můžeme sestavit slovník, pomocí kterého můžeme přenášet pojmy počtu pravděpodobnosti na theorii množin a obráceně. Na příklad: K tomu, že se dva případy navzájem vylučují, je ekvivalentní, že příslušné podmnožiny nemají společné prvky. Současnému uskutečnění dvou událostí odpovídá průnik dvou množin. Uskutečnění aspoň jednoho ze dvou případů odpovídá součet dvou množin. Ekvivalentní případ s neuskutečněním případu je komplementární množina množiny (ve vztahu k množině všech možností). Že aspoň jeden případ určitě nastane, to znamená, že příslušná množina je množinou všech elementárních případů, dále pak to, že případ B^* má za následek případ A^*, znamená, že množina B je podmnožinou množiny A. Pomocí tohoto slovníku můžeme elementární (t. j. vztahující se na konečný počet možností) počet pravděpodobnosti přeložit do jazyka theorie množin. Tato myšlenka existovala již před Kolmogorovovem, mezi jinými nalezneme ji na př. v článku Karla Jordana z roku 1928.[27]). K. Jordan však po zavedení pojmů z theorie množin definuje pravděpodobnost události tak, že každému elementárnímu případu (t. j. každému možnému výsledku pokusu) připisuje stejnou pravděpodobnost (t. j. převrácenou hodnotu počtu všech možných výsledků pokusu) a podle jeho definice je pravděpodobnost složeného případu rovna podílu při dělení počtu těch elementárních případů, ze kterých se skládá složený případ, počtem všech možných případů. Takovým způsobem Jordan podává jasnější a přehlednější výstavbu klasického počtu pravděpodobnosti, ale dál se nedostává. K tomu, abychom dospěli ke Kolmogorovově systému počtu pravděpodobnosti, je třeba ještě dvou základních myšlenek. První je ta, že pravděpodobnosti všech elementárních případů nemusí být sobě rovny. Volme za pravděpodobnosti elementárních případů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ libovolná nezáporná čísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$, jejichž součet je roven 1, a pravděpodobností (složeného) případu A^* rozumějme součet těch $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ jsou indexy elementárních případů, z nichž se skládá A^*. Jinými slovy, k libovolné podmnožině prvků a_i přiřadíme součet čísel p_i patřících k prvkům podmnožiny a tak vytvoříme na řečené konečné množině tak zvanou aditivní množinovou funkci, čímž rozumíme to, že každé podmnožině A základní množiny přiřadíme nezáporné číslo $p(A)$ takovým způsobem, že nemají-li množina A a množina B společné prvky, pak číslo přiřazené množině $A + B$ se bude rovnat součtu čísel přiřazených množinám A a B: $p(A + B) = p(A) + p(B)$. Totéž platí ovšem pro součet více než dvou množin, z nichž žádné dvě nemají společný prvek. Přeložíme-li to do řeči pravděpodobnosti, dostaneme se k t. zv. adiční větě o úhrnné pravděpodobnosti, podle které pravděpodobnost uskutečnění případu složeného z více navzájem se vylučujících případů se rovná součtu pravědpodobností jednotlivých případů. Toto tvrzení, které je v klasickém počtu pravděpodobnosti větou, je základním předpokladem v Kolmogorovově theorii. Jak píše Feller: „Kolmogorov právě dokázal to, o čem se ještě několik let pochybovalo: že jediná relace nutná k vybudování theorie je aditivita a že s matematického hlediska, mluvíme-li o pravděpodobnosti, myslíme vlastně na aditivní funkce množin[28]). Druhá základní myšlenka v Kolmogorovově výstavbě počtu pravděpodobnosti je, že pojem pravděpodobnosti se dá rozšířit tak, že vedle událostí složených z konečně mnoha případů uvažujeme také události složené z nekonečného spočetného množství případů. První krok v tomto směru učinil Borel, ale důsledně neprovedl plodnou myšlenku, kterou sám nadhodil. Ne-

[27]) *K. Jordan:* A valószínüségszámítás alapfogalmai (Základní pojmy počtu pravděpodobnosti), Math. és Phys. Lapok, sv. 34 (1928), str. 109—136.

[28]) *W. Feller:* Sur les axiomatiques du calcul de probabilités et leurs relations avec les expériences. Actualités Scient. et Ind. 735, Paříž, Hermann & Cie, 1938, str. 13.

spornou zásluhou Borelovou je, že první postřehl možnost rozšíření adiční věty počtu pravděpodobnosti na spočetně mnoho případů. Vycházíme-li místo z konečné množiny elementárních případů z libovolné nekonečné množiny elementárních případů z libovolné nekonečné množiny, objeví se určité potíže v pojmu aditivní funkce. Aniž bychom zašli do podrobností, povšimneme si dvou příkladů, abychom si otázku ujasnili. Jak jsme viděli, výchozím bodem abstraktního počtu pravděpodobnosti je to, že stanoví na podmnožinách libovolné množiny aditivní množinovou funkci. Je-li základní množina spočetná, nevyskytne se žádná potíž. Nechť jsou $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ prvky dané množiny; přiřaďme každému a_i nezáporné číslo p_i tak, aby řada, jejímiž členy jsou čísla p_i, konvergovala k součtu 1. V takovém případě uvažujeme zcela libovolnou konečnou nebo nekonečnou podmnožinu skládající se z prvků

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}, \ldots$$

a přiřadíme jí řadu

$$p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k} + \ldots,$$

která je vybrána z konvergentní řady o nezáporných členech a je tudíž nutně konvergentní. Takovým způsobem můžeme sestrojit v oboru všech podmnožin spočetné množiny aditivní množinovou funkci, která bude též *spočetně* aditivní, je-li $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ konečná nebo nekonečná soustava množin, z nichž žádné dvě nemají společný prvek, pak číslo přiřazené součtu všech těchto množin se bude rovnat součtu (konečné nebo nekonečné) řady čísel přiřazených jednotlivým množinám. Vyjdeme-li však od nekonečné množiny, která má větší mohutnost než spočetná množina, pak je situace složitější, pak se nedá docílit toho, abychom v oboru podmnožin definovali spočetně aditivní množinovou funkci, a musíme se spokojit tím, že takovou funkci sestrojíme na množinovém tělese složeném z podmnožin základní množiny. Množinovým tělesem rozumíme podle HAUSDORFFA takovou soustavu množin, že součet i rozdíl libovolných dvou množin soustavy sám náleží do soustavy. Jestliže podmnožiny základní množiny tvoří množinové těleso, do kterého náleží také sama základní množina, pak zároveň se dvěma množinami patří do tělesa také jejich součet a zároveň s libovolnou množinou tam patří také množina k ní komplementární. Z toho plyne, že průnik dvou množin náležejících do uvažované soustavy, také sám do ní patří. Kolmogorovova theorie vychází právě z toho předpokladu, že na množinovém tělese složeném z podmnožin základní množiny je dána aditivní množinová funkce. Přesnější popis soustavy axiomů je tento:

1. Budiž dána množina H libovolných prvků, které nazveme elementárními případy, dále budiž dáno množinové těleso T skládající se z podmnožin H, do kterého náleží také sama H.

2. Na množinovém tělese T budiž dána nezáporná aditivní množinová funkce, t. j. každé množině A náležející do množinového tělesa T budiž přiřazeno

nezáporné číslo $p(A)$ tak, že jsou-li A a B dvě množiny bez společných prvků, které obě náležejí do množinového tělesa T, platí

$$p(A + B) = p(A) + p(B)\,;$$

mimo to budiž

$$p(H) = 1\,,$$

t. j. číslo přiřazené celé základní množině H budiž rovno 1. Jsou-li splněny tyto podmínky, pak množinové těleso T, složené z podmnožin množiny H, spolu s danou aditivní množinovou funkcí definovanou na tomto tělese, nazývá Kolmogorov pravděpodobnostním polem v širším smyslu. Množiny A náležející do T nazývá Kolmogorov případy a číslo $p(A)$ nazývá pravděpodobností případu A. Snadno se přesvědčíme, že pojem takového pravděpodobnostního pole v širším smyslu nevede ke sporu. Pravděpodobnostním polem v užším smyslu nazývá Kolmogorov takový systém, ve kterém je vedle podmínek už vyslovených splněn ještě také axiom spojitosti. K vybudování moderních kapitol počtu pravděpodobnosti je tento axiom nezbytný. Axiom spojitosti zní takto: Budiž $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ klesající posloupnost případů, t. j. předpokládáme, že A_2 je podmnožinou A_1, že A_3 je podmnožinou A_2 atd., obecně že A_{n+1} je podmnožinou A_n, dále pak předpokládejme, že v H není žádný prvek, který by náležel do všech množin A_n (t. j. že průnik všech nekonečně mnoha množin A_n je prázdný); v takovém případě předpokládejme, že čísla $p(A_n)$ mají limitu rovnou nule, jestliže n roste do nekonečna. Zavedení axiomu spojitosti potřeboval Kolmogorov k tomu, aby mohl rozšířit vlastnost aditivity množinové funkce $p(A)$ na případ nekonečně mnoha množin. Pomocí axiomu spojitosti se dá totiž dokázat, že je-li $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ nekonečná posloupnost množin, z nichž žádné dvě nemají společný prvek, a je-li A součet všech těchto množin, při čemž se předpokládá, že všecky množiny A_n, jakož i množina A, patří do množinového tělesa T (neboť jinak bychom nemohli mluvit o pravděpodobnosti uvažovaných případů), pak platí vzorec

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(\mathrm{A}_n) + \ldots\,.$$

V případě konečného počtu uvažovaných množin je postulovaná vlastnost důsledkem aditivity množinové funkce $p(A)$, ale v případě nekonečně mnoha množin A_n můžeme dojít k témuž závěru pouze pomocí axiomu spojitosti. Mezi pravděpodobnostními poli mají zvláštní důležitost ta, pro která součet spočetně mnoha množin patřících do T vždy sám také patří do T. Takové pravděpodobnostní pole nazývá Kolmogorov Borelovským pravděpodobnostním polem.

Nemůže být naším cílem, vybudovat na základě připomenutých axiomů počet pravděpodobnosti, ale abychom získali aspoň jakousi představu o této theorii, vysvětlíme si dva základní pojmy. Nejdůležitějším pojmem v moderním počtu pravděpodobnosti je pojem náhodné veličiny. Náhodnou veličinou rozumíme funkci $\xi(a)$ definovanou na množině H (kde tedy a probíhá všecky prvky množiny H), jejíž hodnoty jsou reálná čísla a která je vzhledem k množinovému tělesu T měřitelná. Poslední předpoklad znamená, že je-li x libovolné reálné číslo, pak ta podmnožina množiny H, která se skládá ze všech těch prvků a, pro které je $\xi(a) < x$, náleží (při každé volbě reálného čísla x) do množinového tělesa T. Každé náhodné veličině můžeme přiřadit tak zvanou distribuční funkci. Budiž $\xi(a)$ náhodná veličina a označme Ax tu podmnožinu množiny H, která se skládá z těch prvků a, pro něž platí nerovnost $\xi(a) < x$; pro distribuční funkci $F(x)$ pak platí $F(x) = p(Ax)$, t. j. $F(x)$ je pravděpodobnost jevu a charakterisovaného nerovností $\xi(a) < x$. Jako každá abstraktní matematická theorie, připouští také Kolmogorovova axiomatika počtu pravděpodobnosti rozmanité interpretace, a proto má aplikace i v těch oborech matematiky, které nemají nic společného s pojmem pravděpodobnosti a náhody; se zajímavými a překvapujícími jejími aplikacemi se setkáváme i ve velmi odlehlých oblastech matematiky, jako je theorie čísel a matematická analysa.

Při aplikacích Kolmogorovovy axiomatiky pravděpodobnostního pole jednotlivé prvky základní množiny H nehrají roli; důležité jsou pouze pravděpodobnosti těch podmnožin, které patří do množinového tělesa T. Je proto přirozené, že vznikla myšlenka, vybudovat počet pravděpodobnosti tak, že se nepočne zavedením prvků množiny H, nýbrž hned se vyjde od množinového tělesa T. Zajímavou takovou soustavu základů počtu pravděpodobnosti vypracoval sovětský matematik GLIVENKO[29]). Použil k tomu theorie t. zv. svazů, speciálně Booleových algeber. Theorie svazů je jednou ze zajímavých kapitol moderní algebry a stále roste její význam nejen v theorii množin, nýbrž i v theorii grup, theorii čísel, projektivní geometrii, topologii a logice. Dnes je již jasné, že pojem „svazu" spolu s pojmy grupy, okruhu a tělesa patří k nejzákladnějším pojmům matematiky. Glivenko potřeboval theorii Booleových algeber k tomu, aby charakterisoval množinové těleso takovým způsobem, aby se při tom vůbec nepoužívalo základní množiny a jejích prvků. Jeho theorie je po mnoha stránkách velmi zajímavá, protože spojuje počet pravděpodobnosti s důležitým komplexem pojmů moderní algebry, a v určitém smyslu je také velmi přirozená, protože buduje počet pravděpodobnosti tak, aby se nepoužívalo žádného postradatelného pojmu. Glivenkovu theorii počtu pravděpodobnosti je třeba považovat za zajímavé doplnění Kolmogorovovy theorie. Její zajímavost je především v tom, že ukazuje, proč je přirozené náhodným jevům přiřazovat množiny. Náhodné jevy totiž tvoří Booleovu algebru. Rozumíme-li „součtem" dvou náhodných jevů A a B jev pozůstávající v tom, že se uskuteční aspoň jeden z obou jevů A a B, a „průnikem" dvou jevů A a B jev pozůstávající v tom, že se uskuteční oba zároveň,

[29]) *V. Glivenko:* Théorie générale des structures, Actualités Scient. et Ind. 652, Paříž, Hermann, 1938.

budou při takovém chápání náhodné jevy odpovídající určité kategorii pokusů tvořit Boolevu algebru. Podle jedné známé Stoneovy věty je každá Booleova algebra *isomorfní* s množinovým tělesem, t. j. dá se udat takový vzájemně jednoznačný vztah mezi prvky Booleovy algebry a prvky množinového tělesa, při kterém se zachovávají operace součtu a průniku, t. j. součtu nebo průniku dvou náhodných jevů ve smyslu zde vyloženém odpovídá součet a průnik množin, které jsou těmto jevům přiřazeny. To znamená, že Booleovu algebru náhodných jevů lze vždy nahradit isomorfním množinovým tělesem. Glivenkova theorie je vhodná k tomu, aby se prokázalo, že použití theorie množin v počtu pravděpodobnosti není aktem libovůle, nýbrž nutností, která vyvěrá z povahy věci.

Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že Kolmogorovova theorie je abstraktní matematickou theorií, která právě proto, že správně abstrahuje objektivní vlastnosti náhodných hromadných jevů, stává se pro praxi dobře použitelným nástrojem. V souvislosti s tím odkazujeme na Leninovu thesi, podle které dialektická cesta poznání objektivní skutečnosti jde od živého vnímání k abstraktnímu myšlení a od něho k praxi. Kolmogorovova theorie a výsledky sovětské vědy potvrzují Leninovu thesi v oblasti počtu pravděpodobnosti.

Mises a někteří jeho stoupenci, jako na př. Tornier, pokusili se proti Kolmogorovově theorii postavit výtku, že degraduje počet pravděpodobnosti na pouhou kapitolu theorie množin. Toto prázdné obvinění dokazuje jen to, že machisté nechápou podstatu matematiky, že za formálním matematickým aparátem nevidí její obsah. Kolmogorovovi a druhým sovětským matematikům nic není vzdálenější než matematický formalismus, proti kterému vedou zásadní boj. V přednášce konané na 1. sjezdu maďarských matematiků v Budapešti jasně jsem vyzvedl, že nyní, když zásadní problémy základů počtu pravděpodobnosti jsou v celku vyřešeny, není úkol počtu pravděpodobnosti omezen na další vybrušování matematického základu, nýbrž že jde o to, využít získaných pevných základů ke zvýšení úsilí rozřešit problémy, které klade praxe. Avšak Tornier, jako machista, nechápe dialektickou jednotu theorie a praxe, která nikterak nemůže znamenat, že bychom se měli vzdát samostatnosti theorie pro úzký prakticismus. Fornier zná pouze směšování theorie a praxe, které je typické pro machisty a které v poslední instanci vede k tomu, že theorie i praxe rovným dílem upadají. Tornier ve skutečnosti u Kolmogorova „postrádá“ machistický chaos pojmů, ale právě tento „nedostatek“ spolu s poznáním a dialektickomaterialistickým chápáním úkolů matematiky je to, co činí Kolmogorovovu theorii hodnotnou a co je základním zdrojem její úspěšnosti.

Přeložili: *Karol Hlučil*, Bratislava,
J. Koníčková, Praha.