Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Novotný

O podobnosti uspořádaných kontinuí typů τ a τ^ν

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 1, 59--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117064

O PODOBNOSTI USPOŘÁDANÝCH KONTINUÍ TYPŮ τ a τ^ν.

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno.

(Došlo dne 1. listopadu 1952.) DT: 519.513

J. Novák položil problém, zda existuje uspořádané kontinuum C a ordinální číslo $\nu > 1$ tak, že množiny C^ν a C jsou podobné, značí-li C^ν lexikograficky uspořádaný systém všech posloupností typu ν utvořených z prvků kontinua C. Autor dokazuje, že řešení problému je negativní.

Uzavřeným uspořádaným kontinuem rozumíme uspořádanou množinu C bez skoků a mezer (přitom rozklad $0 \cup C$ a $C \cup 0$ počítáme mezi řezy). Uzavřené uspořádané kontinuum zbavené jednoho z krajních bodů nazveme *polouzavřeným uspořádaným kontinuem*; uzavřené uspořádané kontinuum zbavené obou krajních bodů nazveme *otevřeným uspořádaným kontinuem.* Uzavřená, polouzavřená i otevřená uspořádaná kontinua budeme označovat společným názvem jako *uspořádaná kontinua.*

Věta 1. *Buď C uzavřené uspořádané kontinuum. Pak žádný disjunktní systém jeho uzavřených intervalů není podoben kontinuu C při obvyklém způsobu uspořádání.*[1])

Důkaz: Předpokládejme naopak, že existuje jisté uzavřené uspořádané kontinuum C a v něm disjunktní systém uzavřených intervalů $\mathfrak{P}$ tak, že $\mathfrak{P}$ a C jsou podobné množiny. Podobností je ke každému $x \in C$ přiřazen jistý interval $I(x) \in \mathfrak{P}$. Položme $A_1 = \underset{x}{E}[x \in C, (x) < I(x)]$, $A_2 = \underset{x}{E}[x \in C, (x) > I(x)]$. Množiny A_1, A_2 jsou disjunktní a neprázdné. Označíme-li totiž 0 první a 1 poslední prvek v C, pak zřejmě každý vnitřní bod v $I(0)$ patří do A_1 a každý vnitřní bod v $I(1)$ do A_2.

Buď $z = \inf A_2$. Označme $I(z) = \langle a, b \rangle$.

1. Předpokládejme, že $b \leq z$. Pak každý bod intervalu (a, z) patří do A_2, takže $z \neq \inf A_2$ a máme spor.

2. Předpokládejme, že $z < b$, takže z non $\in A_2$. Pak každý bod intervalu (z, b) patří do A_1 a tedy $z \neq \inf A_2$ a máme zase spor.

[1]) Prázdnou množinu ani jednobodovou množinu nepovažujeme za interval. Pro dvě disjunktní množiny $0 \neq M \subset C$, $0 \neq N \subset C$ klademe $M < N$, když platí $x < y$ pro každé $x \in M$ a každé $y \in N$.

Dokázali jsme, že neplatí ani $z < b$ ani $z = b$ ani $z > b$; to však je spor, neboť C je úplně uspořádaná množina.

Věta 2. *Buď C uspořádané kontinuum, $\nu > 1$ libovolné ordinální číslo, C^ν lexikograficky uspořádaný systém všech posloupností typu ν utvořených z prvků uspořádaného kontinua C. Pak není C^ν podobno C.*

Důkaz: Nechť C je uzavřené uspořádané kontinuum. Označíme-li symbolem J_x množinu všech prvků $u_0 u_1 \dots u_\xi \dots (\xi < \nu) \in C^\nu$ takových, že $u_0 = x \in$ $\in C$, pak J_x je uzavřený interval v C^ν a disjunktní systém všech J_x je podoben uspořádanému kontinuu C. Tedy C a C^ν nejsou podobné množiny podle věty 1.

Nechť tedy v C schází některý krajní bod, na př. pravý. Buď $x_0 \in C$ libovolný vnitřní bod; utvořme řez v C^ν, jehož horní skupinu tvoří všechny prvky $u_0 u_1 \dots u_\xi \dots (\xi < \nu) \in C^\nu$ takové, že $u_0 > x_0$ a dolní skupinu tvoří všechny prvky zbývající. Tento řez je zřejmě mezera; tedy C^ν není podobno C. Podobně se důkaz provede, schází-li v C levý krajní bod.

Z věty 2. vychází záporné řešení Novákova problému.

Ve větě 1. se předpokládá, že uspořádané kontinuum C je uzavřené. Tento předpoklad je podstatný; to plyne z věty 3.

Věta 3. *Existuje uspořádané kontinuum C takové, že jistý jeho disjunktní systém uzavřených intervalů je při obvyklém způsobu uspořádání uspořádanému kontinuu C podoben.*

Důkaz: Nechť R značí interval $\langle 0, 1\rangle$, buď R_0 libovolná jednobodová množina, položme R_1 rovno intervalu $(0, 1\rangle$. Dejme tomu, že jsme již sestrojili $R_1, R_2, \dots, R_n$ jako uspořádaná kontinua bez prvního avšak s posledním prvkem. Buď R_{n+1} lexikograficky uspořádaný systém všech dvojic $[x, y]$, kde $x \in R_n$, $y \in R$. Množina R_{n+1} je pro $n = 1, 2, \dots$ uspořádané kontinuum bez prvního avšak s posledním prvkem a je sjednocením disjunktního systému uzavřených intervalů, jenž je podoben množině R_n. Buďte $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$ navzájem disjunktní uspořádané množiny podobné $R_0, R_1, \dots, R_n, \dots$ Množina $\bigcup_{n<\omega_0} T_n$, v níž pořadí dvou prvků $x \in T_m$, $y \in T_n$ pro $m \neq n$ je totéž jako pořadí indexů m, n a pořadí dvou prvků $x \in T_n$, $y \in T_n$ je totéž jako v T_n, je uspořádané kontinuum s vlastností popsanou ve větě.