Miroslav Novotný

O representaci částečně uspořádaných množin posloupnostmi nul a jedniček

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 1, 61--64

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117065`

O REPRESENTACI ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN POSLOUPNOSTMI NUL A JEDNIČEK

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno.

(Došlo 14. ledna 1952.) DT: 519.513

Autor dokazuje tuto větu: Každá částečně uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\nu$ je isomorfní s jistým systémem transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných takto: $x_0x_1 \dots x_\lambda \dots (\lambda < \omega_\nu) \leq y_0y_1 \dots y_\lambda \dots (\lambda < \omega_\nu)$, když a jen když $x_\lambda \leq y_\lambda$ pro každé $\lambda < \omega_\nu$. Při vhodné definici husté podmnožiny v částečně uspořádané množině označuje minimum mohutností hustých podmnožin v částečně uspořádané množině jako její separabilitu uspořádání. Platí pak věta: Každá částečně uspořádaná množina o separabilitě uspořádání $\aleph_\nu$ je isomorfní s jistým systémem transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných podle uvedeného pravidla.

W. Sierpiński dokázal[1]) tuto větu: *Buď ν libovolné dané ordinální číslo. Každá uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\nu$ je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných lexikograficky.* Platí dokonce toto tvrzení[2]): *Buď ν libovolné dané ordinální číslo. Každá uspořádaná množina o separabilitě uspořádání*[3]) *$\aleph_\nu$ je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných lexikograficky.* Účelem této práce jest důkaz analogických tvrzení pro množiny částečně uspořádané.

Buď ν libovolné dané ordinální číslo a buď $\mathfrak{S}$ libovolný systém transfinitních posloupností typu ω_ν utvořených z nul a z jedniček. Definujme relaci uspořádání v množině $\mathfrak{S}$ takto: Pro dvě posloupnosti z množiny $\mathfrak{S}$ položme $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots (\lambda < \omega_\nu) \leq y_0y_1 \dots y_\lambda \dots (\lambda < \omega_\nu)$, jestliže $x_\lambda \leq y_\lambda$ pro všechna $\lambda < \omega_\nu$ (pravidlo a)[4]). Snadno se vidí, že vzhledem k relaci $\leq$ je systém $\mathfrak{S}$ částečně uspořádán.

[1]) *W. Sierpiński*: Sur une propriété des ensembles ordonnés. Fund. Math. 36 (1949), str. 56.

[2]) *M. Novotný*: Sur la représentation des ensembles ordonnés. Fund. Math. 39 (1952).

[3]) Říkáme, že uspořádaná množina P má separabilitu uspořádání $\aleph_\nu$, jestliže minimální mohutnost podmnožiny husté v P je $\aleph_\nu$.

[4]) Sr. definici uspořádání v kardinální mocnině; *G. Birkhoff*: Lattice theory, 1948, str. 8.

Lemma 1. *Buď ν libovolné dané ordinální číslo, $\mathfrak{S}$ libovolný systém transfinitních posloupností typu ω_ν utvořených z nul a z jedniček, $\leq$ relace uspořádání podle pravidla* a, $\preceq$ *relace uspořádání lexikografického v množině $\mathfrak{S}$. Nechť systém $\mathfrak{S}$ jest vzhledem k relaci $\leq$ úplně uspořádán. Pak pro $x, y \in \mathfrak{S}$ platí $x \leq y$, když a jen když platí $x \preceq y$.*

Důkaz je snadný.

Věta 1. *Buď ν libovolné dané ordinální číslo. Každá částečně uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\nu$ je isomorfní*[5]) *s jistým systémem transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných podle pravidla* a.

Důkaz: Buď P částečně uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\nu$; pak tato množina jest isomorfní s jistým systémem $\Phi(P)$ podmnožin v P uspořádaných vzhledem k inklusi tak, že infima přecházejí v průniky.[6]) Buď $u_0, u_1, \ldots u_\lambda, \ldots$ $(\lambda < \omega_\nu)$ transfinitní posloupnost typu ω_ν utvořená ze všech prvků množiny P. Ke každé množině $M \in \Phi(P)$ přiřaďme transfinitní posloupnost nul a jedniček $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu)$ typu ω_ν definovanou takto: $x_\lambda = 1$, jestliže $u_\lambda \in M$, $x_\lambda = 0$, jestliže $u_\lambda \in P - M$. Dvěma různým množinám $M, M' \in \Phi(P)$ odpovídají dvě různé posloupnosti $x = x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu)$, $x' = x'_0 x'_1 \ldots x'_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu)$. Existuje totiž prvek $u_\delta \in P$ tak, že jest jen v jedné z množin M, M'. Pak jest zřejmě $x_\delta \neq x'_\delta$.

Buď nyní P^* systém všech posloupností $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu)$ přiřazených k prvkům množiny P uspořádaných podle pravidla a. Tvrdím, že množiny P^* a $\Phi(P)$ jsou isomorfní. Buď $M, M' \in \Phi(P)$, $M \subset M'$; $x = x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu)$, $x' = x'_0 x'_1 \ldots x'_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu)$ nechť značí odpovídající posloupnosti ze systému P^*. Pak $u_\mu \in M \Rightarrow u_\mu \in M'$, takže $x_\mu = 1 \Rightarrow x'_\mu = 1$ a tedy $x_\lambda \leq x'_\lambda$ pro všechna $\lambda < \omega_\nu$. Proto jest $x \leq x'$. — Je-li $x \leq x'$, pak $x_\lambda \leq x'_\lambda$ pro každé $\lambda < \omega_\nu$ a tedy $x_\mu = 1 \Rightarrow x'_\mu = 1$, t. j. $u_\mu \in M \Rightarrow u_\mu \in M'$ a tedy $M \subset M'$.

Důsledek. Buď ν libovolné dané ordinální číslo. Každá uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\nu$ je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných lexikograficky.[1])

Důkaz plyne snadno z věty 1 a z lemmatu 1.

Buď P částečně uspořádaná množina.

Řekněme, že prvek $x \in P$ je maximální, když pro žádné $t \in P$ neplatí $t > x$.

Podobně řekněme, že prvek $x \in P$ je minimální, když pro žádné $t \in P$ neplatí $t < x$.

Dále řekneme, že prvek $x \in P$ má vlastnost α, když není maximální ani minimální a když k němu existuje prvek $y \in P$ tak, že 1. y non $\leq x$, 2. pro všechna $t \in P$, pro něž jest $t > x$, platí $t > y$.

Podobně řekneme, že prvek $x \in P$ má vlastnost β, když není maximální ani

---

[5]) Definici čtenář najde v knize *G. Birkhoff*: Lattice theory, 1948, str. 3.

[6]) *G. Birkhoff*, l. c. str. 58.

minimální a když k němu existuje prvek $y \in P$ tak, že 1. y non $\geq x$, 2. pro všechna $t \in P$, pro něž jest $t < x$, platí $t < y$.

Množina $H \subset P$ se nazývá hustá v P[7]), jestliže

1. obsahuje všechny prvky maximální a minimální a všechny prvky s vlastností α nebo β,

2. ke každé dvojici prvků $a, b \in P, a < b$, existují prvky $a', b' \in H$ tak, že $a \leq a' < b' \leq b$.

Lemma 2. *Buď H hustá v množině P; buď dále $x, y \in P$; nechť x není maximální ani minimální. Je-li $y \leq z$ pro každé $z \in H$, pro něž $z \geq x$, pak $y \leq x$.*

Důkaz: Nechť tvrzení lemmatu není správné. Pak y non$\leq x$ a $y \leq z$ pro každé $z \in H$, pro něž jest $z \geq x$. Buď $t \in P$, $t > x$. Podle definice husté podmnožiny existuje $z \in H$ tak, že $t > z \geq x$. Pro toto z jest podle předpokladu $z \geq y$, takže $t > y$. Tedy pro každé $t \in P$, $t > x$ máme $t > y$, takže x má vlastnost α. Odtud jest $x \in H$, takže v předpokladech lemmatu je možno položiti x za z a tedy podle předpokladů lemmatu jest $y \leq x$. To je spor, neboť jsme předpokládali y non$\leq x$.

Analogickým způsobem se dokáže

Lemma 3. *Buď H hustá v množině P; buď dále $x, y \in P$; nechť x není maximální ani minimální. Je-li $y \geq z$ pro každé $z \in H$, pro něž $z \leq x$, pak $y \geq x$.*

Minimální mohutnost podmnožiny $H \subset P$ husté v P označme jako separabilitu uspořádání množiny P.

Věta 2. *Buď ν libovolné dané ordinální číslo. Každá částečně uspořádaná množina o separabilitě uspořádání $\aleph_\nu$ je isomorfní s jistou množinou transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných podle pravidla* **a**.

Důkaz: V P existuje hustá podmnožina H o mohutnosti $\aleph_\nu$, jež je podle věty 1. isomorfní s jistou množinou H^* posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných podle pravidla a. Je-li $P - H$ prázdná, je věta dokázána.

Buď tedy $P - H \neq 0$, $x \in P - H$. Pak podle definice husté podmnožiny není x maximálním prvkem a tedy existuje aspoň jeden prvek $t \in P$ takový, že $t > x$. Podle druhé části téže definice pak existuje aspoň jeden prvek $z \in H$ takový, že $t \geq z > x$. Buď Z systém všech prvků $z \in H$, $z > x$. Označme $z^* = z_0 z_1 \dots z_\lambda \dots$ $(\lambda < \omega_\nu)$ prvek v množině H^* odpovídající prvku $z \in H$. Přiřaďme k prvku x transfinitní posloupnost typu ω_ν $x^* = x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ $(\lambda < \omega_\nu)$, v níž $x_\lambda = \min_{z \in Z} z_\lambda$ ($\lambda < \omega_\nu$, λ pevné). Tímto způsobem je ke každému prvku z množiny P přiřazena jistá transfinitní posloupnost nul a jedniček typu ω_ν.

Označme dále symbolem P^* množinu všech posloupností přiřazených k prv-

---

[7]) Sr. definici husté podmnožiny v úplně uspořádané množině: *F. Hausdorff*: Grundzüge der Mengenlehre, 1914, str. 89.

kům množiny P uspořádanou podle pravidla a a symboly x^*, y^*, z^*, u^*, v^* posloupnosti přiřazené k prvkům $x, y, z, u, v \in P$.

Buď $x \in P - H$, $y \in H$. Je-li $x < y$, existuje prvek $z \in H$ takový, že $x < z < < y$. Odtud plyne $x^* \leq z^* < y^*$. Podobně $x > y$ implikuje $x^* > y^*$. Budiž $x \parallel y$.[8]) Předpokládejme $x^* \geq y^*$; odtud plyne $v^* \geq x^* \geq y^*$ pro každé $v \in H$, $v \geq x$; z toho máme $v \geq y$. Podle lemmatu 2 platí $x \geq y$ a to je spor. Tedy vztah $x^* \geq y^*$ není možný. Aplikujíce lemma 3 dokážeme snadno, že ani vztah $x^* \leq y^*$ není možný. Tedy $x \parallel y$ implikuje $x^* \parallel y^*$.

Buď nyní $x, y \in P - H$. Je-li $x < y$, existuje prvek $z \in H$ takový, že $x < z < < y$; odtud plyne $x^* < z^* < y^*$ podle první části našeho důkazu. Budiž $x \parallel y$. Předpokládejme $x^* \leq y^*$; odtud plyne $u^* \leq x^* \leq y^* \leq v^*$ pro každé $u, v \in H$, $u \leq x$, $v \geq y$; z toho máme $u \leq v$. Podle lemmatu 2 platí $u \leq y$, podle lemmatu 3 $x \leq y$ a to je spor. Tedy vztah $x^* \leq y^*$ je nemožný a vztah $x^* \geq y^*$ rovněž. Vztah $x \parallel y$ tedy implikuje $x^* \parallel y^*$.

Snadno se vidí, že zobrazení P na P^* definované nahoře je prosté. Protože zachovává všechny relace uspořádání mezi prvky sobě odpovídajícími, je to isomorfismus.

D ů s l e d e k. Buď ν libovolné dané ordinální číslo. Každá uspořádaná množina o separabilitě uspořádání $\aleph_\nu$ je podobna jistému systému transfinitních posloupností nul a jedniček typu ω_ν uspořádaných lexikograficky.

Důkaz snadno plyne z věty 2 a z lemmatu 1.

[8]) Podle *Hausdorffa* (l. c. str. 139) značí symbol $x \parallel y$, že prvky x, y jsou nesrovnatelné.