Alois Urban
Druhý útvar křivosti plochy v R_3

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 1, 73--88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117067`

DRUHÝ ÚTVAR KŘIVOSTI PLOCHY V R_3

A. URBAN, Praha.

(Došlo 5. září 1952.) DT: 513.735

V bodě plochy lze křivce plochy přiřadit t. zv. n-tý vektor křivosti ($n = 0, 1, 2, \ldots$), který je společný všem křivkám o společné tečně. V práci je podána geometrická interpretace druhého vektoru křivosti a odvozeny věty o křivkách a plochách jím vytvořených. Závěrem jsou užitím n-tého vektoru křivosti zavedeny pseudoasymptotické směry n-tého řádu a ukázána jejich souvislost s některými jinými směry na ploše.

1. Křivky plochy V_2 v (obyčejném) R_3, které procházejí jejím nesingulárním bodem B a které mají v tomto bodě společný jednotkový tečný vektor i^a[1]), mají — jak známo — také společný vektor

$$v^\varkappa = i^c i^d b_{cd} N^\varkappa, \tag{1.1}$$

kde b_{cd} je druhý fundamentální tensor plochy a $N^\varkappa$ jednotkový vektor její normály[2]). Umístíme-li počáteční bod vektoru $v^\varkappa$ do uvažovaného bodu plochy, pak koncový bod jeho vyplní úsečku na normále plochy v tomto bodě. Tuto úsečku nazveme *prvý útvar křivosti* plochy v bodě B[3]); jak víme, její velikost a poloha vzhledem k bodu B plochy udává různé typy bodů plochy V_2 v R_3[4]).

Kromě vektoru $v^\varkappa$ dají se v uvažovaném vodě B, o kterém budeme dále předpokládat, že není pro V_2 singulární, sestrojit ještě další vektory, které jsou společné všem křivkám plochy o společné tečně v bodě B. V dalším se budeme zabývat podrobněji jedním takovým společným vektorem.

2. Nechť ∇_a je symbol kovariantní derivace definované užitím *Christoffelových symbolů* dané plochy V_2 v R_3 a nechť D_a je známý *Waerden-Bortolottiho symbol*[5]) definovaný takto

[1]) Latinské indexy a, b, c, d, e, f probíhají I, II; řecké indexy $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \omega$ probíhají 1, 2, 3.

[2]) Je-li V_2 v R_3 dána (v kartézském souřadnicovém systému) rovnicemi $x^\varkappa = x^\varkappa(\eta^a)$, kde $x^\varkappa(\eta^\alpha)$ jsou reálné analytické funkce reálných parametrů η^a, pak $b_{cd} = -(\partial_c x^\lambda) \cdot (\partial_d N_\lambda) = N_\lambda \partial^2_{cd} x^\lambda$, kde $\partial_c x^\lambda = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial \eta^c}$, $\partial^2_{cd} x^\lambda = \dfrac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \eta^c \partial \eta^d}$, $\partial_d N_\lambda = \dfrac{\partial N_\lambda}{\partial \eta^d}$; místo $\partial_c x^\lambda$ budeme rovněž psát B_c^λ.

[3]) *Schouten-Struik*, [3], I., str. 93—96.

[4]) *Struik*, [4], str. 119.

[5]) *Schouten-Struik*, [3], I., str. 93—96.

a) pro vektorové pole v^a resp. w_a plochy V_2 jest

$$\mathrm{D}_b v^a = \nabla_b v^a \text{ resp. } \mathrm{D}_b w_a = \nabla_b w_a;^{6)} \tag{2.1}$$

b) pro vektorové pole v^λ resp. w_λ (definované na V_2) prostoru R_3 jest

$$\mathrm{D}_b v^\lambda = B_b^\mu\, \partial_\mu v^\lambda \text{ resp. } \mathrm{D}_b w_\lambda = B_b^\mu\, \partial_\mu w_\lambda.^{7)} \tag{2.2}$$

Zavedeme-li ještě tensor

$$H_{a_n a_{n-1} \ldots a_0}^{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\varkappa} \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{D}_{a_n}\mathrm{D}_{a_{n-1}} \ldots \mathrm{D}_{a_0} x^\varkappa, \tag{2.3}$$

pak snadno dokážeme:

Vektory

$$\underset{n}{v^\varkappa} \overset{\text{def.}}{=} i^{a_0} \ldots i^{a_n} H_{a_n \ldots a_0}^{\cdot\;\cdot\;\varkappa} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

jsou společné pro všechny křivky na V_2 v R_3, které procházejí jejím pevným bodem a mají v něm společný tečný (jednotkový) vektor i^a.

Důkaz je evidentní; plyne z definice tensoru $H_{a_n \ldots a_0}^{\cdot\;\cdot\;\varkappa}$ a z definice vektoru $\underset{n}{v^\varkappa}$.

Právě sestrojený vektor $\underset{n}{v^\varkappa}$ nazýváme *n-tý vektor křivosti* (přiřazený směru i^a).

Je-li $n = 0$, dostáváme triviální případ; je totiž $H_a^{\cdot\varkappa} = \mathrm{D}_a x^\varkappa = B_a^\varkappa$ a tedy $\underset{0}{v^\varkappa} = i^\varkappa$.

V případě $n = 1$ je $H_{cd}^{\cdot\cdot\varkappa} = \mathrm{D}_c B_d^\varkappa = b_{cd} N^\varkappa$ a tedy $\underset{1}{v^\varkappa} = v^\varkappa$, kde $v^\varkappa$ je vektor definovaný v (1.1)[8]; užijeme-li normální křivosti

$$\frac{1}{R} = i^c i^d h_{cd} \tag{2.5}$$

plochy ve směru i^a, pak lze pro vektor $\underset{1}{v^\varkappa}$ psát

$$\underset{1}{v^\varkappa} = \frac{1}{R} N^\varkappa; \tag{2.6}$$

jeho geometrický význam je známý.

Nechť $n = 2$; v tomto případě je $H_{cde}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = \mathrm{D}_c H_{de}^{\cdot\cdot\varkappa}$, t. j.

$$H_{cde}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = -b_c^a b_{de} B_a^\varkappa + b_{cde} N^\varkappa, \tag{2.7}$$

---

6) Jelikož jsme se v R_3 omezili jen na kartézské souřadnicové systémy, je na př. $\nabla_b v^a = B_{b\mu}^{\lambda a} \partial_\lambda v^\mu$.

7) Snadno se zjistí, v případě kdy pole v^λ resp. w_λ je vektorovým polem na V_2 (a tedy $v^\lambda = B_a^\lambda v^a$ resp. $w_\lambda = B_\lambda^a w_a$), že (2.1) a (2.2) jsou ekvivalentní.

8) $H_{cd}^{\cdot\cdot\varkappa}$ je známý tensor křivosti V_2 vzhledem k R_3; viz na př. *Schouten-Struik*, [3], I., str. 97.

kde $b_{cde} = D_c b_{de}$ je známý Codazziho tensor [9]); tedy pro $\underset{2}{v}^\varkappa$ najdeme

$$\underset{2}{v}^\varkappa = - i^c i^d i^e (b^a_c b_{de} B^\varkappa_a - b_{cde} N^\varkappa). \tag{2.8}$$

V dalším se omezíme na vyšetřování právě tohoto druhého vektoru křivosti.

3. Rovnice (2.8) udává $\underset{2}{v}^\varkappa$ jako lineární kombinaci tří lineárně nezávislých vektorů $B^\varkappa_a$ ($a = \mathrm{I}, \mathrm{II}$) a $N^\varkappa$. Místo těchto vektorů zvolme si basi $i^\varkappa$, $j^\varkappa$, $N^\varkappa$, kde $j^\varkappa$ je jednotkový normální vektor křivky o tečném vektoru $i^\varkappa$, uvažované jako křivky na V_2; oblouk dané křivky nechť je s, geodetická křivost k. Nechť

$$[i^\varkappa, j^\varkappa, N^\varkappa] = \varepsilon, \tag{3.1}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$[10]).

Pro druhý vektor křivosti $\underset{2}{v}^\varkappa$ přiřazený směru i^a platí

$$\underset{2}{v}^\varkappa = -\frac{1}{R^2} i^\varkappa - \frac{\varepsilon}{RT} j^\varkappa + \frac{1}{S} N^\varkappa, \text{ [11])} \tag{3.2}$$

kde $\frac{1}{R}$ resp. $\frac{1}{T}$ je geodetická křivost resp. torse ve směru i^a a

$$\frac{1}{S} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{1}{R} - 2 \frac{\varepsilon k}{T} \tag{3.3}$$

je Codazziho skalár ve směru i^a[12]).

Důkaz. Nechť $\overset{(\alpha)}{v}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) jsou souřadnice vektoru $\underset{2}{v}^\varkappa$ v uvažované basi, t. j. nechť

$$\underset{2}{v}^\varkappa = \overset{(1)}{v} i^\varkappa + \overset{(2)}{v} j^\varkappa + \overset{(3)}{v} N^\varkappa. \tag{3.4}$$

Odtud skalárním násobením vektory $i_\varkappa$, $j_\varkappa$, $N_\varkappa$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \overset{(1)}{v} = - i^a i^b b_{ab} \,.\, i^c i^d b_{cd}, \\ &\text{b)}\ \overset{(2)}{v} = - i^a i^b b_{ab} \,.\, i^c j^d b_{cd}, \\ &\text{c)}\ \overset{(3)}{v} = i^a i^b i^c b_{abc}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Vzhledem k definici geodetické křivosti (2.5) a geodetické torse ve směru i^a

---

[9]) *Kagan*, [2], II., str. 13.

[10]) $[a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda]$ značí determinant matice souřadnic vektorů a^λ, b^λ, c^λ.

[11]) *Vyčichlo*, [5], str. 3, (16), kde je třeba položit $\beta = -\frac{\varepsilon}{RT}$.

[12]) (3.3) je v podstatě t. zv. *prvý Forsythův vzorec*; viz *Kagan*, [2], II., str. 48, kde skalár $\frac{1}{S}$ je označen jako *Beltramiho invariant* Ω.

$$\frac{1}{T} = \varepsilon b_{cd} i^c j^d \text{ [13]} \tag{3.6}$$

plyne okamžitě z (3.5) $\overset{(1)}{v} = -\frac{1}{R^2}$, $\overset{(2)}{v} = -\frac{\varepsilon}{RT}$. Derivováním (2.5) podle oblouku křivky najdeme

$$i^a i^b i^c b_{abc} + 2k i^c j^d b_{cd} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R} \tag{3.7}$$

a tedy $\overset{(3)}{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R} - 2\frac{\varepsilon k}{T}$.

Poznámka 1. Jestliže $i^\varkappa$, $n^\varkappa$, $b^\varkappa$ tvoří průvodní trojhran uvažované křivky v R_3 a jsou-li k_1 a k_2 její první a druhá křivost, pak lze také pro $\underset{2}{v}^\varkappa$ psát

$$\underset{2}{v}^\varkappa = (k^2 - k_1^2) i^\varkappa + \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} n^\varkappa - \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} j^\varkappa + k_1 k_2 b^\varkappa - \frac{3\varepsilon k}{T} N^\varkappa; \text{ [14]} \tag{3.8}$$

derivujeme-li totiž $i^\varkappa = B_a^\varkappa i^a$ dvakráte podle oblouku křivky, dostáváme

$$\underset{2}{v}^\varkappa = \frac{\mathrm{d}^2 i^\varkappa}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{D}^2 i^a}{\mathrm{d}s^2} B_a^\varkappa - 3\frac{\mathrm{D}i^c}{\mathrm{d}s} i^d b_{cd} N^\varkappa, \tag{3.9}$$

kde $\frac{\mathrm{D}i^a}{\mathrm{d}s} = i^b \mathrm{D}_b i^a$. Po dosazení z Frenetových vzorců

$$\frac{\mathrm{d}^2 i^\varkappa}{\mathrm{d}s^2} = -k_1^2 i^\varkappa + \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} n^\varkappa + k_1 k_2 b^\varkappa, \quad \frac{\mathrm{D}i^a}{\mathrm{d}s} = k j^a, \quad \frac{\mathrm{D}^2 i^a}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} j^a - k^2 i^a$$

do (3.9) a užitím (3.6) dostáváme (3.8).

Poznámka 2. Užitím dvojího vyjádření (3.2) a (3.8) vektoru $\underset{2}{v}^\varkappa$ snadno dokážeme:

Pro křivosti křivky na ploše platí rovnice

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad k_1^2 - k^2 = \frac{1}{R^2}, \\
&\text{b)} \quad \varepsilon\varepsilon' k_1 k_2 \sin\varphi - \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}\cos\varphi + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} = \frac{\varepsilon}{RT}, \\
&\text{c)} \quad \varepsilon\varepsilon' k_1 k_2 \cos\varphi + \frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon k}{T},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

kde φ je úhel normál $j^\varkappa$ a $n^\varkappa$ uvažované křivky.

---

[13]) Geodetická torse $\frac{1}{T}$ ve směru i^a definuje se obvykle vztahem $\frac{1}{T} = i^c i^d k_{cd}$, kde $k_{cd} = A^{-1}(a_{\mathrm{I}c} b_{\mathrm{II}d} - a_{\mathrm{II}c} b_{\mathrm{I}d})$, a_{cd} je první fundamentální tensor plochy a $A = +\sqrt{\mathrm{Det.}\,|a_{cd}|}$ je diskriminant plochy (viz na př. *Hlavatý*, [1], str. 296; uvedené vyjádření pro $\frac{1}{T}$ plyne ze vzorce (1.3) na str. 297).

[14]) *Hlavatý*, [1], str. 324, věta (6.4); *Vyčichlo*, [5], str. 1—3.

Důkaz. Vyjádřeme průvodní trojhran $i^\varkappa$, $n^\varkappa$, $b^\varkappa$ křivky užitím base $i^\varkappa$, $j^\varkappa$, $N^\varkappa$, t. j. položme

$$n^\varkappa = j^\varkappa \cos\varphi + N^\varkappa \sin\varphi,$$

$$\varepsilon\varepsilon' b^\varkappa = - j^\varkappa \sin\varphi + N^\varkappa \cos\varphi, \tag{3.11}$$

kde $\varepsilon' = [i^\varkappa, n^\varkappa, b^\varkappa]$; dosazením (3.11) do (3.8) a porovnáním s (3.2) dostáváme (3.10).

Z vyjádření (3.2) druhého vektoru křivosti $\underset{2}{v}^\varkappa$ plynou bezprostředně některé jednoduché důsledky.

a) *Druhý vektor křivosti leží v tečné rovině plochy tehdy a jen tehdy, jestliže přísluší směru i^a, který vyhovuje rovnici*

$$b_{cde}\, i^c i^d i^e = 0. \tag{3.12}$$

V každém bodě plochy, ve kterém Codazziho tensor b_{cde} je nenulový, existuje tedy alespoň jeden a nejvýše tři různé takové směry i^a[15]). Křivky plochy, jejichž tečny leží v těchto směrech, vyhovují diferenciální rovnici

$$b_{abc}\, d\eta^a\, d\eta^b\, d\eta^c = 0; \tag{3.13}$$

jsou to známé Codazziho křivky plochy[16]).

b) *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby vektor druhé křivosti byl v daném bodě kolineární s normálním vektorem plochy, jest, aby příslušel asymptotickému směru.*

c) *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby všechny vektory druhé křivosti v daném bodě byly kolineární s normálním vektorem plochy, jest, aby bod byl rovinovým bodem plochy*[17]).

Tvrzení vět b) a c) plynou z

$$\underset{2}{v}^\varkappa = \frac{1}{S} N^\varkappa \Leftrightarrow b_{cd}\, i^c i^d = 0. \tag{3.14}$$

d) *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby druhý vektor křivosti byl v daném bodě plochy nulovým vektorem, jest, aby příslušel asymptotickému směru a — je-li daný bod neparabolický*[18]) — *aby asymptotická křivka měla v uvažovaném bodě stacionární bod.*

e) *Druhý vektor křivosti je nulovým vektorem pro všechny směry ve všech bodech plochy tehdy a jen tehdy, je-li plocha rovinou.*

---

[15]) V bodech plochy, v nichž tensor b_{cde} je nulový, jsou všechny vektory druhé křivosti tečnými vektory; jediné plochy, jejichž každý bod má tuto vlastnost, jsou rovina, kulová plocha a rotační válcová plocha (viz *Kagan*, [2], II., str. 46).

[16]) *Kagan*, [2], II., str. 222.

[17]) Bod plochy se nazývá rovinovým bodem, jestliže v něm hodnost tensoru b_{cd} je 0 (viz na př. *Kagan*, [2], I., str. 201).

[18]) T. j. v bodě, ve kterém hodnost tensoru b_{cd} je 2.

Tvrzení vět d) a e) plynou z toho, že $\underset{2}{v}^{\varkappa}$ je podle (3.5) nulovým vektorem tehdy a jen tehdy, jsou-li současně splněny rovnice

$$b_{ab}i^a i^b = 0, \; b_{cde}i^c i^d i^e = 0. \tag{3.15}$$

Tyto jsou zřejmě splněny identicky v každém bodě plochy tehdy a jen tehdy, je-li plocha rovinou. Derivací rovnice

$$b_{ab}i^a i^b = 0 \tag{3.16}$$

podle oblouku asymptotiky dostáváme

$$b_{abc}i^a i^b i^c + 2kb_{ab}i^a j^b = 0, \tag{3.17}$$

kde i^a, j^a jsou tečný a normální vektor asymptotické křivky a k její geodetická křivost.

Je-li uvažovaný bod parabolický, pak

$$b_{ab}i^a i^b = 0 \Rightarrow b_{ab}i^a j^b = 0 \tag{3.18}$$

a tedy — vzhledem k (3.17) —

$$b_{ab}i^a i^b = 0 \Rightarrow b_{abc}i^a i^b i^c = 0. \tag{3.19}$$

Není-li uvažovaný bod parabolický, pak rovnice (3.15) jsou ekvivalentní s rovnicemi

$$b_{ab}i^a i^b = 0, \; k = 0; \tag{3.20}$$

odtud již plynou tvrzení věty d).

f) *Směr, jemuž v neparabolickém bodě plochy přísluší nulový druhý vektor křivosti, je Darbouxův.*

Důkaz. Darbouxovy směry (v neparabolickém bodě plochy) vyhovují rovnici

$$a_{abc}i^a i^b i^c = 0, \tag{3.21}$$

při čemž kubický tensor a_{abc} je známý Darbouxův tensor[19])

$$a_{abc} \overset{\text{def.}}{=} b_{abc} - \tfrac{3}{4}b_{(ab}K_{c)}, \tag{3.22}$$

kde $K_c = \dfrac{\partial \log K}{\partial \eta^c}$ a K $(\neq 0)$ je Gaussova křivost plochy. Tvrzení věty f) plyne z toho, že $\underset{2}{v}^{\varkappa} = 0 \Rightarrow b_{cd}i^c i^d = 0$, $b_{abc}i^a i^b i^c = 0$.

4. Abychom mohli udat geometrickou interpretaci Codazziho skaláru $\dfrac{1}{S}$ ve směru i^a, stačí vyšetřit průmět $'\underset{2}{v}^{\varkappa}$ vektoru $\underset{2}{v}^{\varkappa}$ do normální roviny příslušné směru i^a, t. j. vyšetřit vektor

$$'\underset{2}{v}^{\varkappa} = -\frac{1}{R^2}i^{\varkappa} + \frac{1}{S}N^{\varkappa}. \tag{4.1}$$

Za předpokladu $\dfrac{1}{R} \neq 0$ — a na tento případ se omezíme — stačí znát přímku

[19]) Viz na př. *Hlavatý*, [1], str. 341, nebo *Kagan*, [2], II., str. 210.

p směru vektoru $'v^\varkappa_2$ procházející uvažovaným bodem; pak již ze známé geodetické křivosti $\frac{1}{R}$ lze sestrojit $\frac{1}{S}$ (a užitím geodetické torse $\frac{1}{T}$ také vektor $v^\varkappa_2$). Uvedeme proto konstrukci přímky p.

Nechť k je jednoduchá kuželosečka ležící v normální rovině ν proložené nikoliv asymptotickou tečnou t plochy v jejím bodě B[20]), jež má s normálním řezem, v němž rovina ν protíná plochu, v bodě B styk alespoň třetího řádu. Nechť φ je úhel, který s $N^\varkappa$ svírá přímka p a ψ úhel, který s $N^\varkappa$ svírá průměr kuželosečky k sdružený k tečně t. Jest

$$\cotg\varphi = -3\,\tg\psi \quad (0 < \varphi < \pi,\ -\tfrac{1}{2}\pi < \psi < \tfrac{1}{2}\pi). \tag{4.2}$$

Důkaz. Zvolme libovolný nikoliv rovinový bod B plochy a v něm libovolnou nikoliv asymptotickou tečnu t jejím jednotkovým vektorem i^a. Sestrojme normální řez plochy normální rovinou ν proloženou tečnou t. Normální křivost v bodě B ve směru i^a je $\frac{1}{R} = i^a i^b b_{ab}$. Z (3.3) plyne — vzhledem k tomu, že pro normální řez je $k = 0$ — pro hodnotu Codazziho skaláru ve směru i^a v bodě B

$$b_{abc} i^a i^b i^c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R}, \tag{4.3}$$

kde s je oblouk normálního řezu. Je tedy v uvažovaném bodě

$$'v^\varkappa_2 = -\frac{1}{R^2} i^\varkappa + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R} N^\varkappa. \tag{4.4}$$

Zvolme nyní pravoúhlý souřadnicový systém s počátkem v bodě B tak, aby osa x byla normálou $n^\varkappa$ normálního řezu a měla touž orientaci jako tato normála; orientaci osy y volme touž jakou má tečna.

Jednoduchá kuželosečka k ležící v rovině ν normálního řezu, jež má v bodě B s normálním řezem styk alespoň třetího řádu, leží (omezíme-li se v případě hyperboly jen na větev, na které leží bod B) v uzavřené kladné polorovině určené osou y; její rovnice je

$$a_{11}x^2 + \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}\frac{1}{k_1^2} xy - y^2 + 2\frac{1}{k_1} x = 0, \tag{4.5}$$

kde k_1 resp. s je 1. křivost normálního řezu resp. jeho oblouk. Průměr kuželosečky (4.5) sdružený k tečně t v bodě B je

$$\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} x - 3k_1^2 y = 0. \tag{4.6}$$

Jestliže pro normálu $N^\varkappa$ platí [21])

$$N^\varkappa = \bar{\varepsilon} n^\varkappa,\ \bar{\varepsilon} = \pm 1, \tag{4.7}$$

[20]) B tedy není rovinový bod plochy.

[21]) Obvykle se totiž normála $N^\varkappa$ orientuje tak, aby $[N^\varkappa, B^\varkappa_I, B^\varkappa_{II}] > 0$ (viz např. *Hlavatý*, [1], str. 247) a tedy nemusí být shodně orientována s normálou normálního řezu.

pak prvá křivost k_1 (která je vždy nezáporná) normálního řezu v bodě B je

$$k_1 = \bar{\varepsilon}\frac{1}{R} \tag{4.8}$$

a tedy pro úhly φ a ψ[22]) přímek (4.4) a (4.6) s kladně orientovanou normálou $N^\varkappa$ najdeme

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \operatorname{cotg}\varphi = -R^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R}, \quad (0 < \varphi < \pi), \\ &\text{b)} \quad \operatorname{tg}\psi = \tfrac{1}{3}R^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R}, \quad (-\tfrac{1}{2}\pi < \psi < \tfrac{1}{2}\pi), \end{aligned} \tag{4.9}$$

odkud již okamžitě plyne (4.2).[23])

Poznámka 1. Lze udat obecnější geometrickou interpretaci průmětu $'v^\varkappa_2$ druhého vektoru křivosti $\overset{,}{\underset{2}{v^\varkappa}}$, jejímž zvláštním případem je právě dokázaná věta.

Nechť k je jednoduchá algebraická křivka stupně $n \geqq 2$ v normální rovině ν proložené nikoliv asymptotickou tečnou t plochy v jejím bodě B, jež má s normálním řezem rovinou ν v bodě B styk alespoň třetího řádu a jež má nevlastní bod tečny t za bod právě $(n - 2)$-násobný[24]).

Tečna t' prvé poláry křivky k sdružené k tečně t[25]) *jest* (4.6); *platí* (4.2), *kde ψ je úhel t' s $N^\varkappa$.*

Důkaz. Použijeme-li téhož systému souřadnicového jako v předchozím případě, najdeme pro křivku (při $n \geqq 3$) rovnici

$$a_1x + a_{20}x^2 + \frac{1}{3}a_1\frac{1}{k_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dot{k}_1xy - \frac{1}{2}a_1k_1y^2 + \sum_{s=3}^{n}\sum_{i=0}^{2}a_{si}x^sy^i = 0, \tag{4.10}$$

kde $a_1 \neq 0$, a_{n0}, a_{n1}, a_{n2} nejsou současně rovny nule a k_1, s mají týž význam jako v předchozím případě. Pro $n = 2$ platí (4.5). Další již je evidentní.

Poznámka 2. Dosud jsme předpokládali, že t není asymptotickou tečnou, t. j. že daný bod B plochy není pro normální řez plochy rovinou ν inflexním bodem.

Snadno se uváží, že v tomto vylučovaném případě platí:

Jestliže je B pro normální řez ve směru i^a inflexním bodem, ale i^a není Darbouxův směr, pak existuje jediná kubická parabola (s bodem vratu v nevlastním bodě normály plochy v bodě B), která s normálním řezem má v daném bodě styk řádu alespoň 3.

---

[22]) V orientované rovině normálního řezu; orientace je dána předpisem, že $+x$ svírá s $+y$ úhel $+\frac{1}{2}\pi$.

[23]) *Vyčichlo*, [5], str. 4—5 (pro parabolu); *Hlavatý*, [1], str. 322, věta 6.1 (případ $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = 0$, z kuželoseček (4.5) je uvažována jen kružnice).

[24]) Bod je pro křivku právě 0-násobný, když křivka jím neprochází.

[25]) T. j. prvé poláry křivky k nevlastního bodu tečny t.

Je-li

$$y^3 = ax \quad (a \neq 0) \tag{4.11}$$

její rovnice (v dříve uvedeném systému souřadnicovém), pak

$$b_{abc} i^a i^b i^c = -6a^{-1}. \tag{4.12}$$

5. Všimneme si ještě geometrického místa g koncových bodů druhých vektorů křivosti $\underset{2}{v}^{\varkappa}$, jejichž počáteční bod je umístěn v uvažovaném bodě plochy; této otázky týkají se již věty c), e) odst. 3. a poznámka[15]) na str. 77.

Především platí

a) *Geometrické místo g je středově symetrické podle středu B.*

Důkaz. Nechť $\underset{2}{v}^{\varkappa}$ resp. $'\underset{2}{v}^{\varkappa}$ přísluší směru $i^{\varkappa}$ resp. $'i^{\varkappa}$. Je-li $'i^{\varkappa} = -i^{\varkappa}$, pak z relace $['i^{\varkappa}, 'j^{\varkappa}, N^{\varkappa}] = \varepsilon$ a z (3.1) plyne $'j^{\varkappa} = -j^{\varkappa}$; snadno pak najdeme $'\underset{2}{v}^{\varkappa} = -\underset{2}{v}^{\varkappa}$.

Dále dokážeme:

b) *V bodě B plochy, který není parabolický ani kruhový, je g křivkou 6. stupně; je-li prostorovou křivkou, promítá se z B jednoduchou kuželovou plochou 3. stupně.*

c) *V kruhovém bodě B plochy je g buď křivkou 6. stupně ležící na rotační válcové ploše o ose v normále plochy, jež se promítá z B jednoduchou kuželovou plochou 3. stupně, nebo elipsou neb kružnicí.*

d) *V obyčejném parabolickém bodě plochy je g buď rovinnou křivkou 6. stupně nebo nenulovou úsečkou.*

e) *V rovinovém bodě plochy je g úsečkou.*

Důkaz stačí provést jen pro body, jež nejsou rovinové, neboť e) plyne okamžitě z věty c) odst. 3. Předpokládejme tedy, že uvažovaný bod B není rovinový; zvolme pravoúhlý systém souřadnicový o osách x, y v k sobě kolmých hlavních směrech plochy v bodě B a osu z v normále plochy. Nechť $\underset{1}{i}^{\varkappa}$ resp. $\underset{2}{i}^{\varkappa}$ je jednotkový vektor ve směru osy x resp. y. Orientaci souřadnicového trojhranu volme tak, aby kladný smysl osy x resp. y resp. z byl dán kladným smyslem vektoru $\underset{1}{i}^{\varkappa}$ resp. $\underset{2}{i}^{\varkappa}$ resp. $N^{\varkappa}$ a aby

$$[\underset{1}{i}^{\varkappa}, \underset{2}{i}^{\varkappa}, N^{\varkappa}] = \varepsilon_0, \tag{5.1}$$

kde $\varepsilon_0 = \pm 1$.

Označíme-li ω úhel[26]) vektorů $i^\varkappa$ a $\underset{1}{i^\varkappa}$, pak můžeme psát

$$\text{a)}\quad i^\varkappa = \underset{1}{i^\varkappa}\cos\omega + \underset{2}{i^\varkappa}\sin\omega,\quad \text{b)}\quad \varepsilon\varepsilon_0 j^\varkappa = -\underset{1}{i^\varkappa}\sin\omega + \underset{2}{i^\varkappa}\cos\omega, \tag{5.2}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ je dáno relací (3.1) a kde

$$0 \leqq \omega < 2\pi. \tag{5.3}$$

Umístíme-li vektor $\underset{2}{v^\varkappa}$ jeho počátečním bodem do bodu B, pak pro souřadnice x, y, z jeho koncového bodu snadno najdeme

$$x = \overset{(1)}{v}\cos\omega - \varepsilon\varepsilon_0\overset{(2)}{v}\sin\omega,\quad y = \overset{(1)}{v}\sin\omega + \varepsilon\varepsilon_0\overset{(2)}{v}\cos\omega,\quad z = \overset{(3)}{v}, \tag{5.4}$$

kde $\overset{(i)}{v}$ $(i = 1, 2, 3)$ jsou dány vztahy (3.5), kam je ovšem ještě třeba dosadit z (5.2). Je-li $\dfrac{1}{R_m} = \underset{m}{i^a}\underset{m}{i^b}b_{ab}$ normální křivost ve směru $\underset{m}{i^a}$ $(m = 1, 2)$, pak pro geometrické místo g dostaneme

$$x = -\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_1}\cos^2\omega + \frac{1}{R_2}\sin^2\omega\right)\cos\omega,\quad y = -\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1}\cos^2\omega + \frac{1}{R_2}\sin^2\omega\right)\sin\omega,$$

$$z = b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{1}{i^b}\underset{1}{i^c}\cos^3\omega + 3b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{1}{i^b}\underset{2}{i^c}\cos^2\omega\sin\omega + \tag{5.5}$$

$$+ 3b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{2}{i^b}\underset{2}{i^c}\cos\omega\sin^2\omega + b_{abc}\underset{2}{i^a}\underset{2}{i^b}\underset{2}{i^c}\sin^3\omega,$$

což můžeme, jestliže místo parametru ω zavedeme homogenní parametry t_1, t_2 transformací

$$\sin\omega = \frac{2t_1t_2}{t_1^2 + t_2^2},\quad \cos\omega = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_1^2 + t_2^2} \tag{5.6}$$

$$(-\infty < t_1 < \infty,\quad -\infty < t_2 < \infty)$$

přepsat na

$$x = (t_1^2 + t_2^2)^{-3}(t_1^2 - t_2^2)\left(\frac{(t_2^2 - t_1^2)^2}{R_1} + \frac{4t_1^2t_2^2}{R_2}\right)\frac{1}{R_1},$$

$$y = -2(t_1^2 + t_2^2)^{-3}\, t_1t_2\left(\frac{(t_2^2 - t_1^2)^2}{R_1} + \frac{4t_1^2t_2^2}{R_2}\right)\frac{1}{R_2}, \tag{5.7}$$

$$z = (t_1^2 + t_2^2)^{-3}[b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{1}{i^b}\underset{1}{i^c}(t_2^2 - t_1^2)^3 + 6b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{1}{i^b}\underset{2}{i^c}(t_2^2 - t_1^2)^2t_1t_2 +$$

$$+ 12b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{2}{i^b}\underset{2}{i^c}(t_2^2 - t_1^2)t_1^2t_2^2 + 8b_{abc}\underset{2}{i^a}\underset{2}{i^b}\underset{2}{i^c}\, t_1^3t_2^3].$$

---

[26]) V orientované rovině, kde orientace je dána tím, že úhel $\underset{1}{i^\varkappa}$ a $\underset{2}{i^\varkappa}$ je $+\frac{1}{2}\pi$.

I. Uvažujme nejprve neparabolické body B, t. j. body, v nichž $\frac{1}{R_1R_2} \neq 0$. Snadno se najde, že nutná a dostačující podmínka pro to, aby geometrické místo g leželo v rovině, je splnění vztahů

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} b_{abc} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b \underset{1}{i}^c &= 3 \frac{1}{R_1} b_{abc} \underset{1}{i}^a \underset{2}{i}^b \underset{2}{i}^c, \\ \frac{1}{R_1} b_{abc} \underset{2}{i}^a \underset{2}{i}^b \underset{2}{i}^c &= 3 \frac{1}{R_2} b_{abc} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b \underset{2}{i}^c; \end{aligned} \tag{5.8}$$

jsou-li tyto podmínky splněny, existuje jediná rovina, v níž g leží, a to

$$\frac{1}{R_2^2} b_{abc} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b \underset{1}{i}^c x + \frac{1}{R_1^2} b_{abc} \underset{2}{i}^a \underset{2}{i}^b \underset{2}{i}^c y + \frac{1}{R_1^2 R_2^2} z = 0. \tag{5.9}$$

Nechť g je prostorová křivka, t. j. nechť neplatí (5.8). Jsou-li X, Y, Z souřadnice bodu spojnice (x, y, z) s bodem B, jest

$$X = kx,\ Y = ky,\ Z = kz; \tag{5.10}$$

vyloučením k a ω z (5.5) a (5.10) najdeme

$$\begin{aligned} Z(R_1X^2 + R_2Y^2) + R_1^3 b_{abc} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b \underset{1}{i}^c X^3 + 3R_1^2R_2 b_{abc} \underset{1}{i}^a \underset{1}{i}^b \underset{2}{i}^c X^2Y + \\ + 3R_1R_2^2 b_{abc} \underset{1}{i}^a \underset{2}{i}^b \underset{2}{i}^c XY^2 + R_2^3 b_{abc} \underset{2}{i}^a \underset{2}{i}^b \underset{2}{i}^c Y^3 = 0, \end{aligned} \tag{5.11}$$

což je rovnice kuželové plochy 3. stupně, jež je jednoduchá, neboť nutná a dostačující podmínka pro to, aby byla složená, je — jak se lehko přesvědčíme — splnění (5.8).

Hledejme nyní stupeň geometrického místa g; je třeba rozeznávat mezi kruhovými a nekruhovými body:

a) v nekruhovém bodě je $0 \neq \frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2} \neq 0$ a tedy g je křivkou 6. stupně, jak je okamžitě patrno z (5.7), jejíž pravoúhlý průmět g' do tečné roviny je

$$(x^2R_1^2 + y^2R_2^2)^3 = (x^2R_1 + y^2R_2)^2. \tag{5.12}$$

b) v kruhovém bodě je $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} \neq 0$ a tedy

$$x = -\frac{1}{R_1^2} \cos\omega,\quad y = -\frac{1}{R_1^2} \sin\omega, \tag{5.13}$$

t. j. pravoúhlý průmět g' křivky g do tečné roviny je kružnice o středu v B a poloměru $\frac{1}{R_1^2}$. Není-li g rovinná křivka a tedy neplatí-li (5.8), t. j. není-li

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv b_{abc}\underset{1}{i}^a\underset{1}{i}^b\underset{1}{i}^c - 3b_{abc}\underset{1}{i}^a\underset{2}{i}^b\underset{2}{i}^c = 0, \\ H_2 &\equiv b_{abc}\underset{2}{i}^a\underset{2}{i}^b\underset{2}{i}^c - 3b_{abc}\underset{1}{i}^a\underset{1}{i}^b\underset{2}{i}^c = 0, \end{aligned} \qquad (5.14)$$ [27]

pak z (5.7) plyne, že je 6. stupně. Jestliže platí (5.14), jest

$$z = \underset{1}{b}\cos\omega + \underset{2}{b}\sin\omega, \qquad (5.15)$$

kde $\underset{m}{b} = b_{abc}\underset{m}{i}^a\underset{m}{i}^b\underset{m}{i}^c$ $(m = 1, 2)$ a tedy g je řez roviny $z = -R_1^2(\underset{1}{b}x + \underset{2}{b}y)$ s rotační válcovou plochou o řídící kružnici g', t. j. je to buď kružnice (a to právě g') nebo elipsa[28]).

II. V obyčejném parabolickém bodě je právě jedna hlavní křivost nulová,

---

[27]) Snadno se zjistí, že tyto podmínky jsou nezávislé na volbě dvojice k sobě kolmých hlavních směrů. Zvolíme-li

$$\begin{aligned} '\underset{1}{i}^\varkappa &= \underset{1}{i}^\varkappa\cos\alpha + \underset{2}{i}^\varkappa\sin\alpha, \\ '\underset{2}{i}^\varkappa &= -\,'\varepsilon_0\varepsilon_0\underset{1}{i}^\varkappa\sin\alpha + '\varepsilon_0\varepsilon_0\underset{2}{i}^\varkappa\cos\alpha, \end{aligned} \qquad 0 \leqq \alpha < 2\pi \qquad (*)$$

pak najdeme totiž

$$\begin{aligned} 'H_1 &= H_1\cos^3\alpha - 3H_2\cos^2\alpha\sin\alpha - 3H_1\cos\alpha\sin^2\alpha + H_2\sin^3\alpha, \\ '\varepsilon_0\varepsilon_0 H_2 &= H_2\cos^3\alpha + 3H_1\cos^2\alpha\sin\alpha - 3H_2\cos\alpha\sin^2\alpha - H_1\sin^3\alpha, \end{aligned}$$

odkud již plyne invariantnost podmínek (5.14).

[28]) Druhý vektor křivosti

$$\underset{2}{v}^\varkappa = -\frac{1}{R_1^2}(\underset{1}{i}^\varkappa\cos\omega + \underset{2}{i}^\varkappa\sin\omega) + (\underset{1}{b}\cos\omega + \underset{2}{b}\sin\omega)N^\varkappa$$

můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\underset{2}{v}^\varkappa = \underset{1}{u}^\varkappa\cos\lambda + \underset{2}{u}^\varkappa\sin\lambda, \quad 0 \leqq \lambda < 2\pi, \qquad (*)$$

odkud je okamžitě patrno, že koncový bod opisuje elipsu o poloosách $\underset{1}{u} = |\underset{1}{u}^\varkappa|$, $\underset{2}{u} = |\underset{2}{u}^\varkappa|$. Snadno totiž najdeme

$$\begin{aligned} \underset{1}{u}^\varkappa &= -\frac{1}{R_1^2}\frac{1}{\sqrt{\underset{1}{b}^2 + \underset{2}{b}^2}}(\underset{2}{b}\underset{1}{i}^\varkappa - \underset{1}{b}\underset{2}{i}^\varkappa), \\ \underset{2}{u}^\varkappa &= -\frac{1}{R_1^2}\frac{1}{\sqrt{\underset{1}{b}^2 + \underset{2}{b}^2}}(\underset{1}{b}\underset{1}{i}^\varkappa + \underset{2}{b}\underset{2}{i}^\varkappa) + \sqrt{\underset{1}{b}^2 + \underset{2}{b}^2}\,N^\alpha, \end{aligned}$$

při čemž

$$\cos\lambda = (\underset{1}{b}^2 + \underset{2}{b}^2)^{-\frac{1}{2}}(-\underset{1}{b}\sin\omega + \underset{2}{b}\cos\omega), \quad \sin\lambda = (\underset{1}{b}^2 + \underset{2}{b}^2)^{-\frac{1}{2}}(\underset{1}{b}\cos\omega + \underset{2}{b}\sin\omega),$$

a tedy

$$\underset{1}{u} = \frac{1}{R_1^2}, \quad \underset{2}{u} = \left(\frac{1}{R_1^4} + \underset{1}{b}^2 + \underset{2}{b}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (**)$$

Elipsa (*), jak je geometricky patrno, nezávisí na volbě dvojice hlavních směrů a tedy výrazy (**) jsou vůči transformaci (*) z poznámky [27]) invariantní, jak je možno se lehce přesvědčit přímým výpočtem.

druhá nenulová. Volme označení tak, aby $\frac{1}{R_1} = 0$, $\frac{1}{R_2} \neq 0$. Prvé dvě rovnice (5.5) se redukují na

$$x = 0,\; y = -\frac{\sin^3\omega}{R_2^2}\,, \tag{5.16}$$

odkud je patrno, že g leží v rovině $x = 0$. Nutná a dostačující podmínka pro to, aby g ležela v další rovině (různé od $x = 0$), jest aby

$$b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{1}{i^b}\underset{1}{i^c} = b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{1}{i^b}\underset{2}{i^c} = b_{abc}\underset{1}{i^a}\underset{2}{i^b}\underset{2}{i^c} = 0. \tag{5.17}$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, leží g také v rovině

$$\underset{2}{b}y + \frac{1}{R_2^2}z = 0 \tag{5.18}$$

a tedy — vzhledem k tomu, že $z = \underset{2}{b}\sin^3\omega$ — g je nenulovou úsečkou na průsečnici roviny (5.18) a $x = 0$. Nejsou-li splněny rovnice (5.17), pak z (5.7) je okamžitě patrno, že g je křivkou 6. stupně.

Tím jsou všechna tvrzení vět b), c), d), e) dokázána.

Poznámka. Není-li uvažovaný bod kruhový ani rovinový, můžeme výrazy $b_{abc}\underset{m}{i^a}\underset{m}{i^b}\underset{n}{i^c}$ $(m, n = 1, 2)$ vhodně vyjádřit. Nechť $\underset{m}{j^\varkappa}$ je normála m-té hlavní křivky o jednotkovém tečném vektoru $\underset{m}{i^\varkappa}$; $\underset{m}{s}$ její oblouk a $\underset{m}{k}$ její geodetická křivost; derivací

$$\text{a) } \underset{m}{i^a}\underset{m}{i^b}b_{ab} = \frac{1}{R_m} \text{ resp. b) } \underset{m}{i^a}\underset{m}{j^b}b_{ab} = 0, \tag{5.19}$$

jež platí pro hlavní křivky, podle oblouku $\underset{m}{s}$ dostaneme

$$\text{a) } b_{abc}\underset{m}{i^a}\underset{m}{i^b}\underset{m}{i^c} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\underset{m}{s}}\frac{1}{R_m} \text{ resp. b) } b_{abc}\underset{m}{i^a}\underset{m}{i^b}\underset{m}{j^c} = \underset{m}{k}\left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_n}\right); \tag{5.20}$$

$$(m, n = 1, 2;\; m \neq n)$$

užitím (3.1) a (5.1) najdeme z (5.7b)

$$b_{abc}\underset{m}{i^a}\underset{m}{i^b}\underset{n}{i^c} = (-1)^n\,\varepsilon\varepsilon_0\,\underset{m}{k}\left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_n}\right); \tag{5.21}$$

$$(m, n = 1, 2;\; m \neq n)$$

nalezené vzorce můžeme užít k úpravě některých dřívějších výsledků; zvláště uveďme:

Nutná a dostačující podmínka pro to, aby v bodě B plochy, který není parabolický ani kruhový, g byla rovinná, je

$$\frac{3\varepsilon\varepsilon_0 k_1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\underset{2}{s}}\frac{1}{R_2}\,,\quad \frac{3\varepsilon\varepsilon_0 k_2}{R_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\underset{1}{s}}\frac{1}{R_1}\,; \tag{5.22}$$

rovina křivky g je pak

$$\frac{1}{R_2^2}\underset{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}}\frac{1}{R_1}x+\frac{1}{R_1^2}\underset{2}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}}\frac{1}{R_2}y+\frac{1}{R_1^2R_2^2}z=0. \tag{5.23}$$

Není-li g rovinná, promítá se z B kubickou kuželovou plochou

$$(R_1X^2+R_2Y^2)\,Z+\left(\underset{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}}\frac{1}{R_1}\right)R_1^3X^3+3\varepsilon\varepsilon_0k_1\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)R_1^2R_2X^2Y+$$

$$+\,3\varepsilon\varepsilon_0\underset{2}{k}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)R_1R_2^2XY^2+\left(\underset{2}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}}\frac{1}{R_2}\right)R_2^3Y^3=0. \tag{5.24}$$

Uvážíme-li, že pro normální řez ve směru $\underset{1}{i}^{\varkappa}$ je $b_{abc}\underset{1}{i}^a\underset{1}{i}^b\underset{1}{i}^c=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R_1}$, kde s je oblouk normálního řezu, pak lze pro obyčejný parabolický bod vyslovit tvrzení:

Nutná a dostačující podmínka pro to, aby v obyčejném parabolickém bodě $\left(\frac{1}{R_1}=0,\ \frac{1}{R_2}\neq 0\right)$ g byla úsečkou, je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R_1}=k_1=k_2=0, \tag{5.25}$$

t. j. aby normální řez plochy v asymptotickém směru měl v uvažovaném bodě inflexi alespoň 2. řádu a obě hlavní křivky stacionární bod.

6. Z (2.6) je zřejmé, že asymptotické směry v bodě plochy lze definovat jako směry, jejichž prvý vektor křivosti leží v tečné rovině plochy. Obdobně užitím n-tého vektoru křivosti můžeme definovat směry, jež jsou zobecněním asymptotických směrů.

Definice 6.1. Směry, jejichž n-tý vektor křivosti leží v tečné rovině nesingulárního bodu plochy, nazývají se pseudoasymptotické směry n-tého řádu.

Z dosavadních úvah plyne, že pseudoasymptotické směry řádu 0 jsou směry tečen (a obráceně), pseudoasymptotické směry řádu 1 jsou asymptotické směry (a obráceně), pseudoasymptotické směry řádu 2 jsou Codazziho směry (a obráceně).

Tím dostáváme v rovinových bodech plochy (v nichž každý směr je asymptotický) — za předpokladu, že Codazziho tensor je nenulový — tři (v algebraickém smyslu) význačné směry.

Ukážeme, že k těmže směrům v těchto bodech lze dojít ještě jiným zobecněním pojmu asymptotických směrů.

Předpokládejme pro jednoduchost, že uvažovaný bod B plochy má parametry $\eta^a=0$. Na ploše zvolme křivku $\eta^a=\eta^a(t)$, která tímto bodem prochází a nemá v něm singulární bod; parametr t volme tak, aby bod $t=0$ byl bodem B.

Dále zaveďme označení

$$\text{a)}\quad B^{(s)}_{ab} = b_{ab}(0) \quad \text{pro} \quad s = 0,$$
$$\text{b)}\quad B^{(s)}_{abc_1\ldots c_s} = \left(\frac{\partial^s b_{ab}(\eta^c)}{\partial\eta^{c_1}\ldots\partial\eta^{c_s}}\right)_{\eta^c=0} \quad \text{pro } s \geqq 1. \tag{6.1}$$

Definujme nyní:

Definice 6.2. Nechť n je nejmenší s, pro něž nejsou v bodě B všechna $B^{(s)}_{abc_1\ldots c_s}$ (při pevném $s \geqq 0$) rovna nule; bod B nazývá se bod třídy n.

Definice 6.3. Nechť B je třídy n; směr vektoru u^a, pro který

$$u^a u^b B^{(n)}_{ab} = 0, \tag{6.2}$$

kde

$$B^{(n)}_{ab} = \left(\frac{\mathrm{d}^n b_{ab}(\eta^c(t))}{\mathrm{d}t^n}\right)_{t=0}, \tag{6.3}$$

nazývá se asymptotický směr řádu n přiřazený křivce $\eta^a = \eta^a(t)$ v bodě B.

Nejprve je okamžitě zřejmé, že platí:

Všem křivkám plochy procházejícím bodem třídy 0 jsou v tomto bodě přiřazeny tytéž asymptotické směry řádu 0, jež jsou totožny s asymptotickými směry plochy v uvažovaném bodě.

Lehko dokážeme, že dále platí:

V bodě třídy 1 jsou všem křivkám, jež mají v tomto bodě společný jednotkový tečný vektor i^a, přiřazeny tytéž asymptotické směry řádu 1; vyhovují rovnici

$$u^a u^b i^c (b_{abc})_0 = 0. \tag{6.4}$$

Důkaz. Pro $s = 1$ je podle (6.3)

$$B^{(1)}_{ab} = \left(\frac{\mathrm{d}b_{ab}(\eta^c(t))}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = t^c(\partial_c b_{ab})_0,$$

kde

$$t^c = \left(\frac{\mathrm{d}\eta^c(t)}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

je tečný vektor křivky v bodě B. Dále je

$$b_{abc} = \mathrm{D}_c b_{ab} = \partial_c b_{ab} - \begin{Bmatrix} d \\ ca \end{Bmatrix} b_{db} - \begin{Bmatrix} d \\ cb \end{Bmatrix} b_{ad}$$

a tedy — vzhledem k tomu, že uvažovaný bod je třídy 1 —

$$(\partial_c b_{ab})_0 = (b_{abc})_0;$$

odtud a z definice 6.2 asymptotických směrů řádu n plyne již (6.4); zbývající tvrzení jsou evidentní.

V bodě třídy 1 jsou pseudoasymptotické směry řádu 2 současně asymptotickými směry řádu 1, jež jsou přiřazeny samy sobě.

Důkaz. Rovnici

$$i^a i^b i^c (b_{abc})_0 = 0$$

pro pseudoasymptotické směry řádu 2 lze interpretovat jako rovnici (6.4), v níž $u^a = i^a$.

LITERATURA

[1] *Hlavatý, V.*: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha (1937).

[2] *Kagan, V. F.*: Osnovy teorii poverchnostej v tenzornom izloženii, Moskva-Leningrad, I. (1947), II. (1948).

[3] *Schouten, J. A.* und *Struik, D. J.*: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Groningen, I. (1935), II. (1938).

[4] *Struik, D. J.*: Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung, Berlin (1922).

[5] *Vyčichlo, Fr.*: Příspěvek k zobecněné větě Beltramiho. Rozpravy Akademie, tř. II, roč. L, č. 2 (1940).