Jiří Kopřiva

Příspěvek ke vztahu Fareyovy řady a Riemannovy domněnky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 1, 77--82

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117102`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

PŘÍSPĚVEK KE VZTAHU FAREYOVY ŘADY A RIEMANNOVY DOMNĚNKY

JIŘÍ KOPŘIVA, Praha.

(Došlo dne 29. dubna 1953.) DT 511.91

V práci je do určité míry zobecněn výsledek starší autorovy práce *„O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových bodech funkce ζ“*, otištěné v tomto časopise na str. 49—55, o ekvivalenci určitých jednoduchých podmínek pro zlomky Fareyovy řady s Riemannovou domněnkou o nulových bodech funkce ζ.

Vycházeje z ekvivalence vztahu:

pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$M(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{I}$$

s *Riemannovou domněnkou* o nulových bodech funkce ζ, odvodil jsem v práci *O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových bodech funkce ζ* (Časopis pro pěstování matematiky, *78* (1953), 49—55) ekvivalenci vztahů:

pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\sum_{\varrho<\frac{1}{2}}^{q}(\tfrac{1}{4} - \varrho) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \sum_{\varrho<1}^{q}(\varrho^2 - \tfrac{1}{3}) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \sum_{\varrho<1}^{q}(\varrho^3 - \tfrac{1}{4}) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{1}$$

s touto domněnkou. Při tom v (I) a dále $M(\xi) = \sum_{a=1}^{[\xi]} \mu(a)$, kde $\mu(a)$ je *Möbiusova funkce* číselné theorie, v (1) a dále ϱ probíhá všechny *Fareyovy zlomky* indexu q z příslušného intervalu $(0, \alpha)$. Malá písmena latinské abecedy značí při tom a dále přirozená čísla, malá písmena řecké abecedy reálná čísla.

Ekvivalenci (I) s Riemannovou domněnkou dokázal LITTLEWOOD.[1]) V této práci je zobecněn výsledek nahoře citované práce pro libovolný přirozený exponent n.

Ve zmíněné práci byl odvozen vzorec

$$\sum_{\varrho \leqq 1}^{q} f(\varrho) = \sum_{k=1}^{q} F(k) M\left(\frac{q}{k}\right), \tag{A}$$

[1]) Ostřejší věta pro $M(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\alpha\frac{\log\log\log q}{\log\log q}})$ dokázána v *Landau, 2,* str. 161—166.

kde $F(a) = \sum_{s=1}^{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$ a f je funkce, definovaná pro všechna racionální čísla. Položíme-li v (A) $f(\eta) = 1$, dostaneme počet $P_q(\varrho)$ Fareyových zlomků indexu q v intervalu $(0, 1\rangle$, $\varrho \leqq 1$

$$P_q(\varrho)_{\varrho \leqq 1} = \sum_{k=1}^{q} kM\left(\frac{q}{k}\right) . \tag{2}$$

Položme v (A) $f(\eta) = \eta^n$, $n > 1$. Dostaneme

$$\sum_{\varrho \leqq 1}^{q} \varrho^n = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{1^n}{k^n} + \frac{2^n}{k^n} + \ldots + \frac{k^n}{k^n}\right) = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) \frac{1}{k^n} (1^n + 2^n + \ldots + k^n) .$$

Řadu $1^n + 2^n + \ldots + k^n$ lze sečísti a platí pro ni

$$\sum_{l=1}^{k} l^n = \frac{(k+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1};$$

při tom B jsou Bernoulliova čísla, pro která je mocnina míněna symbolicky, t. j. $B^r = B_r$ ([1], str. 300). Dostáváme tak

$$\sum_{\varrho \leqq 1}^{q} \varrho^n = \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) \frac{1}{k^n} \frac{(k+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^n} M\left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{k^{n+1}}{n+1} + \frac{k^n}{2} + \frac{nk^{n-1}}{12} - \frac{n(n-1)(n-2)k^{n-3}}{720} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)k^{n-5}}{30\,240} + \ldots + B_n k\right) .$$

Všechny členy, ve kterých vystupuje jako faktor B_n, kde $n > 1$ liché, odpadají, neboť tato $B_n = 0$. Všechny ostatní členy jsou různé od nuly, neboť $B_1 = \frac{1}{2}$

a $B_{2n} = (-1)^{n-1} 4n \int_0^\infty \frac{\sigma^{2n-1}}{e^{2\pi\sigma} - 1} \, d\sigma \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. ([3], str. 126.)

Je-li tedy n liché, zůstanou v závorce na pravé straně poslední rovnice kromě k^n jen sudé mocniny k, je-li n sudé, bude tomu naopak. Nám nezáleží na přesné hodnotě konstant u mocniny s exponentem $n - 1$ a nižšími a proto píšeme

$$\sum_{\varrho \leqq 1}^{q} \varrho^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{q} kM\left(\frac{q}{k}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{1,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) +$$

$$+ A_{3,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{5,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^5} M\left(\frac{q}{k}\right) +$$

$$+ \ldots + \begin{cases} A_{n-2,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{n-2}} M\left(\frac{q}{k}\right) & \text{pro } n \text{ liché} \\ B_n \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{n-1}} M\left(\frac{q}{k}\right) & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Indexy i konstant $A_{i,n}$ probíhají pouze lichá čísla a platí $A_{i,n} \neq 0$ pro $i = 1, 3, \ldots$ Položíme-li $l = 2[\frac{1}{2}n] - 1$, můžeme poslední člen psáti ve tvaru

$$A_{l,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)$$

pro n liché i sudé ($A_{n-1,n} = B_n$ pro n sudé). Podle (2) jest $\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{q} kM\left(\frac{q}{k}\right)$ rovno $\frac{1}{n+1}$—násobku počtu Fareyových zlomků indexu q z intervalu (0, 1). Dále jest $\sum_{k=1}^{q} M\left(\frac{q}{k}\right) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{a=1}^{\left[\frac{q}{k}\right]} \mu(a) = \sum_{k=1}^{q} \mu(k) \left[\frac{q}{k}\right] = 1$ ([2], 1, str. 21). Můžeme tedy konečnému výsledku dáti tvar

$$\sum_{\varrho<1}^{q} \left(\varrho^n - \frac{1}{n+1}\right) + A_{0,n} = A_{1,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{3,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) + \\ + \ldots + A_{l,n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right), \tag{3}$$

kde $A_{0,n} = \dfrac{n-1}{2(n+1)}$.

Pro $n = 1$ dostáváme dosazením $f(\eta) = \eta$ do (A) po snadném počtu

$$\sum_{\varrho<1}^{q} \left(\varrho - \frac{1}{2}\right) = 0 . \tag{4}$$

Je-li $n > 1$, označme $H_n(q)$ levou stranu ve (3), je-li $n = 1$, označme $H_1(q)$ levou stranu ve (4) jakožto funkce argumentu q. Sečtěme nyní rovnice

$$\lambda_i H_i(q) = \lambda_i \left[A_{1,i} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) + A_{3,i} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) + \ldots + A_{l,i} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)\right]$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n > 3$[1]), kde λ_i jsou konstanty, které určíme dále. Na levé straně vzniklé rovnice dostaneme výraz tvaru $\sum_{\varrho<1}^{q} P(\varrho)$, kde P je polynom nejvýše n-tého stupně v ϱ. Vyšetříme, zda je možno voliti konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tak, aby polynom P byl právě n-tého stupně, t. j. aby $\lambda_n \neq 0$, a současně abychom na pravé straně dostali pouze člen $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)$. Má tedy platit

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_1 . 0 + \lambda_2 . A_{12} + \lambda_3 A_{13} + \lambda_4 A_{14} + \\ + \ldots + \lambda_{n-1} A_{1,n-1} + \lambda_n A_{1,n}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^3} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_4 A_{34} + \ldots + \lambda_{n-1} A_{3,n-1} + \lambda_n A_{3,n}) = 0;$$

$$\vdots$$

---

[1]) Případy $n = 1, 2, 3$ byly vyšetřovány v citované práci.

při tom pro n liché má poslední rovnice tvar

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_{n-1} A_{l,n-1} + \lambda_n A_{l,n}) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)$$

a pro n sudé jsou pak poslední dvě rovnice

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{l-2}} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_{n-2} A_{l-2,n-2} + \lambda_{n-1} A_{l-2,n-1} + \lambda_n A_{l-2,n}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right) (\lambda_n A_{l,n}) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right).$$

Funkce $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^m} M\left(\frac{q}{k}\right)$ není jakožto funkce (nespojitě) proměnné q identicky rovna nule, jde tedy o otázku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Rozdělíme vyšetřování na dva případy:

a) n je liché. Soustava $\frac{n-1}{2}$ lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 \,.\, \lambda_1 + A_{12}\lambda_2 + A_{13}\lambda_3 + A_{14}\lambda_4 + \dots + A_{1,n-1}\lambda_{n-1} + A_{1,n}\lambda_n &= 0 \,, \\ A_{34}\lambda_4 + \dots + A_{3,n-1}\lambda_{n-1} + A_{3,n}\lambda_n &= 0 \,, \\ &\vdots \\ A_{l,n-1}\lambda_{n-1} + A_{l,n}\lambda_n &= 1 \end{aligned}$$

o n neznámých $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ má řešení. Mají totiž matice soustavy i matice rozšířená stejnou hodnost $\frac{n-1}{2}$, neboť na př. determinant

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} & \dots & A_{1,n-1} \\ 0 & A_{34} & \dots & A_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{l,n-1} \end{vmatrix} = A_{12}A_{34} \dots A_{l,n-1} \neq 0 \,. \tag{5}$$

S ohledem na nenulový determinant (5) je možno hodnoty neznámých $\lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ (indexy probíhají všechna lichá čísla) volit libovolně; zvláště je tedy možno volit $\lambda_n \neq 0$.

b) n je sudé. Soustava $\frac{1}{2}n$ lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 \,.\, \lambda_1 + A_{12}\lambda_2 + A_{13}\lambda_3 + A_{14}\lambda_4 + \dots + A_{1,n-2}\lambda_{n-2} + A_{1,n-1}\lambda_{n-1} + {} & \\ + A_{1,n}\lambda_n &= 0 \,, \\ A_{34}\lambda_4 + \dots + A_{3,n-2}\lambda_{n-2} + A_{3,n-1}\lambda_{n-1} + A_{3,n}\lambda_n &= 0 \,, \\ &\vdots \\ A_{l-2,n-2}\lambda_{n-2} + A_{l-2,n-1}\lambda_{n-1} + A_{l-2,n}\lambda_n &= 0 \,, \\ A_{l,n}\lambda_n &= 1 \end{aligned}$$

o n neznámých $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ má řešení. Mají totiž matice soustavy i matice rozšířená stejnou hodnost $\frac{1}{2}n$, neboť determinant

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & A_{34} & \dots & A_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{l,n} \end{vmatrix} = A_{12}A_{34}\dots A_{l,n} \neq 0 \; .$$

Z poslední rovnice pak plyne $\lambda_n = \dfrac{1}{A_{l,n}} \neq 0.$

Je tedy možno v obou případech najíti takovou soustavu konstant $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ $\dots, \lambda_n$, aby platilo

$$H(q) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right) ,$$

kde

$$H(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i(q) \; ;$$

$H(q)$ je tedy výraz tvaru $\sum\limits_{\varrho<1}^{q} P(\varrho)$, kde P je polynom n-tého stupně v ϱ indexu q.

Předpokládejme, že platí Riemannova domněnka. Pak platí (I) a tedy pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\left|\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{k}\right)\right| < \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} C_1 \frac{q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = C_1 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}} ,$$

kde C_1 a dále se vyskytující C_i jsou kladné konstanty. Protože řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ je konvergentní, je součet $\sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{1}{k^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ pro každé q stále menší než C_2. Platí tedy pro každé $\varepsilon > 0$

$$|H(q)| < C_3 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{6'}$$

a tedy

$$H(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \; . \tag{6}$$

Dokážeme nyní, že i naopak z platnosti (6) plyne správnost Riemannovy domněnky. Utvořme výrazy

$$\frac{\mu(1)}{1^l} H(q),\; \frac{\mu(2)}{2^l} H\left(\left[\frac{q}{2}\right]\right), \dots, \frac{\mu(q)}{q^l} H\left(\frac{q}{q}\right)$$

a sečtěme je:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} H\left(\left[\frac{q}{i}\right]\right) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^l} M\left(\frac{q}{ki}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{\left[\frac{q}{k}\right]} \frac{\mu(i)}{k^l i^l} M\left(\frac{q}{ki}\right) = \sum_{a=1}^{q} \frac{1}{a^l} M\left(\frac{q}{a}\right) \sum_{d/a} \mu(d) = M(q) \; ,$$

neboť $\sum\limits_{d/a} \mu(d) = 0$ pro $a > 1$ a $\mu(1) = 1$ ([2], 1, str. 20—21). Dostáváme tedy

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} H\left(\left[\frac{q}{i}\right]\right) = M(q) \; .$$

Předpokládejme, že platí (6); potom

$$\left|\sum_{i=1}^{q} \frac{\mu(i)}{i^l} H\left(\left[\frac{q}{i}\right]\right)\right| < \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{i^l} C_4 \frac{q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{i^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = C_4 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{i^{l+\frac{1}{2}+\varepsilon}} \, .$$

Tedy

$$|M(q)| < C_5 q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

a z toho

$$M(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \, .$$

Je tedy i platnost (6) *ekvivalentní s platností Riemannovy domněnky.*

Získaný výsledek je ostřejší než snadno patrná skutečnost, že Riemannova domněnka je ekvivalentní se současnou platností všech vztahů: pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$H_i(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad i = 2, 3, \ldots, n \, .$$

Tato skutečnost totiž nezaručuje existenci takové lineární kombinace $H(q) = \sum_{i=1}^{n} c_i H_i(q)$, pro kterou platí ekvivalence mezi platností vztahu

$$H(q) = O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{ pro každé } \varepsilon > 0$$

a Riemannovou domněnkou.

Avšak při tvoření lineární kombinace $H(q)$ s konstantami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ je nám ponechána určitá volnost, neboť, jak víme, můžeme *některé z těchto konstant libovolně volit.* A možná, že *vhodná volba těchto konstant* by mohla pomoci při podrobnějším vyšetřování *chování funkce $H(q)$ pro velká q.*

LITERATURA

[1] *E. Cesàro,* Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, Leipzig (1904).

[2] *E. Landau,* Vorlesungen über Zahlentheorie, 1., 2., Leipzig (1927).

[3] *E. T. Whittaker, G. N. Watson,* A Course of Modern Analysis, Cambridge (1920).