Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Hampl

Rotující kotouč v plastickém stavu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 2, 197--202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117024

tečnost značně zjednodušují, s hlediska fysikálního a upozorněno na to, že s hlediska matematického by bylo třeba k vážné práci v theorii pružnosti shrnout všechny definice, úmluvy a předpoklady, z nichž některé nebývá zvykem vůbec uvádět, v axiomaticky vybudované základy theorie pružnosti.

Základní rovnice matematické theorie nelineární pružnosti je možno vyjádřit buď v souřadnicích tělesa před deformací nebo po deformaci. Složení rovnic je analogické jako v případě klasické theorie pružnosti: 6 rovnic, vyjadřujících složky tensoru deformace pomocí derivací složek posunutí (podmínky integrability tohoto systému tvoří 6 rovnic kompatibility), 3 rovnice rovnováhy, 6 rovnic vztahu mezi složkami tensoru deformace a napětí. Proti klasické theorii pružnosti však jde o systém parciálních diferenciálních rovnic nelineárních, který je značně složitý. Matematické řešení problémů z nelineární pružnosti vede na řešení tohoto systému při daných krajových a počátečních podmínkách. Pro tento systém nejsou dosud odvozeny základní věty o existenci a počtu řešení a jejich řešení bylo podáno jen pro několik speciálních případů při značných zjednodušeních. Tento systém rovnic je také základem obecné theorie stability v pružnosti (problémy vzpěru a pod.); pro technicky významný případ materiálů s velkým modulem elasticity, na př. pro ocel, je možno v rovnicích dosáhnout zanedbáním některých členů značného zjednodušení (uvedeno na př. v knize NOVOŽILOV: *Osnovy nelinejnoj těorii uprugosti*, L. M. 1948).

Rovnice nelineární pružnosti dávají také možnost odhadu chyb klasické theorie pružnosti, způsobených nesplněním předpokladu malých deformací.

Pro gumu a podobné materiály byla vybudována hlavně v pracích RIVLINOVÝCH (Philosophical Transactions of the Royal Society, London, ser. A, 1948) speciální matematická theorie nelineární pružnosti, která připouští jen takové deformace, při nichž se objem nemění (obecná isovolumenární transformace) a uvažuje jen velmi jednoduchý výraz pro deformační energii. Vedle základních rovnic Rivlinovy theorie, které tvoří opět systém nelineárních parciálních diferenciálních rovnic s krajovými a počátečními podmínkami, bylo podáno jejich řešení pro speciální případ torsního tlumiče tvaru dutého válce.

ROTUJÍCÍ KOTOUČ V PLASTICKÉM STAVU

(Referát o přednášce doc. Dr *Mil. Hampla*, proslovené dne 16. ledna 1952.)

1. V zahajovací přednášce ukázal Dr *Jeníček* na celou problematiku, na kterou naráží výzkum materiálu jednak při zpracování materiálu a jednak při zjišťování materiálových vlastností hlavně elastických a pevnostních. Význam a účel tohoto studia materiálu je především v tom, že konstruktér, který má navrhovati turbinu, Dieselův motor, jeřáb, lokomotivu, šicí stroj nebo jehlu do šicího stroje, musí znáti vlastnosti materiálu, kterého chce pro svou konstrukci použíti.

Jeho první povinností je zjistit všechny okolnosti a poměry, za jakých má jeho konstrukce pracovati, na př. jaké napětí musí snésti, a podle toho se rozhodnouti, jakého materiálu musí užíti.

Při tom musí míti na zřeteli hospodárné využití materiálu, t. j. pro konstrukci, u které zjistí na př. namáhání 500 kg/cm² v tahu neužije materiálu, který má pevnost na př. 7000 kg/cm² a podobně.

Jestliže si uvědomíte rozmanitost příčin, které mají vliv na vlastnosti materiálu při a po jeho zpracování v hutích, můžete snad dojíti k závěru, že materiálová data, která udávají hutě, jsou značně problematická. Ve skutečnosti to není tak zlé, protože tato nejistota se respektuje tím, že z celé řady zkoušek na zkušebních tyčkách se stanoví nejmenší a největší hodnoty příslušných údajů a konstruktér se dozví, v jakých mezích se příslušná hodnota pohybuje.

Konstruktér však naráží na jiné potíže pokud jde o materiál. Nedávno jsem byl v závodě, kde objednali vagon drátu. Kontrola zjistí, že vzorky, vzaté ze začátku a z konce jednotlivých kol drátu, vyhovují všem požadavkům, ale že směrem ke středu kola drát má vlastnosti značně horší.

To je jeden příklad z celé řady jiných, které bych mohl uvésti. Domnívám se, že v tomto ohledu by prospělo zavedení kontrolních method matematické statistiky do všech hutních závodů. Pokusy se v tomto směru už konají.

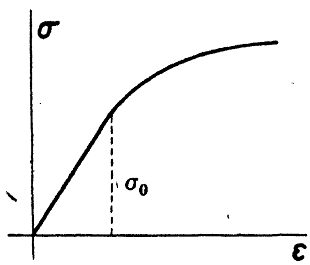
Druhá potíž konstruktérova je tato:

Pevnostní zkoušky materiálu se provádějí na zkušební tyčce. Tyto zkoušky tedy ukazují, jak se materiál chová v případě jednorozměrné napjatosti. Kdyby konstrukce turbiny nebo lokomotivy se dala provésti jenom z tyčí nebo drátů namáhaných na tah, mohl by konstruktér na základě pevnostních údajů zjištěných na zkušební tyčce se značnou přesností a bezpečností zaručiti chod příslušného stroje.

Bohužel konstrukční části většiny strojů nejsou tyčky, ale desky, kotouče, nádoby rozmanitých tvarů a pod.

V těchto případech už nejde o napjatost jednodimensionální, ale o dvoj- až trojdimensionální.

Úkolem konstruktéra je pak nalézti způsob, jak materiálových dat zjištěných pro případ jednorozměrné napjatosti využíti na případy napjatosti dvoj- a trojrozměrné.



Obr. 1.

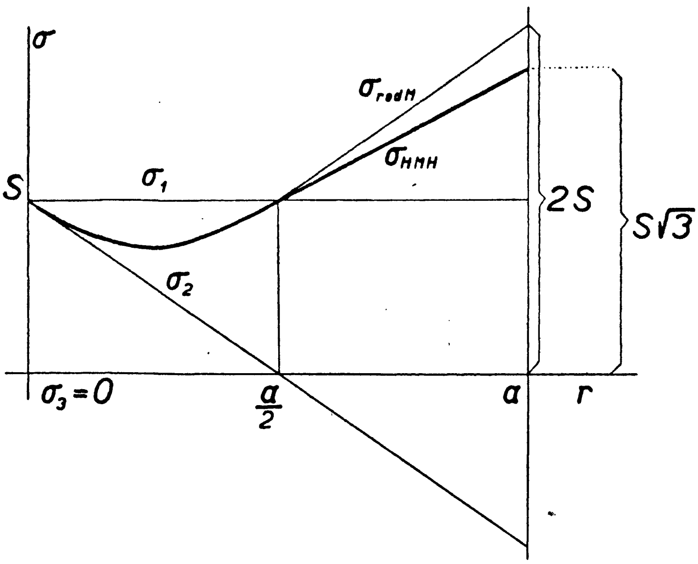
Vztah mezi napětím σ a poměrným prodloužením ε pro zkušební tyčku je dán jedním z diagramů, které zde uváděl Dr Jeníček.

Až do jisté hodnoty σ_0 se dá tento diagram nahraditi přímkou o rovnici $\sigma = E\varepsilon$. Hodnotu σ_0 nazveme mezí úměrnosti. V tomto oboru $\sigma \leqq \sigma_0$ platí Hookův zákon, na kterém je založena klasická theorie pružnosti. Tato theorie nám dává možnost, jak charakterisovati napjatost dvoj- a trojrozměrnou jediným napětím, které nazveme redukované napětí nebo namáhání konstrukce a které srovnáme s napětím jednorozměrným ve zkušební tyčce. „Klasický" konstruktér se pohybuje nebo snaží pohybovat pouze v oboru platnosti Hookova zákona.

Uvedu stručně jen dvě methody, jakých se nejčastěji používá.

Je to methoda *Mohrova*, podle které rozhoduje o namáhání konstrukce největší z rozdílů $|\sigma_1 - \sigma_2|$, $|\sigma_1 - \sigma_3|$, $|\sigma_2 - \sigma_3|$, kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí. Představme si, že jde o dvojrozměrnou napjatost ($\sigma_3 = 0$), a že obě napětí závisí na poloze charakterisované jediným parametrem r. Upozorňuji, že to neznamená, že jde o napjatost jednorozměrnou. Průběh σ_1 a σ_2 buď dán na př. $\sigma_1 = S$, $\sigma_2 = S\left(1 - 2\frac{r}{a}\right)$

v intervalu $0 \leqq r \leqq a$. Při tom φ je úměrno zatížení konstrukce a je funkcí rozměrů. Pak namáhání σ_{red} podle Mohra je dáno spojitou čarou, která má však nespojitou derivaci v místě, kde $\sigma_2 = 0$.



Obr. 2.

Už z tohoto příkladu je vidět jakousi nevýhodu Mohrova způsobu. V praxi totiž se snažíme vypočítati výrazy pro napětí σ_1, σ_2 jako funkce polohy a ve většině případů by nám pak stačilo zjistiti maximální namáhání konstrukce bez počítání resp. kreslení celého průběhu obou napětí. To je zřídka možno při užívání Mohrova způsobu.

Druhý dosti často užívaný způsob výpočtu namáhání konstrukce nazýváme podle tří autorů *Huber-Mises-Hencky* (stručně HMH). Je odvozen theoreticky z úvah o přetvárné práci a namáhání je podle něho:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad \text{HMH}$$

V případě rovinné napjatosti, kdy $\sigma_3 = 0$, vyjde

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}. \qquad \text{HMH}$$

Z těchto výrazů je vidět, že výpočet namáhání podle způsobu HMH je matematicky elegantnější než podle Mohra a že při něm není třeba rozlišovati případy, zda napětí mají stejná nebo opačná znaménka. Naproti tomu jeho nevýhoda souvisí s tím, že jde o výpočet kvadratického výrazu.

Pro předcházející příklad bude σ_{red} podle HMH dáno:

$$\sigma_{\text{red}} = S \sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{r}{a}\right) + \left(1 - 2\frac{r}{a}\right)^2}.$$

Největší hodnota bude pro $r = a$, t. j. $\sigma_{\mathrm{red}_{\max}}(a) = S\sqrt{3}$, kdežto podle Mohra bylo $\sigma_{\mathrm{red}_{\max}} = 2S$.

Bezpečnost μ konstrukce vzhledem k danému dovolenému namáhání σ_0 bude pak:

$$\mu_{\mathrm{MOHR}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{S} = 0{,}50\,\frac{\sigma_0}{S},$$

$$\mu_{\mathrm{HMH}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_0}{S} = 0{,}58\,\frac{\sigma_0}{S}.$$

Zmiňuji se o těchto věcech hlavně proto, abych ukázal na obtížnou a zodpovědnou práci konstruktéra, který je informován o vlastnostech materiálu většinou na základě zkoušek se zkušební tyčkou a který často po velmi obtížném výpočtu napjatosti konstrukce se musí rozhodnouti mezi různými způsoby, jak zjistiti maximální redukované napětí resp. bezpečnost konstrukce.

Nejistotu spojenou s uvedenými obtížemi obchází proto konstruktér tím, že volí předem dosti velkou bezpečnost vzhledem k mezi úměrnosti materiálu.

Zkušenost ukazuje, že dodatečným výpočtem už provedené konstrukce podle klasické theorie pružnosti často zjistíme v určitých místech namáhání přesahující nejen mez úměrnosti, ale i mez pevnosti — a přes to konstrukce se v provozu dobře osvědčují.

Takové případy můžeme si vysvětliti tím, že lokální napětí v materiálu namáhaném nad mezí úměrnosti jsou ve skutečnosti daleko menší než napětí vypočtená podle klasické theorie pružnosti. Stručně říkáme, že v takových místech materiál přechází do plastického stavu, „teče" a nakonec se trvale deformuje tak, že napětí klesne.

Abychom mohli početně zjistit, jak se chová konstrukce v místech, kde podle klasické theorie pružnosti přestoupí namáhání mez pružnosti, musíme opustit tuto theorii a užíti zcela nové a jiné.

Počátky těchto nových theorií se — podle mého názoru — dají klást do let kolem roku 1925, kdy vyšla práce *Henckyho* v ZAMM a *Nadaiova* kniha *„Der bildsame Zustand der Materie"*. Ta byla později přeložena do angličtiny „Plasticity". Ze sovětských autorů uvádím *Iljušina* a *Sokolovského*: *Těorija plastičnosti* (1951) a některé partie v *Mašinostrojeniju* I. a II. díl (1948).

V tomto oboru se intensivně pracuje stále, jak svědčí řada prací v zahraničních časopisech a přednášek na kongresech (naposledy v Londýně 1948). Je škoda, že se nikdo z našich odborníků nemůže zúčastnit letošního kongresu aplikované matematiky v Cařihradě.

U nás v tomto směru se pracuje dosud velmi málo, jak můžeme pozorovati v našich časopisech, jichž počet byl značně zredukován. Stručný popis theorie plasticity (tvárlivosti) je uveden v *Technickém průvodci* III., *Nauka o pružnosti a pevnosti* od *Bažanta-Nedomy* a *Spály*.

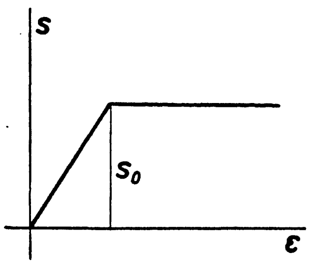
Pokud vím, soukromě pracuje Dr *Kohn* na problému ohybu v plastickém stavu. Já osobně cítím už kolik let, jak v tomto oboru zůstáváme pozadu za zahraniční vědou a snažím se, aby v našem studijním odboru ve Výzkumném ústavu těžkého strojírenství jsme se při problémech z pružnosti zaměřili tímto „plastickým" směrem. Našel jsem při tom značnou podporu a porozumění u svých spolupracovníků, z nichž na př. Dr *Špaček* řešil nádobu v plastickém stavu, Ing. *Dvořák* hák a Ing. *Šindlar* se zabývá výpočtem patek velkých nádob při respektování plasticity.

Kromě toho v minulém roce jsem řešil za spolupráce s prof. *Gruberovou* a aspirantem Ing. *Valentou* rotující kotouč konstantní tloušťky v elasticko-plastickém stavu. Výsledky jsou uvedeny ve zprávě Z-85. Při řešení tohoto problému vycházíme ze zjednodušené závislosti napětí s ve zkušební tyčce na poměrném prodloužení ε podle *Nadaie*. (Obr. 3.)

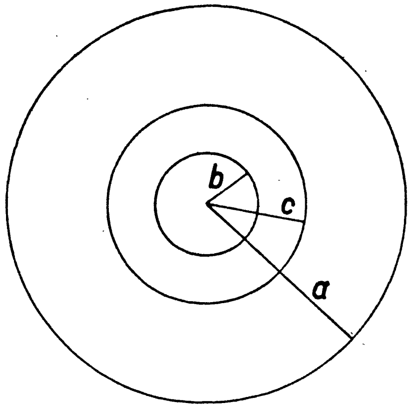
Hodnota s_0 značí mez tečení materiálu (yield-point).

Naše úloha zní:

V kotouči s otvorem, který rotuje úhlovou rychlostí ω, působením odstředivých sil vznikají napětí radiální s_r a obvodová s_t, která závisí na poloměru r a rychlosti ω a specifické váze γ. Má se určiti velikost obou napětí. Pokud je $\omega \leqq \overline{\omega}$, je celý kotouč ve stavu elastickém. Řešení napětí je uvedeno na př. v *Technickém průvodci III*. Přestoupí-li ω kritickou rychlost $\overline{\omega}$, dostává se kotouč částečně, a to v mezikruží $b \leqq r \leqq c$ do stavu plastického, ve vnějším mezikruží $c \leqq r \leqq a$ zůstává ve stavu elastickém, pokud $\omega \leqq \omega < \overline{\overline{\omega}}$.



Obr. 3.



Obr. 4.

Při tom stále předpokládáme, že $s_r(b) = s_r(a) = 0$. Při řešení problému napjatosti v plastickém stavu vycházíme ze základních matematických předpokladů, které dostatečně přesně souhlasí s experimentální zkušeností:

1. redukované napětí je v plastickém stavu stále $= s_0$ (mez tečení),

2. poměrná prodloužení ve směrech hlavních napětí jsou dána rovnicemi $\varepsilon_1 = c[s_1 - \frac{1}{2}(s_2 + s_3)]$ atd., z čehož plyne současně $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ (kubická dilatace $= 0$).

Kromě těchto podmínek platí v každém elementu plastického tělesa rovnice rovnováhy.

V případě rotujícího kotouče s otvorem jde na konec o řešení rovnic:

$$r\frac{ds_r}{dr} + s_r - s_t + \frac{8\omega^2}{g}\, r^2 = 0 \text{ (rovnováha)},$$

$$s_{\text{red}} = s_0 \text{ (stav plastický)}.$$

U vyšetřovaného kotouče se dá předpokládati, že s_{red} podle Mohra je s_t, neboť $s_t \geqq s_r \geqq 0$.

Nadai ve své knize uvedl stručně některé specielní výsledky řešení kotouče za předpokladu, že $s_{\text{red}} = s_t = s_0$, tedy za předpokladu hypothesy Mohrovy.

My jsme potřebovali podrobně řešit tento problém a pokusili jsme se jej řešiti za předpokladu hypothesy HMH, tedy za předpokladu, že

$$s_{\text{red}} = \sqrt{s_r^2 - s_r s_t + s_t^2} = s_0.$$

Tím jsme ovšem museli řešit nelineární diferenciální rovnici, která po úpravě měla tvar

$$4xy' + 2x + y - \sqrt{4 - 3y^2} = 0.$$

Pomocí jejího řešení jsme dostali napětí s_r a s_t v plastické části kotouče a to jsme kombinovali s řešením elastického kotouče.

Výsledky jsme znázornili graficky, takže z příslušných diagramů můžeme snadno najíti pro daný vnitřní a vnější poloměr kotouče a dané ω:

1. poloměr c, který odděluje vnitřní plastickou část kotouče od vnější elastické,
2. rychlost $\overline{\omega}$, při níž kotouč začíná přecházeti do plastického stavu,
3. rychlost $\overline{\overline{\omega}}$, při které je celý kotouč plastický,
4. napětí s_r, s_t v každém místě kotouče, t. j. jak v části plastické, tak elastické.

Tyto výsledky jsme v literatuře nenašli.

Na konec jsme srovnali všechny tyto výsledky provedené za předpokladu hypothesy HMH s analogickými výsledky provedenými podle hypothesy Mohrovy a stručně naznačenými v Nadaiově knize.

Podle očekávání se oba druhy výsledků příliš nelišily. Na vysvětlenou, proč jsme řešili ten problém složitě, když podle Mohra jsme jej mohli řešit (přibližně se stejnou přesností) jednoduše, bych řekl:

U rotujícího kotouče s krajovými podmínkami $s_r = 0$ na vnitřním i vnějším poloměru je podle Mohra $s_{\text{red}} = s_t$, tedy řešení jednoduché. V jiných případech však tomu není tak — na př. už v případě kotouče nalisovaného na hřídel. V takových složitějších případech užití Mohrovy hypothesy může naraziti na různé nepříjemnosti, protože by se muselo zjišťovati, který z výrazů $|s_t - s_r|$, $|s_t - s_z|$, $|s_r - s_z|$ a v kterých oborech, rozhoduje o namáhání. Proto jsme na případu, který se dal poměrně snadno kontrolovat s řešením podle Mohra, si chtěli zjistit, zda řešení nelineární diferenciální rovnice je prakticky proveditelné v dostatečné obecnosti. To se nám podařilo a proto zkušeností, kterých jsme získali, můžeme užíti i v případech obtížnějších.