RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

Eduard Čech: **Základy analytické geometrie,** Přírodovědecké vydavatelství, Praha, I. díl 1951, stran 214, náklad 3300, cena brož. 19·20 Kčs; II. díl 1952, stran 220, náklad 3300, cena brož. 24 Kčs.

Zdálo by se na prvý pohled, že napsat dobrou vědeckou učebnici analytické geometrie je věc velmi snadná, když přece existuje taková spousta „vzorů", a že snad jen učebnice elementů analysy mohou zde co do počtu konkurovat. Kdežto však v základech analysy existují přece jen již delší dobu úvodní učebnice vyhovující požadavkům dnešní vědecké přesnosti, zdá se mi, že do nedávna tomu tak nebylo u učebnic základů geometrie, speciálně u učebnic základů analytické geometrie.

Požadavek methodické jasnosti a přístupnosti výkladu byl namnoze chápán tak, že čtenář byl po celou dobu výkladu *vázán* na názorovou interpretaci studovaných pojmů, při čemž nikdy si vlastně nebyl jist tím, které základní poučky o geometrických útvarech jsou předpokládány, a kterých tedy „smí" při logických dedukcích užívat. Porovnáme-li po této stránce ohromný rozdíl mezi již vžitým a skoro klasickým postupem obvyklým v základech analysy, kde se začíná opravdu takřka „od píky", kde se s vysokými požadavky abstrakce na čtenáře buduje od základů aritmetika reálných čísel na podkladě třeba Dedekindova řezu, kde po stránce methodické mohou být a také jsou spíše námitky opačného rázu proti vhodnosti takového postupu na samém začátku odborného studia matematiky, a mezi postupem dosti obvyklým při studiu základů geometrie, které by mohlo sloužit za vzor naprosto přesného, na druhé straně však nikoliv přespříliš abstraktního logického myšlení, kdy v tomtéž časovém období se student cvičí v početní virtuositě na pojmech nedefinovaných (úhel) a v logickém užívání základních geometrických pouček, neznámo kterých, vidíme, že zde není něco v pořádku.

Čechova kniha snaží se právě o to, jak uvést v soulad přesnost výkladu základů analysy a přesnost výkladu základů geometrie, aniž by tím sebeméně utrpěla jasnost a přístupnost výkladu. Domnívám se, že se autor skvěle zhostil tohoto úkolu s virtuositou jemu vlastní. Jeho zásluha v tomto směru vynikne snad ještě lépe, uvážíme-li, že vlastně neexistuje učebnice analytické geometrie (až snad na učebnici *Karol Borsuk*, Geometria analytyczna w *n* wymiarach, 1950, která však má jiné zaměření), která by byla vedena tímto duchem, a že tedy Čech v tomto směru vykonal práci průkopnickou.

V této souvislosti chtěl bych se zmínit ještě o methodě výkladu autorem použité. Autor byl veden snahou — po mém soudu jedině správnou —, aby geometrické pojmy a vztahy mezi nimi byly zachyceny v jejich pravé podobě, nezávisle na náhodné volbě soustavy souřadnicové, aby po celou dobu výkladu bylo jasné, že běží o pojmy a věty geometrické a ne aritmetické. Co mám na mysli, ukáži na tomto příkladě. Budiž A bod o souřadnicích x_0, y_0 v kartézské rovině. Položme $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + bx + c$. Mocnost $\boldsymbol{m}$ bodu A vzhledem ke kružnici $f(x, y) = 0$ se někdy definuje vztahem $\boldsymbol{m} = f(x_0, y_0)$. Že jde o pojem geometrický, závislý jen na dané kružnici a na daném bodě, a nikoliv na volbě soustavy souřadnicové, musíme prokázat na příklad tím, že při přechodu od jedné soustavy orthogonální základních os k jiné takové soustavě číslo $\boldsymbol{m}$ je

„invariantní“. Bylo by totiž možné zavést nějaký jiný pojem, na př. „odlehlost“ v bodu A od kružnice $f(x, y) = 0$, vztahem $v = f(x_0^2, y_0^2)$. Snadno bychom se mohli přesvědčit, že takto definované číslo v je závislé na volbě soustavy souřadnic a že tedy necharakterisuje žádný geometrický vztah mezi daným bodem a danou kružnicí. V analytické geometrii sice často zavádíme také pomocné pojmy jako „směrnice“ dané přímky, ale správněji bychom měli mluvit o směrnici dané přímky vzhledem k dané souřadnicové soustavě. Jiná situace ovšem nastává při užívání methody analytické geometrie při studiu na př. grafů funkcí. Není ovšem nutné prokazovat invariaci studovaných analytických výrazů, získaných z geometrických pojmů definovaných geometrickou cestou (bez použití souřadnicové soustavy), tedy a priori invariantních. Při odvozování příslušných analytických výrazů charakterisujících tyto pojmy a vztahy bývalo však zpravidla zvykem opírat se o názor (harmonická vlastnost úplného čtyřrohu) a nedefinovanou soustavu základních pouček jako prostředek důkazu. O tom jsem se však již zmínil dříve. Jedinečnou pomůckou k vědeckému studiu analytické geometrie je její vektorové pojetí a důsledné použití vektorové symboliky. Výhoda použití vektorové symboliky, která tedy nespočívá pouze ve zkráceném způsobu psaní, ještě lépe vynikne, zkoumáme-li analytickou geometrii v souvislosti s aplikacemi, na př. v mechanice. Vektorová symbolika je jedinečně vhodná pro vypsání obecných vztahů platných v mechanice. Přechod k aritmetisaci daných konkretních problémů je při tom snadný, neboť rozpis vektorových rovnic a vztahů podle složek je opravdu velmi jednoduchý. Tato skutečnost také láme hrot mnohé výtce se strany zastánců složkové (souřadnicové) methody, že totiž v případě konkretních problémů se rozepisování takových vztahů neubráníme. Důsledné autorovo použití vektorové symboliky a vektorových method pokládám proto za jednu z velkých předností této knihy.

Obrátím se nyní k rozboru způsobu, jakým autor postavil celou analytickou geometrii reálného n-dimensionálního eukleidovského prostoru na pevný a solidní logický základ. Pro vybudování celé této geometrie volil jediný, sice velmi obsáhlý a hluboký axiom, zato však axiom velmi snadno formulovatelný a průhledný: Eukleidův prostor je pojímán jako geometrický prostor (t. zn. prostor, v němž každým jeho dvěma bodům je jednoznačně přiřazeno nezáporné číslo — vzdálenost), splňující tento předpoklad: existuje prosté zobrazení daného prostoru na soustavu všech n-tic reálných čísel tak, že vzdálenost $v(x, y)$ bodů x, y, daného prostoru je dána výrazem

$$v(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots},$$

kde $(x_1, \ldots)$, resp. $(y_1, \ldots)$ jsou n-tice odpovídající bodům x, resp. y při uvedeném zobrazení. Takových zobrazení je mnoho, ale žádné nemá v důsledku této definice „přednostní postavení“ před jiným. Slouží nám tedy n-dimensionální kartézský prostor takových n-tic jako representace daného eukleidovského prostoru. Jednotlivá čísla v n-ticích jsou t. zv. souřadnice příslušného bodu při zvolené representaci (určené uvedeným zobrazením). Jediný základní geometrický pojem, který se zde vyskytuje a který specifikuje daný prostor mezi všemi množinami o téže mohutnosti, je pojem vzdálenosti, který ovšem musí splňovat výše uvedenou základní podmínku. Proč se volila právě tato podmínka, je čtenáři dostatečně jasně autorem vyloženo, ovšem z názoru (jak ani jinak nemůže být při odůvodnění volby axiomů) na začátku kapitoly I. Že vlastně tento axiom je ohromně hluboký, plyne buď z toho, že v sobě shrnuje všechny Hilbertovy axiomy eukleidovského prostoru, nebo též ze složitosti vztahu, který bychom dostali, kdybychom na základě tohoto axiomu odvodili relaci platnou (na př. v případě trojdimensionálního prostoru) mezi desíti vzájemnými vzdálenostmi pěti libovolných bodů, čímž bychom eliminovali pomocnou roli, kterou zde hraje zmíněná kartézská representace.

Autor též správně ukazuje na to, že není vůbec účelné budovat geometrii eukleidovského prostoru napřed pro $n = 2$, pak pro $n = 3$ a eventuálně pak teprve tyto úvahy zobecnit pro n libovolné. Souvislosti mezi jednotlivými lineárními útvary vyniknou daleko lépe a průhledněji, provádějí-li se úvahy ihned pro n libovolné. Přitom by bylo ovšem důležité, aby — v případě, že se této knihy použije pro universitní přednášky — přednášející doprovázel obecný výklad řadou konkretních příkladů, ve kterých se tyto specialisace náležitě objasní.

V kapitole I je napřed odvozena jako důsledek existence zmíněné representace známá trojúhelníková nerovnost pro vzdálenost tří bodů a vyšetřením případu, kdy zde nastává rovnost (čímž je tento případ charakterisován geometricky), dochází se k pojmu bodu, který leží mezi dvěma danými body, při čemž je poloha takového bodu (vzhledem k daným dvěma bodům) dokonce invariantně charakterisována jistým parametrem t. To ovšem ihned umožňuje definovat vektor jako pojem vzniklý abstrakcí ze soustavy navzájem ekvivalentních dvojic bodů (x, y), při čemž dvě dvojice (x, y), (x', y') pokládáme za ekvivalentní, když pro jejich souřadnice platí $y_i - x_i = y'_i - x'_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, \ldots, n$. Invariace těchto vztahů plyne okamžitě z výše zmíněné invariantní charakterisace středu dané dvojice bodů. Snadno se nyní zavádějí elementární početní operace s vektory (na př. skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ se zavádí složkově známou bilineární formou, ale ihned se vyjadřuje pomocí velikosti vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, čímž se prokazuje invariance této definice).

V kapitole II se vyvozují důsledky ze základních početních pravidel platných pro vektory, čili vyšetřují se algebraickými methodami t. zv. vektorové prostory (zejména otázky lineární závislosti, otázky týkající se base, dimense; zdůrazněno, že v podstatě existuje jen jeden vektorový prostor n-dimensionální; zavádějí se orthonormované soustavy vektorů a používá se jich na př. k odvození transformačních rovnic, t. j. rovnic udávajících přechod od jedné kartézské representace k jiné).

Kapitola III je věnována studiu lineárních útvarů vnořených do daného eukleidovského prostoru a studiu vztahů mezi nimi. Krásně se zde projevuje užitečnost vektorové methody, průhlednost a elegance důkazů a zejména skoro nemožnost dopustit se chyby v úvaze, čemuž je velmi těžko se vyvarovat v učebnicích, kde mnoho zde se vyskytujících pojmů (jako rovnoběžnost) a vztahů se pokládá za evidentní a za známé „od dřívějška“ nebo z názoru.

V kapitole IV, ve které již je předpokládána znalost základů theorie determinantů, je zaveden důležitý pojem orientace prostoru. Jsou-li dány dvě vektorové base daného prostoru (t. j. úplný uspořádaný systém lineárně nezávislých vektorů), lze vektor každé z nich vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů base druhé. Determinant utvořený z koeficientů těchto lineárních kombinací je vždy různý od nuly. Je-li kladný, říkáme, že obě base jsou souhlasné, jinak, že jsou nesouhlasné. Tím se rozdělí všechny base do dvou tříd. Orientovat prostor znamená pak zvolit jednu z těchto dvou tříd.

V kapitole V se kromě pojmu kolmosti lineárních útvarů zavádí velmi důležitý pojem vnějšího součinu uspořádané soustavy m vektorů jako determinant sestavený z komponent vektorů této soustavy při dané basi. Z věty o násobení determinantů a z okolnosti, že skalární součiny jsou invariantní při změně base, vyplývá, že součin vnějšího součinu jedné soustavy vektorů s vnějším součinem druhé takové soustavy je invariant, z čehož dále ihned plyne, že vnější součin dané soustavy vektorů je pseudoinvariant, t. j. veličina, která se nemění při přechodu od jedné base k jiné buďto vůbec nebo jen co do znaménka podle toho, zda obě base jsou souhlasné nebo nesouhlasné. V prostoru orientovaném jistým způsobem je tedy vnější součin invariantní. Od tohoto pojmu přechází autor k pojmu vektorového součinu a odvozuje pro něj základní pravidla.

V kapitole VI je zaveden obecný pojem zobrazení, transformace prostoru a pojem transformační grupy. Tyto pojmy jsou ihned použity pro případ zobrazení afinního, podobného a shodného a je ukázána souvislost těchto pojmů. Shodné a podobné transformace roviny jsou zde studovány pomocí čísel komplexních.

V kapitole VII, pojednávající o lineárních rovnicích, autor směřuje k zavedení duálních vektorových prostorů a k odvození základních vztahů platných mezi nimi.

Teprve v posledních kapitolách, VIII a IX prvního dílu, seznámí se čtenář s velmi důležitým pojmem úhlu a s jeho vlastnostmi. Zde nutno bedlivě rozlišovat mezi velmi podobně znějícími pojmy jako „úhel dvou směrů" a „úhel" (na př. „úhel dutý"), které mají úplně jiný obsah, dále uvědomit si, že na př. úhel dvou směrů (charakterisovaný na př. vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) není číslo (je to pojem vzniklý abstrakcí z ekvivalentních dvojic směrů, pokládáme-li za ekvivalentní dvojice, pro které výraz $\frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$ — nezávislý jak na kartézské representaci prostoru, tak na volbě vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ charakterisujících dané směry — má tutéž hodnotu) a že tedy na př. funkce kosinus úhlu dvou směrů není kosinová funkce známá z elementů analysy. Autor věnuje v těchto kapitolách velkou pozornost přesnému vybudování právě těch částí elementární geometrie, které se ve „školské" geometrii probírají zpravidla syntheticky, na podkladě názoru, a jejichž studium se z analytické geometrie již tradičně vypouští. Ke konci kapitoly VIII najde čtenář jednoduché, přesné a obecné odvození základních vztahů sférické trigonometrie jako krásnou aplikaci předcházejících vývodů.

Druhý díl, t. j. kapitola X—XIV, je věnován studiu základů projektivní geometrie (na podkladě metrickém) a těch metrických a afinních vlastností geometrických útvarů, jejichž pravá podstata vynikne v souvislosti s příslušným zobecněním projektivním.

V kapitole X je zaveden projektivní prostor jako rozšíření eukleidovského prostoru o t. zv. nevlastní body, t. j. v podstatě o směry prostoru základního. Jsou studovány incidenční vlastnosti lineárních podprostorů tohoto prostoru a je odvozen princip duality. Je zaveden pojem dvojpoměru čtyř bodů na přímce (pomocí aritmetické representace těchto bodů; invariace je ihned patrna) a pojem projektivního intervalu (jde o prostory vesměs reálné). Autor klade zde velký důraz na rozvinutí těch pojmů, které souvisí s uspořádáním bodů na projektivní přímce, tedy těch pojmů a vztahů, které odpovídají v aritmetice čísel partiím o nerovnostech. Tyto části projektivní geometrie jsou velmi často hrubě opomíjeny, ačkoliv právě tyto části mají v rozmanité názorné podobě aplikace v analyse.

Kapitola XI je věnována studiu kolineárních zobrazení jednak obecně, jednak některým zvláštním případům (na př. kolineaci, perspektivnímu zobrazení, homologii) a jejich vzájemným vztahům.

Až dosud byly studovány geometrické útvary pouze v prostorech reálných, t. j. takových, k jejichž representaci sloužily kartézské prostory reálné. Toto úmyslné zaměření hlavně k prostorům reálným provádí autor záměrně, neboť v aplikacích se setkáváme převážně s útvary reálnými, a otázkám reality při studiu geometrických útvarů, na př. v prostorech projektivních, je obvykle věnována velmi malá pozornost.

Teprve v kapitole XII rozšiřuje autor reálné prostory o imaginární elementy: zavádí napřed komplexní vektory jako dvojice obyčejných (reálných) vektorů analogicky, jako se postupuje při zavádění komplexních čísel. Komplexním bodem pak nazývá dvojici $(A, \mathbf{u})$, kde A je reálný bod a $\mathbf{u}$ reálný vektor. Komplexní bod o souřadnicích $(x_1 + iy_1, \ldots)$ (kde $x_1, \ldots, y_1, \ldots$ jsou čísla reálná) v obvyklém pojetí je v autorově pojetí dán dvojicí $(A, \mathbf{u})$, kde A je bod o souřadnicích $(x_1, \ldots)$ a $\mathbf{u}$ vektor o složkách $(y_1, \ldots)$. Autor se pak zabývá v této kapitole hlavně tím, které věty a úvahy provedené v případě prostorů reálných lze přenést na prostory komplexní.

Poslední kapitoly XIII a XIV mají speciální, ale vysoce zajímavý charakter. Kapitola XIII pojednává o projektivních vlastnostech kvadrik a kapitola XIV o některých afinních a metrických vlastnostech kvadrik, o lineárních komplexech a o Möbiusově prostoru [t. j. prostoru, jehož elementy jsou (m — 1)-dimensionální kvadriky daného m-dimensionálního projektivního prostoru, obsahující (m — 2)-dimensionální kvadriku absolutní (tedy t. zv. sféry)]. V těchto posledních kapitolách se čtenář setkává s bohatým použitím základních kapitol předcházejících.

Kniha klade u čtenáře požadavky jen na schopnost logického a abstraktního myšlení, nikoliv však na předběžné znalosti. Ke čtení knihy stačí znát základy aritmetiky čísel reálných a komplexních. Jinak se nepředpokládají žádné znalosti základů analysy, neboť autor se důsledně omezuje na ty geometrické vlastnosti, které lze studovat prostředky algebraickými.

Kniha Čechova klade si za cíl vědecky vybudovat základy geometrie sice pomocí pojmu souřadnic, ale tak, aby opravdu minimální množství základních vět, které by tvořilo dostatečný základ k dalšímu, takřka synthetickému rozvinutí elementární geometrie, bylo odvozeno na tomto analytickém podkladě. Tohoto cíle autor podle mého názoru plně dosáhl. I když však kniha Čechova není učebnicí analytické geometrie v pravém slova smyslu, domnívám se, že takřka všechny její části lze ve skoro nezměněném tvaru předvádět posluchačům matematiky v úvodním kurse geometrie. Toliko některé části (jako na př. část pojednávající o úhlech) snad by bylo záhodno přizpůsobit okolnosti, že posluchači v prvním roce nemají ještě dostatečný cvik v matematických abstrakcích.

Vladimír Knichal, Praha.

Karel Koutský. **Matematika a dialektický materialismus,** I. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952, 160 stran, náklad 2200 výtisků, cena 17·20 Kčs.

Koutského kniha „Matematika a dialektický materialismus“ je prvním pokusem v naší odborné literatuře podat soustavný marxistický výklad o základních ideologických otázkách matematiky. K sepsání knihy přistoupil autor po důkladném prostudování všech dosažitelných pramenů sovětských a jiných a jeho knížka vzbudila zaslouženou pozornost. Proto si vyžaduje též hlubšího rozboru.

Přistupme tedy k první kapitole „Matematika a základní filosofické otázky“. Zde se objasňuje rozdíl mezi filosofií materialistickou a idealistickou a mezi methodou dialektickou a metafysickou. Autor si klade za cíl dokázat dalším detailním zkoumáním, že ucelený pohled na matematiku může podat jedině dialektický materialismus. Je nutno poznamenat, že idealističtí filosofové viděli v „absolutní platnosti“ matematických poučeк potvrzení světového názoru a že tedy vědecké vysvětlení těchto otázek upevňuje posici dialektického materialismu a že je tak v těsné souvislosti s bojem dělnické třídy za socialismus. Přirozenou otázkou, která se okamžitě vynoří, je úkol podat vědeckou definici matematiky. S. Koutský se s tímto úkolem vypořádává podrobnou kritikou různých idealistických pokusů definovat matematiku, které mají tu společnou chybu, že se snaží dokázat apriornost matematických idei, ať už tím, že ji výslovně konstatují (*Poincaré, Dühring, Bôcher*), anebo o otázce vzniku matematických pojmů takticky mlčí (*B. Russel, B. Peirce*). Proti těmto pokusům staví autor materialistickou definici *Engelsovu,* která zdůrazňuje původ materialistických pojmů z vnějšího světa. Jestliže byly dříve podrobně rozebrány definice idealistů, měl by podle našeho názoru autor na tomto místě uvést i druhou část Engelsovy definice, která jedná o methodě matematického bádání, a správnost celé definice důkladně objasnit.[1])

V závěru první kapitoly vytyčuje s. Koutský tři programové požadavky, kterými je určen celkový ráz knihy. Tyto požadavky jsou:

a) věnovat větší pozornost historii matematiky,

[1]) Tuto mezeru si může čtenář doplnit ze znamenité stati *Ed. Čecha* „Cesty a úspěchy sovětské matematiky“, Časopis pro pěstování matematiky, **77** (1952).

b) ujasnit si zařazení matematiky do celku přírodních a technických věd a zhodnotit její podíl na jejich výstavbě a rozvoji (upozorňujeme zde čtenáře na zdařilý autorův výklad o problému „čisté" a „užité" matematiky na str. 14—18 první kapitoly knihy),

c) prozkoumat dnešní stav matematiky a zhodnotit její obsah, methody a strukturu.

Druhá kapitola „Vývoj matematiky v rámci společenského dění" osvětluje v přehledné zkrátce vliv vývoje společnosti na rozvoj matematiky od nejstarších dob, z nichž máme nějaké zprávy, až po nejnovější dobu. Všímá si při tom ovšem pouze hlavních událostí ve vývoji matematiky, které měly rozhodující vliv na její další rozvoj (*Eukleides, Viète, Descartes, Lobačevskij, Leibniz* a objevy s jejich jmény spojené). Tato kapitola je psána velmi přehledně a dává přesný přehled po thematu uvedeném v jejím názvu.

Ve třetí kapitole „Materialistické základy matematiky" autor zdůrazňuje nutnost materialistického chápání matematiky a ukazuje na škodlivost idealismu pro další vývoj matematiky. Nemůže být sporu o tom, že matematika vznikla z praktických potřeb lidstva a požadavků výroby statků, potřebných k životu společnosti. Odtud plyne, že původ matematických pojmů i method musíme hledat ve vnějším hmotném světě a nikoli ve svobodných výtvorech lidského rozumu.

Je samozřejmé, že během vývoje matematických pojmů došlo k několikanásobné abstrakci, takže dnes se nám matematika jeví jako věda velmi abstraktní. To však nemůže zastřít materiální původ matematických pojmů a method. Materiální původ matematických pojmů má však za následek, že se tyto pojmy stále vyvíjejí, že jsou jako pojmy každé jiné vědy ve své podstatě historické. To je zejména vidět na pojmu čísla. Velmi výstižným příkladem, jak může dojít k úplnému převratu v našich představách o prostoru, jest vznik geometrie Lobačevského, která vyvrátila *Kantovo* idealistické učení o aprioritě času a prostoru a tím dokázala, že naše představy o prostoru a čase nejsou absolutní, ale pocházejí ze zkušenosti. Autor dále rozvádí vznik pojmu přirozeného čísla jako abstraktní odraz objektivní reality. Ještě lépe je postup abstrakce vidět v geometrii.

Autor jej podrobně popisuje na příkladu postupu od fysikálního tělesa k pojmu geometrického útvaru. Nejen geometrické pojmy, ale i celá řada vztahů mezi nimi byla do matematiky převzata z praktických zkušeností, získaných při výrobě. Ty nejzákladnější z nich, kterým říkáme axiomy, tvoří základ, na kterém potom logicky dedukcí vyvozujeme další geometrické věty. Jest však známo, že i mnohé geometrické poznatky, které se dají užitím logiky z axiomů dokázat, ve skutečnosti vznikly bezprostředním pozorováním hmotné skutečnosti, jako na př. věty o proměně obrazců při zachování jejich obsahu. Materiální původ matematických pojmů a method vysvětluje také známou otázku, čím je způsobena aplikovatelnost matematiky. Kapitola je uzavřena známým citátem z Engelse, jehož hlavní myšlenku můžeme vyslovit ve značně zhuštěné formě asi tak, že matematika je proto jen aplikovatelná na vnější svět, protože je právě z tohoto světa převzata.

Čtvrtá kapitola je věnována kritice matematiky s hlediska dialektické methody. Kapitola je rozdělena podle čtyř hlavních dialektických zásad, tak jak jsou uvedeny *Stalinem* v práci o dialektickém a historickém materialismu. Není sporu o tom, že právě v matematice se více než kde jinde uplatňuje zásada souvislosti. Každému, kdo jen trochu přišel do styku s matematikou, je jasné, že práce v matematice spočívá především v odhalování souvislosti řešených problémů se skutečnostmi již známými. Zejména současný vývoj matematiky ukazuje, jak je nutné chápat matematiku jako nedílný celek. Každý opravdu tvůrčí matematik se zásadou souvislosti řídí na každém kroku, i když si to třeba ani neuvědomuje, neboť je mu jasné, že řešený problém nemůže zkoumat isolovaně od ostatní matematiky. Jest také jasné, že nejvýznamnější výsledky matematiky jsou ty, které odhalují často nečekané souvislosti mezi dvěma obory matematiky, na první pohled dosti vzdálenými. Proto je nutno u všech matematiků uvědoměle prohlubovat smysl pro tyto souvislosti a také pro odpovídající jim formy spolupráce. Recensenti se domnívají, že by při této příležitosti bylo vhodné zmíniti se o t. zv. aritmetisaci geometrie a nyní probíhajícím procesu geometrisace matematiky. Také by bylo třeba ukázat na souvislosti mezi ekonomickým vývojem společnosti a mezi vývojem matematiky.[2])

Zásada vývoje se odráží v matematice zejména v pojmu proměnné veličiny. Autor se zmiňuje také o t. zv. funkčním myšlení, velmi důležitém prvku moderní dialektiky. Jest pochopitelné, že dialektický vývoj můžeme pozorovat nejen u matematických pojmů, ale i u matematických method, u pojetí mnohých otázek a konečně i u samé problematiky. Matematika sama podléhá zákonům vývoje právě tak, jak jim podléhá celý hmotný svět a všechno lidské myšlení. Historie matematiky nám ukazuje, jak se mění problémy, které tvoří střed zájmu, jak staré theorie odumírají a na jejich místo nastupují nové účinnější a úplnější. Autor to dokazuje na vývoji pojmu čísla, početních operací a geometrie a vyzdvihuje, že revoluční objevy jako na př. theorie množin a neeuklidovské geometrie musely svést boj s názory zpátečníků. V souvislosti s druhou zásadou dialektiky si autor také všímá změn, které nastanou, přejdeme-li od jedné věci ke druhé, a jejichž eliminováním vznikají obecné pojmy. To však není vhodné, neboť tyto změny jsou docela něco jiného, než změny téže věci v čase, a proto nemají se zásadou vývoje nic společného.

Příklady, kterými K. Koutský dokládá platnost třetí dialektické zásady, t. zv. zvratu kvantity v kvalitu, vzbuzují u čtenáře pochybnosti. Hledíme-li totiž na Engelsův příklad změny vody v páru jenom z čistě matematické stránky — jako na přechod určité veličiny z jednoho intervalu do druhého — vidíme, že se velmi ochudí. Je sice pravda, že každá veličina při svém růstu přechází z jednoho intervalu do druhého skokem, ale to platí o každém intervalu, na který si jen vzpomeneme. Všichni dobře víme, že zmenšujeme-li určité kladné číslo, změní se toto náhle — skokem — v záporné. Přitom však nikoho nenapadne, aby tím dokládal dialektickou povahu matematiky. A příklady, které K. Koutský uvádí, ať už z elementární geometrie nebo z algebry, jsou jen variacemi na toto thema. Výjimku tvoří příklad o řešitelnosti algebraických rovnic. J. V. Stalin píše:

„Proto dialektická methoda praví, že proces vývoje je nutno chápat nikoli jako proces v kruhu, nikoli jako prosté opakování toho, co už tu bylo, nýbrž jako pohyb postupující, jako pohyb ve vzestupné linii, jako přechod od starého kvalitativního stavu ke kvalitativnímu stavu novému, jako vývoj od prostého k složitému, od nižšího k vyššímu."[3])

Ano, ty skoky, které znamenají přechod k vyššímu a složitějšímu pohybu hmoty, musí tvořit těžiště našeho zájmu. Na př. v matematice skok od aritmetiky k algebře. To však K. Koutský nečiní, a pokud se na př. o tomto skoku zmiňuje v II. kapitole, pak jen jako o šťastném nápadu Viètově počítat s písmeny místo čísly. To je výklad při nejmenším povrchní.

Nakonec přechází K. Koutský ke čtvrté dialektické zásadě jednoty a boje protikladů. Mnohé z příkladů zde uváděných mají velmi blízko k vulgarisaci. Autor zjišťuje na př., že při otáčení kružnice kolem jejího středu tato jako celek stojí, zatím co každý její bod se pohybuje, a vidí v tom jednotu protikladů. J. V. Stalin píše:[4])

„Proto dialektická methoda soudí, že proces vývoje od nižšího k vyššímu probíhá nikoli jako harmonické rozvíjení jevů, nýbrž jako vyjevování se rozporů, které jsou vlastní věcem a jevům, jako ‚boj' protikladných tendencí, působících na základě těchto rozporů".

---

[2]) Viz na př. pozoruhodný výrok *Marxův:* „Velmi důležitou roli sehrálo sporadické používání strojů v XVII. století, jelikož dalo velikým matematikům té doby opěrné body a stimuly pro vytvoření soudobé mechaniky", Kapitál, I. díl, rusky, str. 356.

[3]) [4]) *J. V. Stalin:* O dialektickém a historickém materialismu, str. 8, 10.

Lehce vidíme, že protiklady uváděné K. Koutským nemohou nám pomoci k pochopení žádného procesu vývoje, žádného pohybu hmoty, a proto mají jen formální význam. Ani příklad s obecnými čísly není vykládán zcela správně. Tato čísla tvoří jen pomocnou aparaturu k tomu, abychom mohly zkoumat vztahy mezi čísly v abstraktní podobě; hledat v nich jako takových jednotu protikladů nemá význam. Na druhé straně kladně lze posoudit příklad s vývojem početních operací. Nejpalčivější protiklady v dnešní matematice — theorie a praxe, abstraktního a konkretního, spojitého a přetržitého — nechal autor prakticky stranou.

Nyní ještě zaujměme stanovisko k celkovému postupu K. Koutského, který bere jednu zásadu dialektiky za druhou, tak jak byly vysloveny J. V. Stalinem, a hledá pro každou z nich ilustrativní příklady. Klasikové marxismu-leninismu ve svých dílech podali nesmrtelné příklady dialektického rozboru nejrůznějších problémů. Nikdy však nepostupovali takto formálně, ale dialektika jejich výkladu byla vždy obsažena v něm samém. Vzpomeňme jen jakým mistrovským dialektickým rozborem buržoasních ekonomických vztahů je Marxův Kapitál. Nadto tu máme tento přímý pokyn Leninův:[5])

„Rozdvojení jednotného a poznání jeho si odporujících částí … je podstatou … dialektiky …:

Této stránce dialektiky bývá obyčejně (na př. u *Plechanova*) věnováno málo pozornosti; totožnost protikladů bývá pojímána jako souhrn příkladů („na př. zrno", „na př. prvotní komunismus". Totéž u Engelse. To však „pro populárnost" …), a nikoliv jako zákon poznání (a zákon objektivního světa).

V matematice + a —. Diferenciál a integrál …"

Je zajímavé, že právě to, co dělal Engels „pro populárnost" je nejhorlivěji napodobováno a stále se rozmnožují příklady na způsob Leninem kritisovaného + a —.

V páté kapitole nazvané Matematika jako nástroj fysiky autor si klade dva hlavní úkoly. Za prvé se snaží vysvětlit, co je příčinou stále rostoucího významu matematiky pro fysiku, za druhé chce vyvrátit některé idealistické názory ve fysice, které vznikly právě z úzkého sepjetí matematiky s fysikou.

V první části formuluje autor hlavní úkoly matematiky ve fysice. V klasické *Newtonově* fysice to jsou:

1. Kontrola vyrovnání a vysvětlení odchylek při empirických zákonech,
2. formulování objevených vztahů pomocí matematických vzorců,
3. upravování, zobecňování a přenášení vzorců,
4. zjednodušování způsobu fysikálního uvažování,
5. verifikace fysikálních hypothes.

V moderní fysice k tomu přistupují:

6. Tvoření fysikálních pojmů,
7. objasňování fysikálních pojmů.

I když výčet je v podstatě správný, nelze s některými body souhlasit bez výhrad. Pokud jde o 7. bod, není dobře jasno, jak jej autor chápal. Domníváme se totiž, že fysikální pojem může objasnit jen fysika.

Pokud jde o hlavní problémy této kapitoly, domníváme se, že autor mohl jít hlouběji, i když beze sporu nutno uznat, že autorovy podněty jsou dobře uváženou látkou k přemýšlení.

Domníváme se, že rozvedení některých otázek by mohlo přispět k osvětlení problematiky této kapitoly. Tak by asi stálo za to vyvodit důsledky z Leninovy formulace logiky jako odrazu praxe člověka a sledovat alespoň poněkud paralelnost vývoje matematiky

---

[5]) *V. I. Lenin:* „K otázce o dialektice".

a fysiky. Mělo by se také ukázat, že na př. Lobačevský nevynechal axiom o rovnoběžkách náhodou a potom, jak se matematika a fysika ovlivňují navzájem (theorie distribucí, operátorů a pod.).

Dále se domníváme, že by mohla mnoho osvětlit analysa abstrakce již vzhledem k tomu, že jsme svědky toho, že názorné pojmy fysiky se dnes hroutí a že v matematice již dlouho se nelze obejít bez pojmů stěží přístupných názoru. Asi by také bylo vhodné, kdyby se rozebralo abstraktní myšlení a jeho poměr k pravdě (Lenin) a kdyby se ukázaly kořeny idealistického pojetí jako neúměrné zveličování jedné plošky poznání (Lenin).

Dále tato kapitola postrádá to, že se nerozlišuje idealismus subjektivní a objektivní, a to, že autor neseznamuje čtenáře dostatečně s Leninovými názory.

S. Koutský si položil smělý a obtížný úkol, který si ztížil ještě tím, že u čtenáře předpokládá jen málo vědomostí, a to jak z matematiky tak i z filosofie. Z toho vyplývají i hlavní dvě slabiny: přílišná rozvleklost a místy vulgarisace. Rozvleklost proto, že opakuje mnoho známých věcí, a vulgarisace proto, že se snaží učinit příklady populárními. Vcelku je však recensovaná kniha záslužnou prací, která může mnoha matematikům sloužit jako úvod do filosofického promýšlení jejich práce. Bude však moci být definitivně posouzena teprve po vyjití druhého dílu.

Kolektiv vědeckých aspirantů
Matematického ústavu ČSAV, Praha.

Vojtěch Jarník: **Diferenciální počet.** Pokračování úvodu do počtu diferenciálního. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1953, stran 595, náklad 3300, cena váz. 70 Kčs.

Kniha, kterou akademik Vojtěch Jarník předkládá československé matematické veřejnosti, je pokračováním jeho *Úvodu do počtu diferenciálního* (Úvod). Jako všechny předchozí autorovy práce vyniká i Diferenciální počet naprostou přesností a jasností prováděných úvah. Kniha je určena především pro studenty matematiky na universitě. K jejímu studiu je třeba znát látku Úvodu a některé jednoduché věty integrálního počtu a algebry. Ke knize je v textu připojeno velké množství cvičení, která umožní čtenáři dokonalejší pochopení a zvládnutí vyložené látky.

Knihu je možno zhruba rozdělit na tři části. První část obsahuje přípravné úvahy potřebné pro další výklad této knihy a zároveň pro integrální počet, který autor připravuje jako pokračování svého *Úvodu do počtu integrálního.* Druhá část obsahuje vlastní diferenciální počet. Třetí část je věnována mocninným řadám a elementárním funkcím komplexní proměnné. Látku knihy rozdělil autor do 12 kapitol a do jednoho dodatku.

První kapitola obsahuje základy obecné teorie množin. V jejím úvodu jsou objasněny základní pojmy matematické dedukce: výrok, výroková funkce, obecný výrok, existenční výrok, negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence. Dále jsou zde zavedeny základní množinové operace: sjednocení, průnik a rozdíl množin. Zobrazení množiny A do množiny B je definováno jako množina f uspořádaných dvojic (x, y), $x \in A$, $y \in B$, kde ke každému $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in B$ takový, že $(x, y) \in f$. Pomocí zobrazení je definována ekvivalence množin. V dalším jsou odvozeny základní věty o spočetných množinách a dokázána existence nespočetných množin. Kapitola je zakončena zavedením důležitých pojmů, jako je kartézský součin množin a vektorový prostor (modul).

Druhá kapitola je věnována studiu posloupností reálných a komplexních čísel. Především je obor reálných čísel rozšířen o prvky $+\infty$, $-\infty$. Autor to dělá zcela přirozeně zobecněním pojmu řezu z Dedekindovy theorie reálných čísel vyložené v Úvodu. Dále jsou zavedeny pojmy: hromadná hodnota, limes superior a inferior a dokázána věta Bolzano-Weierstrassova a Bolzano-Cauchyova.

V třetí kapitole jsou studovány nekonečné řady a nekonečné součiny s komplexními členy. Autor nejdříve doplňuje theorii absolutně konvergentních řad rozvinutou v Úvodu. Dále se zabývá dvojnými a zobecněnými řadami. Pro neabsolutně konvergentní řady jsou pomocí Abelovy parciální sumace dokázány věty známé v literatuře pod jménem Abelovo a Dirichletovo kriterium. V této kapitole odvozuje autor také věty o přerovnávání a násobení absolutně a neabsolutně konvergentních řad. Kapitola je zakončena základními větami z theorie nekonečných součinů, při čemž je ukázána souvislost mezi absolutně konvergentními řadami a absolutně konvergentními součiny.

Kapitola čtvrtá je věnována stejnoměrné konvergenci posloupností a řad konečných reálných funkcí. Nejdříve je odvozena podmínka Bolzano-Cauchyova a dokázána kriteria Abelova a Dirichletova pro řady s nekonstantními členy. Dále jsou dokázány věty o spojitosti, derivování a integrování (tvoření primitivní funkce) limitní funkce posloupnosti funkcí. Analogické věty jsou vysloveny i pro nekonečné řady. Na konci kapitoly je dokázána věta o stejnoměrné spojitosti funkce v omezeném uzavřeném intervalu.

Kapitola pátá má název *Reálné funkce jedné reálné proměnné.* Autor zde podrobněji studuje vlastnosti reálných funkcí, které souvisí se spojitostí, limitou a derivací. Dále jsou zde studovány některé speciální třídy funkcí, které hrají v matematice důležitou roli. Jsou to především funkce monotonní, funkce s konečnou variací a funkce absolutně spojité. Autor zde současně podává řadu pojmů a vět týkajících se bodových množin na přímce. Tak je tedy tato kapitola také velmi vhodnou přípravou pro obecnější a pro studenta nové úvahy šesté kapitoly o metrických prostorech. V páté kapitole nalezne čtenář příklad spojité funkce, která nemá v žádném bodě derivaci (v 3. řádku zdola na str. 202 má zřejmě být Δ místo δ). Jeden odstavec je věnován důležitým nerovnostem, jako je nerovnost Hölderova, Buňakovského a Minkowského. Poslední odstavec pojednává o funkcionálních rovnicích pro elementární funkce ax, x^a, a^x a $a \lg x$.

Jak již bylo řečeno, pojednává kapitola šestá o metrických prostorech. Výklad této kapitoly je dosti obšírný. Autor je zde veden snahou, aby čtenář vnikl bez obtíží do této theorie, která je mocným nástrojem moderní matematiky. Autor zavádí pojem metrického prostoru a ilustruje ho na důležitých příkladech jako je euklidovský r-rozměrný prostor (E_r) a prostor spojitých funkcí na uzavřeném omezeném intervalu. V příkladě 4 jsou definovány normované lineární prostory a ukázána jejich souvislost s metrickými prostory. Dále jsou zde zavedeny pojmy známé čtenáři ve speciálním případě z předchozí kapitoly. Jsou to uzávěr, derivace, vnitřek, hranice množiny, uzavřené a otevřené množiny. O těchto základních pojmech je dokázána řada elementárních vět. Na to bezprostředně navazují úvahy o množinách typu F_σ, G_δ a o množinách hustých a řídkých v metrickém prostoru. Bylo by zde snad dobře upozornit čtenáře na to, že množina je řídká, právě když její uzávěr neobsahuje žádný vnitřní bod. Tím by se jednak lépe osvětlil názorný význam „řídkosti" množiny, jednak bychom ihned dostali větu, že uzavřená množina je řídká, právě když neobsahuje žádnou neprázdnou otevřenou množinu; toho bychom pak mohli použít na př. na str. 464, 3.—7. ř. shora. Po odstavci o intervalech v euklidovských prostorech následuje studium spojitosti a limity zobrazení v obecných metrických prostorech. Mimo jiné je ukázána souvislost mezi spojitými zobrazeními a otevřenými i uzavřenými množinami. Dále věnuje autor pozornost dvojným posloupnostem, dvojným limitám a symbolům malé a velké o. Po té studuje některé speciální metrické prostory, které jsou důležité v matematické analyse. Jsou to především úplné, separabilní a kompaktní prostory. Dále podává autor definici souvislých množin. Dokazuje o nich základní věty, při čemž věnuje zvýšenou pozornost souvislosti v euklidovských prostorech. Poté se opět obrací ke studiu spojitosti a stejnoměrné konvergence posloupnosti zobrazení. Dokazuje především věty o spojitých zobrazeních s kompaktním nesouvislým oborem, načež se obrací k otázce rozšíření spojité reálné funkce definované na části metrického prostoru. Konec kapitoly je věnován Weierstrassově větě o aproximaci spojitých funkcí polynomy a polynomům nejlepší aproximace.

Kapitoly sedmá až desátá obsahují vlastní diferenciální počet reálných a komplexních funkcí n reálných proměnných. Výběr látky je takový, jak je to obvyklé v učebnicích diferenciálního počtu. Její zpracování je však zcela osobité, při čemž, pokud je to možné, užívá autor obecných pojmů a method šesté kapitoly. S obzvláštní pečlivostí se zabývá totálními diferenciály r-tého řádu a diferenciály složené funkce. Upozorňuje na licence při označování, které sice dávají vzorcům přehledný tvar, ale mohou se velmi snadno stát pramenem nedorozumění. Totální diferenciál r-tého řádu je zaveden dvojím způsobem. Ještě před tím je však definováno, co znamená rčení, že funkce má diferenciál r-tého řádu. Autor ukazuje souvislost těchto tří pojmů a tak krásným způsobem objasňuje pojem r-tého diferenciálu, který bývá v jiných knihách vykládán značně mlhavým způsobem. Úvahám o diferenciálech je věnována sedmá kapitola. Tato kapitola obsahuje vedle toho ještě věty o záměnnosti vyšších parciálních derivací, Taylorovu větu a větu o diferenciálech limitních funkcí.

Osmá kapitola je věnována reálným implicitním funkcím. V ní odvozuje autor především základní větu o implicitních funkcích. Při tom důkaz existence řešení systému rovnic $F_1(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0, \ldots\ F_s(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0$ podává methodou postupných aproximací. Patřičnou pozornost věnuje regulárním zobrazením E_r do E_r a zobrazením E_r do E_s a s tím souvisícímu pojmu závislosti a nezávislosti funkcí.

Devátá kapitola má název *Záměna proměnných*. V ní se zabývá autor technikou výpočtu derivací při záměně proměnných. Theoreticky sice neobohacuje tato kapitola dosud vyloženou látku, ale jest přesto velice důležitá vzhledem k četným aplikacím, které mají methody tam uvedené v matematické analyse.

V desáté kapitole se autor zabývá studiem lokálních extrémů funkcí n reálných proměnných.

Kapitola jedenáctá a dvanáctá jsou na rozdíl od kapitol předcházejících věnovány studiu komplexních funkcí komplexní proměnné. Tyto kapitoly nejsou však míněny jako úvod do theorie analytických funkcí. Vlastním jejich obsahem je studium mocninných řad jedné a více proměnných a studium elementárních funkcí e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$, $\lg z$, $\operatorname{arc\,tg} z$, $\arcsin z$ a ξ^η.

Dodatek obsahuje několik doplňků k theorii nekonečných řad. Je to především integrální kriterium konvergence, Eulerova methoda sčítání nekonečných řad a pojem zpola stejnoměrné konvergence.

Jarníkův Diferenciální počet má mimo jiné dvě velké přednosti. Prvá je v tom, že ukazuje čtenáři úzkou souvislost moderních směrů v matematice s látkou tak klasickou jako je diferenciální počet. Tento úkol zvládl autor skutečně mistrovsky. Druhá přednost je v dokonalém podání pojmu totálního diferenciálu. Četba této partie jistě velmi prospěje každému, kdo se zabývá matematikou nebo jejími aplikacemi. Při výkladu o diferenciálu a zvláště o diferenciálu vyšších řádů měl autor před sebou úkol obtížný nejen po stránce methodické, nýbrž i po stránce vědecké; a je třeba poznamenat, že nikterak nešel cestou autorů dřívějších „diferenciálních počtů", kteří sice na začátku hlásají velkou přesnost (a té přesnosti se skutečně drží, pokud jsou věci dostatečně triviální), brzy však na ni zapomenou. Jarník zůstává ovšem přesnosti věren; a je nutno zdůraznit, že rozebírá podrobně právě ty věci, které bývají obyčejně vykládány nejasně, a ukazuje nejen jejich logickou podstatu, nýbrž i užitečný formalismus, který odtud při zavedení určitých „licencí" dostaneme. To je jistě důležité; kdyby autor pouze napsal, jak „je to dobře", pak by asi leckterý čtenář stál později v rozpacích před knihou, kde je to „jinak" a kde není tak docela jasné, zda je to vše v pořádku. Takto čtenář snadno nahlédne, že to, co se jinde „provádí" s diferenciály, není vlastně vždycky úplný nesmysl, nýbrž obyčejně jen jakási „licence". Naopak je jistě mnoho čtenářů, kteří jsou na „licence" tak zvyklí, že si ani neuvědomují, že jakýchsi licencí užívají. Jestliže takový čtenář s porozuměním přečte Jarníkovu knihu, bude moci sám nejlépe posoudit rozdíl mezi prováděním jakýchsi formálních operací a pochopením podstaty věci.

Jarníkův diferenciální počet podstatně obohacuje naši matematickou literaturu. Jím zajisté nezůstal akademik Jarník nic dlužen své pověsti znamenitého matematika a zároveň znamenitého pedagoga.

Čestmír Vitner, Praha.