František Brandler

Aproximační vztahy v oboru statiky obloukových nosníků

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 1, 83--85

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117103`

RŮZNÉ

V této rubrice budeme uveřejňovat různá kratší sdělení a matematické dotazy a odpovědi čtenářů, o nichž se mluví v úvodním článku „Nové úkoly".

APROXIMAČNÍ VZTAHY V OBORU STATIKY OBLOUKOVÝCH NOSNÍKŮ

FRANTIŠEK BRANDLER, Praha.

(Došlo 26. května 1953.)

Jak známo, řešíme ve stavebné mechanice staticky neurčité konstrukce často z podmínky minima přetvárné práce. Tak na př. při řešení obloukového nosníku ACB se střednicí $y = f(x)$, na obou koncích dokonale vetknutého (obr. a) a libovolně zatíženého (obr. b), určujeme staticky neurčité veličiny z podmínky, aby přetvárná práce, která — dbáme-li pouze účinku ohybových momentů — je dána výrazem

$$\Pi = \frac{1}{2\mathrm{E}} \int_0^l \frac{[\boldsymbol{M}(x)]^2}{\boldsymbol{J}(x) \cos \varphi(x)} \, \mathrm{d}x \;, \tag{1}$$

byla minimem. Při tom je E určitá konstanta (t. zv. modul pružnosti), $\boldsymbol{J}(x) > 0$ moment setrvačnosti průřezu v obecném bodě $M[x, f(x)]$ oblouku, dále

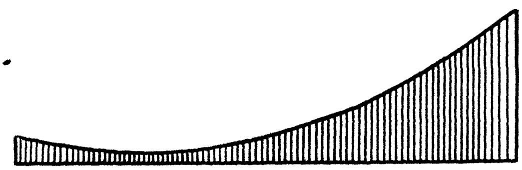
$$\cos \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} \,, \text{ a}$$

$$\boldsymbol{M}(x) = \mathfrak{M}(x) + \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{a}'x - \boldsymbol{h}f(x)$$

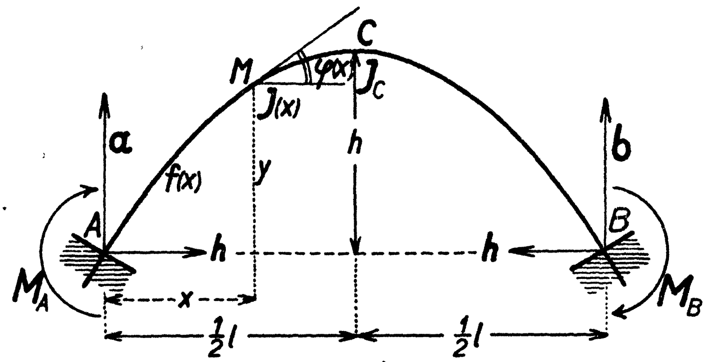
výsledný ohybový moment v tomto bodě, při čemž značí: $\mathfrak{M}(x)$ ohybový moment prostého obloukového nosníku, tedy veličinu závislou pouze na vnějším zatížení, $\boldsymbol{M}_A$ moment upnutí v bodě A, dále $\boldsymbol{a}'$ složku celkové svislé reakce $\boldsymbol{a}$ vyvozenou rovnováhovou soustavou staticky neurčitých veličin a $\boldsymbol{h}$ vodorovnou sílu působící ve spojnici AB.

U souměrného parabolického oblouku $y = \frac{4h}{l^2} x(l - x)$ o rozpětí l a vzepětí h plynou tudíž hledané staticky neurčité veličiny $\boldsymbol{M}_A$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{h}$ z podmínky

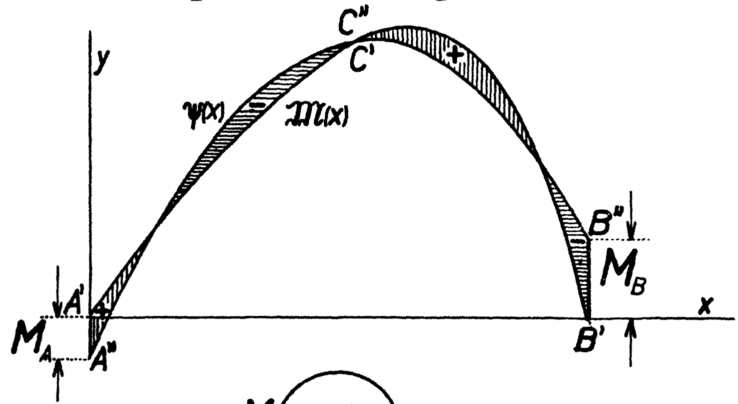
$$\Pi = \frac{1}{2\mathrm{E}} \int_0^l \left[\mathfrak{M}(x) + \boldsymbol{M}_A + \left(\boldsymbol{a}' - \frac{4h}{l} \boldsymbol{h} \right) x + \frac{4h}{l^2} \boldsymbol{h} x^2 \right]^2 \frac{1}{\boldsymbol{J}(x) \cos \varphi(x)} \, \mathrm{d}x = \min . \tag{2}$$



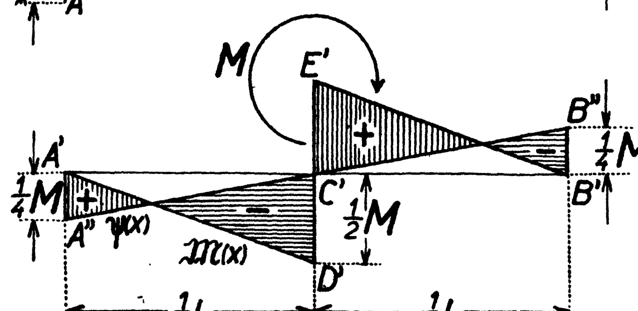
Obr. *b*.



Obr. *a*.



Obr. *c*.



Obr. *d*.

Tímto článkem chtěl bych upozornit, že někdy je výhodné chápati posléze uvedený integrál v poněkud jiném smyslu, než je to běžné ve stavebné mechanice. Ze struktury vzorce (2) totiž vidíme, že na statický úkol určení veličin $\boldsymbol{M_A}$, $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{h}$ můžeme také pohlížeti jako na problém aproximační: hledáme nejlepší aproximaci dané funkce $F(x)$, zobrazené momentovým průběhem

$\mathfrak{M}(x)$, pomocí kvadratického polynomu („vyrovnávací paraboly") $\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ ve smyslu methody nejmenších čtverců s danou vahou $\Phi(x) = \frac{1}{J(x) \cos \varphi(x)}$. Momentový průběh $A''C''B''$, vyvozený rovnováhovou soustavou staticky neurčitých veličin, je tedy s tohoto hlediska vyrovnávací parabolou momentového průběhu $A'C'B'$ prostého nosníku (viz obr. c), při čemž hodnota vodorovné síly plyne z relace $h = -\frac{l^2}{4h} \alpha_2$.

Všimněme si charakteristické a s hlediska hospodárného dimensování konstrukce i prakticky významné okolnosti, že výsledný momentový obrazec, znázorněný na obr. c čárkovaně, je dán rozdílem mezi momentovým průběhem $\mathfrak{M}(x)$ a aproximační kvadratickou parabolou. Proto také jsou v četných průřezech výsledné momenty $M(x)$, co do absolutní hodnoty, proti momentům $\mathfrak{M}(x)$ prostého nosníku podstatně menší a celkové rozložení těchto výsledných momentů v oblouku se vyznačuje určitou vyrovnaností, typickou pro takovéto aproximační průběhy.

Je zřejmé, že shora navrhovaným pojetím můžeme někdy snadno dospěti k určitým statickým závěrům, které jinak by vyžadovaly zvláštních analytických úvah. Uvažujme na př. případ úplného rovnoměrného zatížení oblouku. Ježto momentový průběh $\mathfrak{M}(x)$ je zde kvadratickou parabolou, je z pojmu aproximace okamžitě patrno, že vyrovnávací parabola ztotožní se s tímto průběhem. Staticky to znamená, že oblouk bude ve všech průřezech namáhán prostým tlakem a to nezávisle na průběhu průřezových změn. Platí tudíž tento vztah i pro jiné parabolické oblouky zmíněným způsobem zatížené, pro oblouky s kloubem ve vrcholu nebo vetknuté do jedné podpory s kloubem v podpoře druhé, i pro oblouky o dvou opěrných kloubech.

Uveďme ještě další příklad, kde pomocí této methody dospějeme k výsledku rovněž jednoduchou úvahou. Předpokládejme, že $J(x) \cos \varphi(x) = J_C =$ konst. a že na oblouk působí ve vrcholu moment M (obr. d). Tomuto zatížení odpovídá u prostého nosníku momentový průběh $A'D'C'E'B'$ souměrný podle středu C'. Z povahy této symetrie bezprostředně plyne, že vyrovnávací parabola tohoto průběhu degeneruje zde v přímku $A''B''$ („vyrovnávací přímku"), probíhající středem souměrnosti C'. Ježto však $\alpha_2 = 0$, je i horizontální síla $h = 0$, takže výsledný momentový obrazec obloukového nosníku se v tomto případě kryje s momentovým obrazcem příslušného přímého nosníku, na obou koncích vetknutého.

Z tohoto pojmu aproximace lze pochopitelně vyeházeti též při řešení některých jiných staticky neurčitých konstrukcí, na př. rámů, ovšem s obměnou, vyplývající ze statické povahy příslušné soustavy.