REFERÁTY O PŘEDNÁŠKÁCH V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

APLIKACE THEORIE USPOŘÁDANÝCH KONTINUÍ NA BOOLEOVY ALGEBRY

(Referát o přednášce *Lad. Riegera*, proslovené dne 26. února 1951.)

Problém existence Booleovy (ovšem nekonečné) algebry bez neidentických automorfismů, říkejme takové algebře „ztrnulá", byl položen v knize *G. Birkhoff*, Lattice Theory v 1. vyd. r. 1940 a opakován v 2. vyd. z r. 1948 jako dosud neřešený problém.

Jak známo z theorie topologických representací Booleových algeber, řešiti tento problém positivně je totéž, jako vyvrátit známou topologickou hypothesu, že každý kompaktní (t. j. bikompaktní) prostor dimense 0, čili t. zv. Booleův prostor, má neidentické homeomorfní zobrazení na sebe sama.

Příklad na Booleův prostor bez neidentických homeomorfních zobrazení na sebe sama — takovému prostoru říkejme „ztrnulý" Booleův prostor — sestrojil za pomoci Čechova β-obalu nedávno doc. *M. Katětov* a tím nalezl i „ztrnulou" Booleovu algebru; o tomto svém výsledku referoval na schůzi matematické obce pražské dne 22. ledna 1951.

Přednášející navázal s jedné strany na Katětovovu přednášku a s druhé strany na bezprostředně na této schůzi předcházející přednášku *prof. J. Nováka* o uspořádaných kontinuích a uvedl svoje vlastní řešení problému.*)

Ukázal, jak lze sestrojit uspořádaný Booleův „ztrnulý" prostor, který dokonce nemá ani prostého spojitého zobrazení *do* sebe sama (kromě zobrazení identického). Tím je kladně řešeno jisté zobecnění zmíněného problému o Booleových algebrách, které formuloval *Katětov* ve svém řešení původního problému, zda totiž existuje Booleova algebra, která dokonce nemá ani žádného neidentického homeomorfního zobrazení na sebe sama.

Hrubý popis základní myšlenky konstrukce je tento. Vycházíme ze „zahušťovacího" procesu, kterým mezi jednotlivé, po sobě následu-

*) Toto řešení, ke kterému autor dospěl o něco později, nežli *M. Katětov*, má vyjít ve Fundam. Math. 1951. Katětovovo řešení, jež má, pokud je známo, absolutní prioritu, má vyjít v Coll. Math. 1951.

jící prvky dobře uspořádané množiny vkládáme další dobře uspořádané množiny. Volíme-li vhodně stoupající typy dobrého uspořádání vkládaných množin, pak po spočetně mnoha, indukcí provedených, zahušťovacích krocích a po odstranění některých prvků, obdržíme hustě uspořádanou množinu, jejíž každé dva různé prvky, jakožto body uspořádaného topologického prostoru, mají různé (topologické) charaktery a to vesměs nespočetné. Vložíme-li do každé z mezer sestrojené uspořádané množiny t. zv. „reálných" bodů ještě dva body, t. zv. „levý" a t. zv. „pravý ideální" bod, pak takto vzniklý uspořádaný prostor je hledaný Booleův „ztrnulý" prostor, který nemá ani spojitých prostých zobrazení do sebe sama (nehledě na identické zobrazení). Důkaz této vlastnosti spočívá v následujícím. Množina „reálných" bodů je hustá v celém prostoru a stačí tedy dokázat, že při každém prostém spojitém zobrazení prostoru do sebe přechází tato množina bod po bodu v sebe sama. Avšak „reálný" bod skutečně nemůže přejít v jiný reálný bod (od něho různý), následkem různosti charakterů různých „reálných" bodů. A „reálný" bod nemůže také přejít v „pravý ideální bod", protože tento má vždy spočetný charakter, na rozdíl od nespočetného charakteru každého z „reálných" bodů. Konečně, reálný bod nemůže přejít ani v „levý ideální bod", protože každý „reálný" bod je limitou vhodné spočetné prosté posloupnosti, kdežto „levý ideální" bod této vlastnosti již musí mít spočetný charakter (na rozdíl od „reálného" bodu).

Přednášející se ještě zmínil o souvislosti řečeného s ergodickými větami z abstraktní theorie pravděpodobnosti. „Ztrnulá" Booleova algebra sestrojeného typu představuje příklad „pravděpodobnostního pole", ve kterém při každém zavedení pravděpodobnosti ta část ergodických vět která se (dle *Halmose*) dá formulovat pomocí homomorfních zobrazení „pravděpodobnostního pole" na sebe, degeneruje v triviality.