Bronisłav Knaster

O aplikacích matematické logiky na matematiku

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 1, 3--22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/116995

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 76 (1951)

REFERÁTY A ČLÁNKY

O APLIKACÍCH MATEMATICKÉ LOGIKY NA MATEMATIKU

BRONISŁAV KNASTER, Wrocław.

(Došlo dne 18. III. 1951.)

Prof. Dr B. KNASTER přednášel v únoru 1950 v Praze o matematické logice a jejích aplikacích na různé matematické otázky. Obsahem článku jsou tyto přednášky. Je v nich ukázáno, že logika je nedílnou částí matematiky. Hlavní body jsou: Počet výrokový a jeho užití, počet kvantifikátorů, theorie množin a relací, axiomatisace a formalisace matematických theorií a konečně metamatematika.

Thema těchto přednášek[1]) je tak základní a obsáhlé, že by vlastně vyžadovalo zvláštní monografii. Proslovil jsem je na přání prof. ED. ČECHA jako informativní přehled, spíše se dotýkaje thematu nežli jej rozvíjeje. V několika hodinách přednášek těžko lze jít do podrobností. Spokojím se tedy několika obecnými úvahami a speciálně vybranými konkretními příklady, které podle mého mínění zasluhují pozornosti matematiků. Některé z nich jsou obsaženy (mezi mnoha známějšími a podrobněji vyloženými aplikacemi) ve znamenitém díle MOSTOWSKÉHO [29]; zdá se mi, že je to nejpěknější knížka z matematické logiky, kterou znám (pracuje se na novém rozšířeném vydání v anglickém jazyce).

Budu také dbáti, abych z méně známých příkladů vybral především takové, které mohou odstranit chybné názory nebo nedorozumění. Tím budu považovat svůj cíl za dosažený.

Nejsem specialistou v matematické logice. Mnohé úsudky, které vyslovím, mají subjektivní charakter a stanoví můj osobitý názor; nelze je míti za obecně uznané ve vědě.

Předmětem bádání v logice jest — jak známo — *usuzování*. Úkolem logiky matematické potom jest — zhruba řečeno — formalisace matematického usuzování a analysa tohoto usuzování s hlediska methodologie, ale methodologie pojímané jako exaktní věda, jako specifický deduktivní systém, nazývaný dnes *metamatematika*. Zdůrazňuji zde ohromnou důležitost tohoto systému, dnes ještě nedostatečně uznávanou.

Všichni si uvědomujeme, že přes nesmírné pokroky matematické logiky její výstavba je teprve v počátcích. Od BOOLA uplynulo sotva sto let. Další rozvoj matematické logiky jako každý významnější pokrok

[1]) Proslovených v únoru 1950 v Matematickém ústavu České akademie věd a umění v Praze.

vědy jest spjat s překonáním určitých zásadních potíží povahy psychologické a tradičně filosofické. Přesto už dnes, právě dík metamatematickým objevům, počínají se rýsovat mlhavé obrysy nádherné budovy budoucí matematiky a zároveň i budovy deduktivních nauk vůbec. Mimo jiné již dávno víme, že v matematickém usuzování nehraje hlavní úlohu školská aristotelovská sylogistika (která je dnes spíše drobným a nezajímavým již fragmentem theorie množin nebo relací), aniž ji hraje výrokový počet, nýbrž především počet kvantifikátorů (Π a Σ). Ukázalo se též — a na to se dnes ještě klade příliš malý důraz — že všecky pojmy moderní matematiky se redukují podstatným a přirozeným způsobem na libovolný ze tří základních pojmů množiny, relace nebo funkce (z nichž každý se dá ostatně definovat pomocí kteréhokoliv z obou ostatních). Ve skutečnosti dosud známé způsoby budování zformalisovaných matematických systémů těmito prostředky jsou ještě velmi nedokonalé a příliš rozvláčné, než aby se jich mohlo prakticky užívat; přes to v určitých aplikacích — jako je na př. analysa pojmu čísla, prostoru, integrálu, pravděpodobnosti — odstranily již tolik předsudků a tak dalece prospěly dalšímu rozvoji matematiky, že jejich znalost je dnes nezbytnou částí obecného matematického vzdělání.

Ještě jedna obecná úvaha, kterou jsem vlastně měl v úmyslu povědět až na konci. Tvrdí se, že matematická logika není pro matematika pracovním nástrojem, nýbrž že mu dá pouze jiný, hlubší názor na matematiku nežli pouhé naivní vycítění logických zákonů intuicí; že mu neusnadní nalezení nových matematických vět a jejich důkazů ani ho nenaučí řešení problémů. „Student, který zmůže kurs logiky — píše Mostowski (v. [29], str. 2) — získá sice solidní vědomosti o matematice, nestane se však automaticky lepším matematikem". Nezcela s tím souhlasím. Student možná, ale profesionální matematik badatel nikoliv.

Děcko, které se naučilo chodit, nemusí znát základy statiky, a pozná-li je, nebude chodit lépe. Ale závodník běžec, lyžař, trenér, zvláště však instruktor, dojde k lepším výsledkům ve své práci se znalostí mechaniky běhu než bez ní. Uvedu příklady, jak díky vyjádření matematických premis logickými formulemi nejednou se mi podařilo vyhnout se hledání důkazů vět v nevhodném směru. Uvedu také příklady, jak matematická logika učí matematika badatele klást problémy (byť i ne je řešit). Považuji to za její nejdůležitější aplikaci. Neboť se mi zdá, že matematická logika je pro matematika něčím více než nástrojem: jest ukazatelem cesty.

Rovněž se tvrdí, že matematika je nástrojem pro fysiku, fysika pro biologii atd. Došli bychom k úměře:

$$\frac{\text{logika}}{\text{matematika}} = \frac{\text{matematika}}{\text{fysika}}.$$

Tento názor se mi zdá zásadně nesprávný a historicky nedoložený. Pravda jest, že moderní theoretickou fysiku vytvořili ve značném stupni matematikové, ale pravda je také, že rovněž moderní matematickou logiku vytvořili matematikové, a ne logikové matematiku. Počínajíc LEIBNIZEM a končíc HILBERTEM nejznamenitější logikové byli zároveň matematiky. To platí rovněž pro logiky mladší generace (GÖDEL, MALCEV, MOSTOWSKI, NOVIKOV, TARSKI). *Dnešní matematická logika* již nejen že není nástrojem, ale není ani filosofickou basí nebo základnou matematiky: *je prostě částí matematiky samotné.* V souborném díle Akademie nauk SSSR „Matematika v SSSR ze tridcať let 1917—1947" je první oddíl cele věnován matematické logice.

Předpokládám, že matematická logika je přítomným známa aspoň ve svých hlavních částech, které tvoří zároveň mezníky jejího historického rozvoje. Jsou to:

I. Výrokový počet.
II. Počet kvantifikátorů.
III. Analysa matematických pojmů (theorie množin a relací).
IV. Axiomatisace matematických theorií.
V. Formalisace matematických theorií.
VI. Metamatematika.

V témž pořádku pojednám o jednotlivých aplikacích.

I. Výrokový počet. Buďtež $a, b, c, \ldots$ výroky, 1 logická hodnota *pravda*, 0 logická hodnota *nepravda*, $'$ negace, $+$ alternativa, $.$ konjunkce, $\rightarrow$ implikace.

Znám je vzorec PORECKÉHO (který byl jako LOBAČEVSKIJ profesorem university v Kazani, ale o půl století později), který dává pro n výroků rozvoj jednotky na 2^n výrazů a tedy na př. pro 3 výroky a, b, c na 8 výrazů:

$$1 = abc + abc' + ab'c + a'bc + ab'c' + a'bc' + a'b'c + a'b'c'. \qquad (1)$$

Tento vzorec se vyskytuje také v počtu rozsahů pojmů. Každá věta vyjadřující jakýkoli logický vztah mezi výroky a, b, c může se pomocí výše vyjmenovaných logických operací zapsat v ekvivalentním tvaru formulí vyjadřující, že součet některých členů mnohočlenu (1) je roven nule.

Uveďme jako příklad klasický problém *jednoduché zavřené křivky* (t. j. homeomorfního obrazu kružnice) v rovině. JORDANOVA věta praví, že každá jednoduchá zavřená křivka roztíná rovinu na dvě oblasti a jest jejich společnou hranicí. Též je známo, že každé kontinuum, roztínající rovinu, které je společnou hranicí všech svých doplňkových oblastí, jest *irreducibilním řezem* (t. j. takovým, jehož žádná část už neroztíná rovinu) a naopak. SCHÖNFLIES [33] vyslovil větu, která by byla obrácením věty JORDANOVY, že totiž každé kontinuum, které roztíná rovinu na dvě oblasti a jest jejich společnou hranicí, je jednoduchou zavřenou křivkou.

Brouwer [4] prokázal jeho omyl objevem *nerozložitelného kontinua* (t. j. takového, které není součtem dvou jiných kontinuí), které roztíná rovinu na dvě oblasti a jest jejich společnou hranicí. Zřejmě však tím nebyly vyčerpány všecky logické vztahy, které by mohly platit mezi výroky:

a. kontinuum K jest homeomorfní s kružnicí,

b. kontinuum K jest irreducibilním řezem roztínajícím rovinu na dvě oblasti,

c. kontinuum K jest nerozložitelné.

V Jordanově větě jest obsažena implikace $a \rightarrow b$, což se dá psáti také $ab' = 0$ neboli $ab'c + ab'c' = 0$; vzhledem k rozložitelnosti kružnice a její existenci v rovině plyne z toho ještě m. j., že $abc = 0$ a $abc' \neq 0$, ale problém logické hodnoty ostatních členů rozvoje (1) zůstával otevřený.

Schönflies tvrdil, že $b \rightarrow a$, což se dá psáti

$$a'bc + a'bc' = 0. \tag{2}$$

Brouwer dokázal objevem svého nerozložitelného irreducibilního řezu, že $a'bc \neq 0$. Ale — což je nejzajímavější — také druhý člen rovnice (2) není roven 0. To odůvodnil Kuratowski [20]. On dokázal obecně, že každý irreducibilní řez roviny je buďto homeomorfní s kružnicí, nebo je nerozložitelným kontinuem nebo je součtem dvou nerozložitelných kontinuí; řezy posledních dvou druhů skutečně existují (Brouwer [4], Knaster [15]). Co se týče formule $a'b'c \neq 0$ neboli existence nerozložitelných kontinuí, které nejsou řezy, podal takový příklad již Janiszewski ve své proslulé doktorské práci [14]; zjednodušená mnou konstrukce toho příkladu se najde ve výše citované práci Kuratowského. Zbývá $a'b'c' \neq 0$, což je triviální. Teprve když takto byly stanoveny logické hodnoty všech členů mnohočlenu (1), můžeme problém vztahů mezi výroky a, b a c považovat za vyčerpaný.

Tento příklad učí mimo jiné, *jak se mají klásti problémy*. V matematických publikacích se často najdou důkazy jednoho vztahu nebo dvou vztahů mezi několika, na př. třemi, pojmy bez zmínky o jiných vztazích mezi nimi, které napadají myslícího čtenáře. I když čtenář sám se těmito vztahy zabývá a odůvodní je nebo je vyvrátí, riskuje, že udělá něco, co jest již odjinud známo, a nikdy nebude mít jistotu, že thema vyčerpal, dokud si nezjistí podle vzorce Poreckého, zda si všiml všech možných vztahů. Proto matematik má vždy uvést ve své práci, které vztahy mezi pojmy vyskytujícími se v jeho větě jsou již známé a které jsou ještě otevřenými problémy. Proto také *považuji užívání vzorce* Poreckého *za jednu z nejjednodušších zásad plánování matematického bádání.*

K jak neočekávaným výsledkům může někdy vésti nedbání tohoto postulátu, ukazuje jiný příklad z mé praxe. Moore [28] vyslovil jistou zajímavou větu obsahující pět předpokladů. Zkoumání vztahů podle vzorce PORECKÉHO ukázalo, že tři z nich jsou zbytečné a že čtvrtý se dá oslabit při vhodné změně pátého; důkaz takto zostřené věty byl předmětem zvláštní publikace (KNASTER a KURATOWSKI [17]).

II. Počet kvantifikátorů. Historický význam, který měly aplikace počtu kvantifikátorů pro rozvoj matematiky (zejména v oboru pojmů z analysy), je všeobecně znám. Víme, jakou úlohu hrály správné definice pojmů limity, spojitosti a integrálu. Víme, jak dík precisaci pojmu limity mohly se odstranit z matematiky takové zbytečné a mlhavé výrazy, jako čísla nekonečně malá a t. p., které po dlouhý čas byly prameny nedorozumění. Víme také, s jakou přesností vynikne struktura těchto pojmů, zapíšeme-li jejich definice pomocí kvantifikátorů. Všeobecně známé jsou následující příklady:

1. *Rozdíl mezi spojitostí nebo konvergencí a stejnoměrnou spojitostí nebo stejnoměrnou konvergencí.*

Definice spojitosti funkce $f(x)$ v každém bodě x množiny M dá se napsat ve tvaru:

$$\prod_{\varepsilon>0} \prod_{x\varepsilon M} \sum_{\delta>0} \prod_{x_1\varepsilon M} \{(|x - x_1| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon)\},$$

kdežto definice stejnoměrné spojitosti ve tvaru:

$$\prod_{\varepsilon>0} \sum_{\delta>0} \prod_{x\varepsilon M} \prod_{x_1\varepsilon M} \{(|x - x_1| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon)\}.$$

Podobně definice konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ k funkci f v každém bodě x množiny M dá se napsati takto:

$$\prod_{\varepsilon>0} \prod_{x\varepsilon M} \sum_{n_0} \prod_{n} \{(n < n_0) \rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\},$$

naproti tomu definice stejnoměrné konvergence bude míti tvar:

$$\prod_{\varepsilon>0} \sum_{n_0} \prod_{x\varepsilon M} \prod_{n} \{(n < n_0) \rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\}.$$

Vidíme, že přechod od obyčejné vlastnosti ke stejnoměrné pozůstává v záměně pořádku kvantifikátorů Π a Σ — to je právě rozdíl v logické stavbě těchto pojmů*). Totéž platí o stejnoměrné platnosti rovností, nerovností a jiných podmínek.

Víme, jakou potíž činí začátečníkovi pochopení tohoto rozdílu na podkladě pouhého znění slovních definic. Naproti tomu ten, kdo se jedinkrát seznámí s uvažovaným rozdílem na podkladě vzorců zapsaných pomocí kvantifikátorů, nikdy nebude na pochybách ani v době zkoušky ani při aplikaci těchto pojmů v usuzování.

2. *Pojem existence v matematice.* Jak známo, tento pojem byl po

*) V. *Banach* [1], str. 11—12, kde „methodě kvantifikátorů“ je věnována značná část § 1.

dlouhý čas thematem vleklých sporů filosofické povahy mezi vynikajícími matematiky. V těchto sporech se zrcadlily skoro všecky názory tehdejších idealistů, kteří ostatně — jak se ukázalo — spojovali s pojmem existence velmi různé intuice.

Podle jedněch (jako na př. podle POINCARÉHO) existence v matematickém smyslu byla prostě identická s bezesporností vzhledem k axiomům a vyžadovala tudíž důkazu této bezespornosti („nestačí cosi definovat, aby to cosi existovalo"). Oni vytvořili celou theorii definicí „predikativních" a „nepredikativních", při čemž ve druhých viděli pramen antinomií. Ale ani co do predikativnosti nebylo shody.

Neboť jiní uznávali existenci teprve tehdy, byla-li podána methoda konstrukce, kterou však podrobovali různým podmínkám (BOREL, LEBESGUE, BROUWER). Nemohu tu ovšem rozváděti podrobnosti; dotknu se toho ještě při uvažování metamatematického pojmu *efektivnosti* (v. str. 17). Zde pak se omezím na tvrzení, že — jak se mi zdá — celý ten historický spor spočíval do značného stupně v matení filosofických pojmů s logickým pojmem Σ (malého kvantifikátoru). Jeho definice zní takto:

$$\underset{x}{\Sigma} f(x) = [\underset{x}{\Pi} f(x)']'. \tag{4}$$

Neznám v matematice žádného případu — a považuji to za fakt materiálně stvrzený — ve kterém by se slova *existuje* užilo v jiném smyslu než který je popsán ve (4), a pouze v tomto smyslu se ho užívá ve zformalisované matematice. Také si nemohu představiti, že by celý ten spor mohl vzniknout v jazycích, ve kterých by pro vyjádření malého kvantifikátoru nebylo slova *existuje*, nýbrž pouze na př. „pro některé ...". Zdá se mi, že objasnění tak základní věci jest jednou z nejdůležitějších aplikací kvantifikátorového počtu.

Oba uvedené příklady je možno nalézti ve skoro každé moderní učebnici matematické logiky. Za to méně známy jsou důležité příklady aplikace počtu kvantifikátorů v konkretní badatelské práci, zvláště v novějších oborech matematiky jako na př. v topologii a v theorii funkcí reálné proměnné. Tyto aplikace se opírají o objev, že logické kvantifikátory mají geometrickou interpretaci. Uveďme příklad:

3. *Methoda Kuratowského a Tarského pro odhad borelovských a projektivních tříd.* Tato methoda spočívá v tom, že z definice množiny, zapsané pomocí logických symbolů, se vyčte ta ze tříd

$$\begin{array}{l} F, F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, \ldots, \ A, \ PCA, \ PCPCA, \ldots, \\ G, G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, \ldots, CA, CPCA, CPCPCA, \ldots, \end{array} \tag{5}$$

do které ta množina náleží. Jak známo, tato klasifikace stanoví rostoucí transfinitní posloupnosti: každá třída zahrnuje předcházející a je nad ně širší.

Pravíme, že výroková funkce φ je z jedné z těchto tříd, jestliže $\underset{x}{E}\varphi(x)$, t. j. množina hodnot x splňujících výrokovou funkci $\varphi(x)$, jest množinou té třídy. Podobně se definuje třída funkce několika proměnných a snadno se odvodí, jaké třídy je alternativa, konjunkce, negace atd. několika funkcí, jsou-li jejich třídy známy. Základní význam pro aplikace mají následující dvě vlastnosti:

1° operátor E je záměnný s operátory Π a Σ. Tak na př.

$$\underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\varphi(x, y) = \underset{y}{\Sigma}\underset{x}{E}\varphi(x, y), \quad \underset{x}{E}\underset{y}{\Pi}\varphi(x, y) = \underset{y}{\Pi}\underset{x}{E}\varphi(x, y).$$

V těchto vzorcích Σ a Π mají na levé straně význam logický (kvantifikátory) a na pravé matematický (Σ — součet, Π — průnik množin).

2° množina $\underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\varphi(x, y)$ a tedy podle 1° také množina $\underset{y}{\Sigma}\underset{x}{E}\varphi(x, y)$ je projekcí množiny $\underset{(x,y)}{E}\varphi(x, y)$ na osu x, takže množina $\underset{x}{E}\underset{y}{\Pi}\varphi(x, y)$ je podle definice (4) doplňkem projekce doplňku.

Z toho plyne, že známe-li třídu elementárních topologických funkcí $\varphi(x, y, \ldots)$, $\psi(x, y, \ldots)$, vyskytujících se v definici dané množiny M, můžeme odhadnout třídu této množiny, neboť víme, jak se borelovské a projektivní třídy změní při projekci. Práce Kuratowského a Tarského [21, 23] obsahují určení tříd pro takové elementární funkce: tak na př. funkce $x \in M$ je téže třídy jako množina M, funkce $x \neq y$ je třídy G, protože funkce $x = y$ je třídy F vzhledem ke spojitosti funkce $|x - y|$ atd.

Aplikace této methody*) poskytuje pro mnoho vět o borelovské nebo projektivní třídě množin, jejichž důkazy byly velice složité, důkazy nadmíru jednoduché, pozůstávající na napsání definice množiny pomocí logických symbolů a odhadnutí její třídy tímto způsobem. Tato methoda vede také ke mnoha novým větám, k nimž by bylo nesnadné dospěti jiným způsobem.

Proberme několik aplikací:

(a) Urysohnova a Nikodemova věta [30, 43] o přístupných bodech v kartézských prostorech. *Jestliže množina M je třídy α, potom množina* ac(M) *bodů množiny M, které jsou přímočaře přístupné, je třídy PCP* $(F \,.\, G \,.\, \alpha)$.

Bod $x \in M$ se nazývá přímočaře přístupným, je-li krajním bodem úsečky, jejíž všecky ostatní body leží mimo M:

$$\mathrm{ac}(M) = \underset{x}{E}(x \in M) \,.\, \underset{y}{\Sigma}\{(y \neq x)\, \underset{z}{\Pi}[(|x - z| + |z - y| = |x - y|) \,.$$
$$. \,(z \neq x) \rightarrow (z \in M)']\}.$$

*) V. také *S. Banach*, op. cit., str. 13—14.

Symbol $|x - y|$ zde znamená vzdálenost mezi x a y.

Výraz v [ ] lze napsati takto:

$$(|x - z| + |z - y| \neq |x - y|) + (z = x) + (z \in M)'.$$

Jestliže nyní za výrokové funkce vyskytující se za $\underset{x}{E}$, dosadíme jejich třídu, dostaneme pro třídu množiny ac(M) vzorec $\alpha F \,.\, [GCPC \,.\, . \,(G + F + C\alpha)]$ neboli po počátečních zjednodušeních PCP(F . G . α). Tedy specielně:

(1) jestliže M je třídy F nebo F_σ, potom ac(M) je třídy $F_\sigma \,.\, PG_\delta$ neboli A,

(ii) jestliže M je třídy A, potom ac(M) je třídy PCA.

Je však třeba poznamenati, že jestliže třída množiny, vyčtená z její definice methodou Kuratowského a Tarského, jest α, neplyne z toho ještě, že ta množina není třídy nižší, neboť třídy (5) jsou rostoucí. O ostrosti odhadu rozhodne zpravidla teprve důkaz obrácené věty. Záleží na více nebo méně obratném vyjádření definice množiny, zda dostaneme přesnou třídu či pouze nějakou třídu vyšší — to je už závislé na dovednosti matematikově. Vidíme tedy, že methoda není automatická. A to také nebylo jejím cílem, nýbrž pouze zkrácení a zjednodušení úsudků. Původní Nikodymův důkaz, dlouhý a složitý, i kdyby byl napsán v logických symbolech, dal se — jak jsme viděli — redukovat na napsání a přečtení tříd určitých výrokových funkcí. Totéž platí o následujících aplikacích.

(b) Věta Mazurkieviczova a Sierpińského [26, 27, 38] o maximálních bodech. Budiž X jakýkoli separabilní a úplný metrický prostor, na př. přímka, a budiž I úsečka $0 \leq y \leq 1$. Budiž $M \subset X \times I$. Pravíme, že bod (x, y) je *maximálním bodem* množiny M, jestliže všecky ostatní body množiny M s týmž x mají menší y. Nechť max(M) znamená množinu všech maximálních bodů množiny M:

$$\max(M) = \underset{(x,y)}{E}\left([(x, y) \in M] \,.\, \underset{y_1}{\Pi}\{[(x, y_1) \in M]' + (y_1 \leq y)\}\right).$$

Jestliže množina M je třídy α, potom max(M) je třídy αCPC $(C\alpha + F) = \alpha CP(\alpha \,.\, G)$. Zejména jestliže M je borelovská množina, potom max(M) je třídy CA.

Budiž p(M) projekce množiny max(M) do prostoru X. Definici množiny p(M) je možno zapsati tak, že pro množiny M třídy F_σ vychází třída A, ale to by byl příliš vysoký odhad, protože touž definici můžeme zapsati vhodněji, totiž tak, že p(M) vyjde třídy $G_{\delta\delta}$, což již jest ostrý odhad.

Tyto dvě aplikace dávají představu o smyslu a o důležitosti methody. Mezi jinými obtížnějšími větami, jejichž důkaz touto methodou jest okamžitý, uveďme ještě tři následující: Množina všech nerozložitelných kontinuí obsažených v kontinuu C je třídy G_δ v prostoru všech podkontinuí kontinua C, množina všech řezů kontinua C je třídy F_δ v témž prostoru, množina všech kontinuí lokálně souvislých (t. j. spojitých obrazů úsečky) je třídy $F_{\sigma\delta}$ v témž prostoru.

III. Theorie množin a relací (analysa matematických pojmů). Připomenu zde pouze 3 příklady, které — jak se mi zdá — výmluvně charakterisují roli theorie množin a theorie relací v matematice našeho věku, která jim vděčí za svou tvůrčí obnovu do té míry, že téměř všecky její obory jsou dnes cele proniknuty jejich aplikacemi.

1. *Pojem funkce.* Známa jest matematikům definice funkce jakožto jednoznačné relace, t. j. jakožto takové množiny uspořádaných dvojic, ve které dvě dvojice se nemohou od sebe lišit pouze druhým prvkem (zadním členem dvojice). Poněkud méně známo jest, že pojem uspořádané dvojice se dá jednoduše definovat na základě pouhého pojmu množiny, t. j. bez takových pojmů jako uspořádání atd. (HAUSDORF [12], KURATOWSKI [19]). Toto objasnění logické struktury pojmu funkce přispělo ke mnoha zjednodušením; umožnilo na př. identifikovati funkci s jejím diagramem, zpřesnilo a zjednodušilo mnoho důkazů a zároveň značně zobecnilo mnoho vět, mezi jinými větu CANTOR-BERNSTEINOVU (v. na př. KNASTER [16]; TARSKI [42]). Mezi nepřímé důsledky tohoto zobecnění jakož i jeho logicko-matematické analysy počítám objev nových vlastností starých geometrických útvarů, jako na př. poučný objev možnosti rozkladu jakýchkoli dvou těles na konečný počet navzájem shodných částí (BANACH a TARSKI [2]).

2. *Pojem čísla.* Jedním z největších vědeckých výkonů v matematice bylo — jak se mi zdá — objevení logické struktury pojmu čísla.

Nazveme relací typu rovnosti každou relaci mezi elementy x a y množiny M platnou tehdy, když oba elementy mají nějakou určitou společnou vlastnost $V \in \mathfrak{V}$ (vlastnost možno zde ostatně chápati také jako množinu), kde

1° každý element $x \in M$ má alespoň jednu vlastnost $V \in \mathfrak{V}$,

2° množiny těch elementů množiny M, které mají různé vlastnosti $V \in \mathfrak{V}$ a $W \in \mathfrak{V}$, jsou disjunktní.

Množina $\mathfrak{V}$ se nazývá klasifikací množiny M.

Budiž na př. M množina pravidelných mnohostěnů (v obyčejném trojrozměrném prostoru) a $\mathfrak{V}$ množina následujících V_n pro $n = 1, 2, \ldots$: V_n = býti n-stěnem.

$\mathfrak{V}$ jest klasifikace množiny M (a je známo, že pouze třídy V_4, V_6, V_8, V_{12} a V_{20} této klasifikace množiny M jsou neprázdné).

Při této příležitosti bych chtěl zde poznamenat, že theorie klasifikací nebyla dosud matematiky vybudována a rozvinuta do té míry, jak toho vyžadují potřeby věd přírodních a technických. Dosavadní důležité

Borůvkovy a Oreovy práce neznamenají ještě theorii zplna vyhovující těmto potřebám. *Vybudování theorie klasifikací považuji za jednu z nejdůležitějších potřeb vědy.*

Vraťme se k relaci typu rovnosti. Je jasné, že každá klasifikace množiny M znamená takovou relaci. Vzniká obrácená úloha: zdali ke každé relaci ϱ typu rovnosti existuje taková klasifikace množiny M, že $\varrho(x, y) =$ existuje taková vlastnost $V \in \mathfrak{V}$, že $x \in V$ a $y \in V$?

Ukazuje se — m. j. na základě definičního axiomu (v. str. 15 a 20) ostatně v neúplném rozsahu — že odpověď je kladná. Vlastnosti $V \in \mathfrak{V}$ nazýváme potom *třídami abstrakce* při relaci ϱ.

Klasifikace je tedy s matematického hlediska rozdělením množiny M na třídy abstrakce (obdobné zbytkovým třídám podle ideálu).

Pomíjím zde užití tříd abstrakce na vyšetřování struktury dalších základních pojmů matematiky. Víme na př., s jakou didaktickou potíží je spojeno v geometrii zavádění takových pojmů jako *orientace* přímky (na rozdíl od *směru*), *cyklus* na kružnici (na rozdíl od — na kružnici nemožného — *uspořádání*) atd. Orientace je třída abstrakce při určité dvojčlenné relaci, která se dá definovat pomocí trojčlenné relace *ležet mezi*, která se v geometrických axiomatikách bráva za primitivní pojem. Pomíjím také užití tříd abstrakce na theorii grup, na theorii uspořádaných a částečně uspořádaných množin, na theorii mnohočlenných relací (výkonů), na definici pojmu souřadnicové soustavy. Postačí nám zde, že třídy abstrakce dovolují definici pojmu čísla v rámci logiky. Dojde se k ní v několika krocích.

Počněme přirozenými čísly. Známá je definice kardinálních čísel (mohutnosti množin) jako určité společné vlastnosti množin. Nyní přirozená čísla lze definovat jako ta, která náleží do všech množin kardinálních čísel, ve kterých po každém čísle jest obsaženo číslo bezprostředně následující a které obsahují číslo 0. Jestliže zahrneme do logiky t. zv. *axiom nekonečna*, ekvivalentní ve své podstatě předpokladu existence množiny kardinálních čísel, ve které za každým číslem je číslo bezprostředně následující, potom již pojem přirozeného čísla se ukazuje pojmem logickým, pojmem zařazeným přímo do logiky.

V tom spočívá Fregeův [7, 8] objev. Tato definice přirozených čísel vystačí k tomu, aby bylo možné na jejím základě vybudovat celou theorii, t. j. aritmetiku přirozených čísel (ve které Peanovy axiomy jsou dokazatelnými větami).

Vybudování pojmu jiných čísel na základě pojmu přirozených čísel je dnes už klasické. Rozvinutí theorie čísel racionálních (považovaných za třídy abstrakce ve množině uspořádaných dvojic přirozených čísel) je možné najít v knížce Landauově [24]. Cantorova theorie reálných čísel (jako tříd abstrakce ve množině posloupností racionálních čísel při relaci ϱ mezi posloupnostmi $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ platné mezi nimi tehdy, jestliže $\lim|x_n - y_n| = 0$), je vyložena na př. v knížce SIERPIŃSKÉHO [36]. Theorie komplexních čísel, kvaternionů a jiných příbuzných druhů čísel (které však už nejsou třídami abstrakcí) jsou známé.

Filosofický význam uvedeného užití theorie množin a relací jest alespoň takový, jako jeho význam matematický. Podobně jako dílo LOBAČEVSKÉHO vyvrátilo antimaterialistický názor KANTŮV na apriornost pojmu prostoru, tak i dílo FREGEOVO znamená smrtelnou ránu antimaterialistické víře v apriornost pojmu čísla. „Přirozená čísla stvořil Pán Bůh" — psal Kronecker — „a všecka jiná čísla jsou výtvorem lidským". Ukázalo se však, že i přirozená čísla nejsou pojmem „božským", apriorním, nýbrž „lidským", dají se zdůvodnit analyticky. A co více, analytickými, t. j. dajícími se odůvodnit, ukázaly se m. j. takové věty, jako princip indukce (V. axiom PEANŮV), proti víře KANTOVĚ ba i POINCARÉOVĚ v apriornost tohoto principu.

Ve skutečnosti FREGEOVO řešení není úplné: vyžaduje zařazení do logiky nového axiomu (axiomu nekonečna), jehož neapriorní charakter je však zřejmý i pro idealisty; vyžaduje také omezení množiny M, pomocí které definujeme přirozená čísla, a to proto, že pojem množiny všech předmětů vede ke sporu. Přirozené číslo ve smyslu FREGEOVĚ je tedy vlastně pojmem relativisovaným co do rozsahu uvažovaných předmětů (to má svou motivaci v theorii typů). Ačkoli tedy problém obecné definice pojmu přirozeného čísla (nevíme ostatně, je-li to problém řešitelný) můžeme i nadále považovat za otevřený, nicméně charakteristická pro matematický idealismus víra v apriorní charakter aritmetiky přirozených čísel jeví se už nyní pohřbenou.

Jak známo, stanovisko FREGEOVO bylo vědomě idealistické. S hlediska matematické logiky těžko nalézti výmluvnější „důkaz" chybnosti něčího stanoviska než ten, že kdo se důsledně na ně postavil, rozrušil svůj vlastní tábor.

3. *Booleova algebra a její aplikace.* V rámci moderní abstraktní algebry, která je vlastně oddílem obecné theorie relací, tvoří jedno z nejdůležitějších zobecnění t. zv. *Booleovy algebry*, kde algebraické operace $+$, . a $'$ se provádějí s libovolnými elementy, mezi kterými jsou význačné elementy 0 a 1. Nejkoncisnější axiomatika algeber BOOLEOVÝCH se najde v práci BYRNEOVĚ [5]. Jejich aplikace v posledním čtvrtstoletí jsou stále rozsáhlejší a zahrnují nové, mnohdy nečekané obory vědy. K méně známým tu náleží vyšetřování měr v BOOLEOVÝCH algebrách (viz na př. řadu nových prací SIKORSKÉHO ve Fundamenta Mathematicae a Colloquium Mathematicum), v elektrotechnice (SHANNON [34], ŠESTAKOV[40]). A posléze speciální výhodnost těchto pro aplikace na moderní počítací stroje (thema zájmu a již počatých bádání m. j. matematiků polských).

IV. Axiomatisace matematických theorií. Již starověk došel k poznání potřeby axiomatisace matematiky (EUKLEIDES). Touha po absolutní přesnosti matematického usuzování nutila k tomu, opřít je o zřetelně formulované předpoklady. První úspěchy této methody staly se živnou půdou pro rozumování několika desítek pokolení. To vedlo nakonec k apriorní víře, že logické dedukce z matematických axiomů povedou jedině k výrokům pravdivým a zároveň dají všecky takové výroky. Ačkoli dnes po tisíciletích víme, že naděje vkládané do axiomatické methody nesplnily očekávání v žádném ze zřetelů nejdůležitějších pro tehdejší vědu (v. str. 16), nicméně pokrok získaný axiomatisací jednotlivých matematických věd byl ohromný. Netoliko se prohloubily naše znalosti o struktuře deduktivních věd vůbec a matematických zvláště, nýbrž nad to se rozšířil rozsah ryze matematických problémů, z nichž je mnoho ještě v přítomnosti otevřených. Stačí připomenout axiomatisaci geometrie (HILBERT [13], VEBLEN [44] a jiní), aritmetiky (PEANO [31]), topologie (F. RIESZ [32], KURATOWSKI [22]), theorie pravděpodobnosti (KOLMOGOROV [18]). Pouze axiomatickému přebudování matematiky vděčíme za objev nových vztahů mezi matematickými pojmy ba i celými theoriemi, vztahů, které nebylo možno pochopit pouhými intuitivními prostředky. Sem patří m. j. vztahy mezi theorií pravděpodobnosti a theorií míry.

Tak na př. nejnovější formulace věty zvané *zákon velkých čísel* (STEINHAUS [39]), je o tolik ostřejší než původní věta BERNOULLIOVA a tak se od ní liší, že je obtížné v ní poznat zobecnění té staré věty ba i postřehnout naráz, že je to věta z theorie pravděpodobnosti. Ve svém moderním tvaru má tato věta aplikace na theorii ekvipartici, theorii ergodickou a jinde.

Nebudu uváděti další příklady aplikací tohoto oddílu matematické logiky. Největší jeho triumfy připadají na dobu tak ještě nedávnou (konec 19. stol. a počátek 20. stol.) a jsou tak všeobecně známy, že se snadno najdou ve skoro každé učebnici matematické logiky jakož i v četných speciálních pojednáních.

V. Formalisace matematických theorií. Víra v moc axiomatisace byla — jak známo — všeobecná do té doby, až se v zaxiomatisovaných theoriích vyskytly spory zvané *antinomiemi*. Byly to opravdu spory?

Rozdělme zhruba všecky známé antinomie na *antinomie typové* (jako na př. RUSSELLOVA antinomie) a na *antinomie semantické* (jako na př. RICHARDOVA antinomie). Správně se viděl v typových antinomiích důkaz toho, že vyvozování vět z axiomů pomocí všeobecně přijatých logických prostředků nevede pouze k výrokům pravdivým.

Matematika dospěla na rozcestí: buďto ponechat pojmu výroková funkce jeho nejširší smysl, ale omezit definiční axiom (viz str. 12 a 20), nebo obráceně: podržet definiční axiom v plném rozsahu, ale omezit užívání logických prostředků (na př. zúžením pojmu výrokové funkce).

Pod RUSELLOVÝM a částečně též HILBERTOVÝM vlivem t. zv. formalisace matematiky šla druhou cestou. Vytvořeny byly různé methody formalisace, mimo jiné nejdůležitější z nich: theorie typů. Přijat byl postulát čistoty typů pro výrokové funkce a bylo odvozeno, že axiomy výrokového počtu spolu s axiomy jednoduché theorie typů (v. MOSTOWSKI [29], str. 213 a násl.) tvoří bezesporný systém. Zda zůstane bezesporným i po připojení axiomu nekonečna (v. str. 12), je dosud neznámé.

Dík této methodě byly skutečně z matematiky odstraněny všecky typové antinomie, ale ... tento způsob formalisace matematiky má své principiální nedostatky:

1° systematickou mnohoznačnost pojmů, jako je prázdná množina, přirozené číslo atd., které se stávají v každém typu jinými pojmy;

2° nemožnost uvažovat množiny zahrnující různé typy jako na př. množiny mohutnosti $\aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \ldots$; neboli zavádění nového axiomu pro každý případ tohoto druhu;

3° nejednomyslnost co do dosahu samotného principu čistoty typů: podle některých intuicionistů a jiných stoupenců „Verbotsdiktatur“ je tento princip ještě příliš liberální.

Potížím 1° a 2° je možno se vyhnout, budujeme-li matematiku na axiomatisaci (po způsobu ZERMELA) theorie množin [45]; tento způsob však má zase nedostatky jiného druhu.

Přes všecky tyto potíže zkoumání formalisovaných systémů prokázalo, že nejzřejmější — jak by se zdálo — logické principy též nemají apriorní charakter, nýbrž že jsou možné různé logické systémy, ve kterých jeden a týž matematický problém může míti různá řešení. Znovu se nabízí analogie s objevem LOBAČEVSKÉHO: problém součtu úhlů trojúhelníka má jiné řešení v eukleidovské geometrii a jiné v geometriích neeukleidovských. Před výsledky formalisace matematiky nebylo známo, že takový nesouhlas je možný také v logice, t. j. při jednom a témž způsobu axiomatisace matematiky, ale při různých omezeních logických prostředků.

Pomíjím zde přehled formalisovaných theorií a jejich klasifikaci (na elementární a neelementární), který je znám z moderních kursů matematické logiky. Theoreticky by bylo možné realisovat formalisované systémy s finitními pravidly dedukce pomocí strojů, které by po konečném čase provedly důkaz každé dokazatelné věty (v praxi by to trvalo mnohdy miliony let).

Místo toho se zdržím u toho, že víra v bezespornost formalisovaných theorií a v jiné jejich ušlechtilé vlastnosti se ukázala neméně klamnou než podobné starší víry. Za tento výsledek vděčíme teprve metamatematickým úvahám. Aplikaci těchto úvah chtěl bych proto věnovat poněkud více pozornosti.

VI. Metamatematika. Učinit jednotlivé matematické theorie předmětem exaktního bádání bylo možné právě dík tomu, že byly formalisovány. Toto bádání se stalo podstatou nové matematické vědy, zvané *metamatematika*, kterou jsem vzpomenul již v úvodu. Tato věda se rozvíjela skoro paralelně s axiomatisací a formalisací matematických theorií průběhem poslední poloviny století. Role a význam zde zaváděných pojmů, jako bezespornost theorie, nezávislost axiomů theorie, její úplnost, rozhodnutelnost a kategoričnost, to vše je dnes obecně známo, a cena method i aplikací, které tato bádání vnesla do matematiky, nepotřebuje odůvodňování. Takové objevy z posledních let, jako je bezespornost hypothesy kontinua spolu s theorií reálných čísel (GÖDEL [10]), nebo hluboké algebraické věty odvozené z vět metamatematických (v. na př. MALCEV [25]), mluví pro každého matematika samy za sebe.

Ale zvláštního důrazu zasluhuje jiný, dřívější objev GÖDELŮV [9] o principiální neúplnosti těch *neelementárních theorií*, (t. j. takových, z nichž axiomy obsahují pojmy vyšších typů), ve kterých je možno zformalisovat dosti velkou část aritmetiky přirozených čísel. Podle této věty ani připojení jakéhokoli konečného počtu axiomů k takové theorii nemůže ji učiniti úplnou. Díky tomu *víra ve formalisaci theorie jakožto v methodu získání všech v ní platných výroků ukázala se ve světle skutečnosti klamnou.*

Metamatematika určitých matematických theorií je přesný deduktivní systém tak jako uvažované theorie samy a jako každá jiná větev matematiky. Ona vyjasnila m. j. nesmírně důležitou potřebu rozlišování mezi pojmem předmětu a pojmem názvu předmětu, což dovolilo rázem vysvětlit podstatu zbývajících antinomií, t. zv. *antinomií semantických*, celkově starších než antinomie typové.

Jak známo, jedním z prostředků metamatematického bádání — a to velmi mohutným — ukázala se GÖDELEM [9] rozvinutá jeho *methoda aritmetisace*. Veškeré značky a výrazy dostávají svá pořadová čísla (která ovšem jsou velmi veliká již pro jednoduché výrazy). Důkaz věty se přemění v konečnou posloupnost takových čísel, které opět je přiřazeno číslo. Relace mezi výrazy se interpretují jako relace mezi čísly.

Tímto způsobem dává vzpomenutá methoda možnost překládati metamatematické pojmy a věty na pojmy a věty aritmetické: dává interpretaci metamatematiky v aritmetice. Nikterak však ne v aritmetice zformalisované, jež sama je předmětem metamatematiky. Neboť ne všecky aritmetické definice lze zapsat v PEANOVĚ axiomatice (v. na př. MOSTOWSKI [29], str. 317, antinomie BERRYOVA). Nesmíme tedy soudit, že by zformalisovaná aritmetika zahrnovala veškeré aritmetické věty, které jsou překladem vět metamatematických.

Z aplikací výsledků metamatematiky na matematiku uvedu také pouze tři příklady. Nejdůležitějším z nich se mi zdá poslední, tedy aplikace na problém antinomií. Neboť v něm — jak se mi zdá — se nejnápadněji uplatňuje rozdíl mezi materialistickým názorem na matematiku a jinými koncepcemi této vědy.

1. *Věta Skolem-Löwenheimova.* Podle této věty každá bezesporná elementární theorie má interpretaci primitivních pojmů neboli t. zv. *model* ve spočetné množině, tudíž i v množině přirozených čísel.

Vezměme na př. dosud neřešený problém Čechův [6]: zdali v nekonečné množině existuje funkce, která každé podmnožině přiřazuje určitou podmnožinu, která není identitou, jest additivní a taková, že každá množina jest obsažena ve svém obraze a zároveň *každá podmnožina jest obrazem některé podmnožiny.*

Mostowski mne upozornil, že Čechův problém po formalisaci se stane neelementárním výrokem, pročež je možné na něj aplikovat větu Skolem-Löwenheimovu jen nepřímo a to pomocí interpretace theorie množin v soustavě přirozených čísel. To neznamenä ještě, že by tím byla zaručena existence konkrétního řešení Čechova problému na spočetném modelu, na př. již mezi numerickými funkcemi definovanými pro přirozená čísla, ale každý profesionální matematik musí uznat, že *je prakticky důležité předem vědět o různých možnostech řešení.* Neboť to obohacuje zásobu jeho prostředků.

2. *Pojem efektivnosti.* Tento pojem se týká existenčních důkazů, ať již ve formě samostatných vět či ve formě premis vyskytujících se při důkazech jiných vět.

Jestliže existence jakéhokoliv matematického útvaru x o určitých vlastnostech je dokázána v tom smyslu, že se odvodí, že množina všech x-ů o těchto vlastnostech je neprázdná, nazýváme důkaz *neefektivním.* Jestliže však předmět x je v důkaze individuálně definován (tedy je-li definována množina složená z jediného prvku x o těch vlastnostech), nazýváme důkaz *efektivním.*

Neprávem se tedy mnohdy mluví o neefektivních a efektivních *definicích* útvaru x: definice je vždy efektivní, protože definuje jediný předmět, na př. jediný bod, jedinou množinu atd.

Jak známo, nemáme efektivního důkazu existence Lebesgueovsky neměřitelných funkcí, nýbrž pouze neefektivní důkaz, že množina takových funkcí není prázdná. Totéž platí o existenci na přímce nespočetné množiny neobsahující žádnou dokonalou množinu atd.

Pojem neefektivnosti byl předmětem nedorozumění spojeného se vzpomenutým již obecnějším nedorozuměním týkajícím se pojmu existence v matematice (v. str. 8). To vedlo na počátku tohoto století k vleklým polemikám. Mnoho znamenitých matematiků francouzské školy uznávalo pouze efektivní existenční důkazy — v souvislosti se svým záporným stanoviskem k axiomu výběru, jednomu z nejdůležitějších existenčních axiomů v matematice. Ty polemiky jsou už dnes — jak se mi zdá — málo aktuální. Proto se zde spokojím tím, že se dotknu jiného nedorozumění, které bylo v onom implicite obsaženo a které není spojeno s pojmem existence v matematice, nýbrž se strukturou samého pojmu efektivnosti.

Nešťastná formulace vět, mnohdy velmi důležitých, ve tvaru „*Umíme-li* efektivně dokázat existenci funkce f, *umíme* také efektivně dokázat existenci množiny M“ stala se příčinou toho, že někteří matematici chápali pojem efektivnosti jako jakýsi anthropomorficko-filosofický výtvor, tedy matematice cizí a spojený s okamžitým stavem vědomostí autora v dané chvíli. Ve skutečnosti efektivnost — jak se lehko nahlédne — je *přesný pojem náležející do metamatematiky*, a věta výše uvedená je typická metamatematická věta. Jest jí rozuměti takto: „Jestliže v určité theorii existuje definice funkce f (rozumí se napsaná vzorem složeným ze značek logických operací, množinových a z pojmů té theorie), potom existuje v téže theorii definice množiny M“. Taková věta je tedy větou o theorii, větou metamatematickou, a její důkaz se děje přesným usuzováním, které se dá zapsat příslušnými metamatematickými značkami, které tedy nezáleží ani na životní dráze autorově, ani na okamžitém stavu vědy.

Podobně i často užívaným zkratkám *pojem efektivní* a *pojem neefektivní* jest rozuměti tak, že naznačují, že v dané theorii jest nebo není efektivní důkaz existence toho pojmu.

Upozornit na tuto aplikaci metamatematiky se mi zdá účelné proto, že by jinak řada důležitých výsledků na př. SIERPIŃSKÉHO [36, 37], týkajících se vztahů mezi neefektivností různých pojmů, byla odstraněna z matematiky jako ještě jedna oběť již vzpomenuté „Verbotsdiktatur“.

3. *Antinomie.* Zmínil jsem se již o antinomiích typových i o starších než prvé o antinomiích sematických (v. str. 14). Z antinomií typových jsou nejznámnější dvě: RUSSELLOVA a BURALI-FORTIOVA. Zde se omezím na antinomii RUSSELLOVU.

Budiž V vlastnost (množina) všech těch množin, které nejsou svými vlastními prvky. Jak předpoklad, že V je svým vlastním prvkem, tak i předpoklad, že V není svým vlastním prvkem, vede ke sporu. Můžeme to zapsat ve tvaru

$$\underset{V}{E}\underset{x}{\Pi}[X \in V) = (X \in X)'] \rightarrow \underset{V}{\Sigma}[(V \in V) \,.\, (V \in V)']. \tag{6}$$

Zaujímám stanovisko protivné ke stanovisku matematiků považujících antinomie za *spory v matematice*, která je třeba odstranit, aby se uchránila ctnost — nebo spíše víra v ctnost — té královny věd, byť i za tu cenu, že ji zbavíme, části ... rozumu. Neboť takovéto příležitosti otvírají pole různým mastičkářům — spasitelům. Specielně stejně formalismus HILBERTA a jeho školy, který se ukázal v podstatě věci přenesením problému z matematiky do metamatematiky, jako intuicionismus BROUWERŮV s jeho nemotorným primitivismem (jako na př. šesterým pojmem spočetné množiny) počítám mezi takové nezdařené výpady. Mám za to, že praktická neaplikovatelnost jejich method, domněle zaviněná nesmírnou komplikovaností výstavby a rozvláčností vzorců, naprosto není důsledkem okamžité nedokonalosti našich prostředků — jak to nesprávně soudí mnoho matematiků, oddávajících se klamné apriorní víře v budoucí zdokonalení týchž method — nýbrž je to jejich nedostatek podstatný, nevyléčitelný, tkvící v samé jejich povaze, jejíž nerozpoznání by se mělo především přičítati nedostatečnosti našich prostředků.

Zdá se mi, že situace, která vznikla po objevu antinomií, byla analogická té, v jaké se ocitla řecká matematika po PYTHAGOROVĚ objevu délky $\sqrt{2}$, která — v tehdejší terminologii — nebyla číslem. Jasná je také analogie se situací, vzniklou po LOBAČEVSKÉHO objevu neeukleidovských prostorů, které v očích tehdejších matematiků vůbec nebyly hodny názvu prostor, i kdyby se bylo věřilo jejich existenci (t. j. jejich bezespornosti, v. str. 8).

Naproti idealistickému stanovisku v matematice, zdá se mi, že materialistické stanovisko k antinomiím, tak jako vůbec ke každému objevu nového zjevu, mělo by býti úplně jiné: především je prozkoumat.

V jedné ze svých znamenitých vídeňských přednášek HAHN [11], mluvě o *horror infiniti* starých, právem zdůraznil, že spory, které Řekové viděli v pojmu nekonečna, vůbec nebyly spory mezi vlastnostmi tohoto pojmu (jak dnes víme bezesporného), nýbrž pouze mezi určitou definovanou jeho vlastností (totiž shodnosti části s celkem) a apriorním názorem na nekonečno, nesprávným a o nic neopřeným. A přece — praví profesor HAHN (cituji to z paměti) — zdravý rozum vyžaduje, že nekonečné množiny musí míti některé vlastnosti jiné než množiny konečné, neboť kdyby se od nich žádnou vlastností nelišily, byly by samy konečnými. Tak na př. polopřímka $x \geqq 0$ je shodná s polopřímkou $x \geqq 1$, t. j. se svou částí, přes tehdejší neopodstatněnou vírou, že celek nemůže býti „roven" části. A tu místo aby přijali obohacení vědy o objev, že tomu tak přece může býti, totiž právě u nekonečných množin, Řekové se zřekli celé dnes důležité větve matematiky a tím o tisíciletí opozdili vznik infinitesimální analysy, jen aby uchovali v platnosti svůj apriorní soud, shodný s tehdejším názorem, ale neopírajícím se o žádný faktický stav věcí.

Zdá se mi, že ne jinak se postupovalo s antinomiemi, zejména s antinomií RUSSELLOVOU, když se budovaly umělé a složité způsoby, jak odstranit z matematiky ten nově objevený zjev, neshodující se s apriorními názory tehdejších matematiků na podstatu deduktivních theorií.

Považuji takovéto stanovisko za jeden z nejcharakterističtějších rysů idealistického postoje v matematice.

Vraťme se k implikaci (6). Podle zákona kontraposice a vzorce de Morganova jest ekvivalentní s implikací

$$\prod_V [(V \in V)' + (V \in V)] \to \{\sum_V \prod_x (X \in V) \equiv (X \in X)']\}',$$

z čehož vynecháním předního členu, jenž jest tautologií, dostaneme

$$\{\sum_V \prod_x [(X \in V) \equiv (X \in X')]\}',$$

t. j. negaci určitého speciálního případu *definičního axiomu*, podle něhož ke každé výrokové funkci o n proměnných existuje právě jedna n-členná relace (specielně tedy množina, jestliže $n = 1$), platná mezi hodnotami těchto proměnných tehdy a jenom tehdy, jestliže splňují onu výrokovou funkci.

Tudíž RUSSELLOVA *antinomie jest apagogickým důkazem určité správné metamatematické věty o uvažované theorii*, v daném případě *o theorii množin*. Z této věty plyne m. j., že není každý soubor předmětů *množinou* ve smyslu theorie množin (jinými slovy, že ne každá výroková funkce značí množinu chápanou v tom smyslu, jak to postuluje definiční princip). Specielně soubor složený z právě těch množin, které nejsou svými vlastními prvky, není množinou ve smyslu theorie množin, neboť nevyhovuje její axiomatice. Nevidím důvodu odstraňovat z matematiky tuto cennou větu. Ona naopak otvírá pole dalšímu bádání především o problému, z jakých vlastností deduktivního systému plyne v něm definovatelnost takových pojmů. Možná že je společným znakem theorií elementárních a pouze některých neelementárních, obdobně jako úplnost ve smyslu GÖDELOVY věty.

Každá ze známých antinomií dá se chápat výše popsaným způsobem neboli jako apagogický důkaz určité metamatematické věty. Podobný názor na antinomie se najde také v práci sovětského logika BOČVARA [3].

Situace semantických antinomií se mi zdá obdobnou. Nejstarší z nich, antinomie EUBULIDOVA, je důkazem, že výraz „Tento výrok je nesprávný" není výrokem ve smyslu matematické logiky — a k tomu není třeba theorie typů. BERRYOVA antinomie je důkazem věty, že nemůže existovat deduktivní systém (v dnešním smyslu tohoto pojmu) zahrnující celou matematiku a zároveň tolik metamatematiky, aby bylo možné v něm definovat nejmenší přirozené číslo, nedefinovatelné určitými precisovanými prostředky z toho systému.

Poslední příklad: usuzování užité v antinomii RICHARDOVĚ posloužilo TARSKÉMU [41] k apagogickému důkazu důležité metamatematické věty o nedefinovatelnosti pojmu splňování.

Ve světle těchto fakt se mi zdá, že je na čase podrobit principiální revisi naivní negativní stanovisko matematiků k antinomiím a uskutečnit objev nových hlubších vět o vlastnostech deduktivních theorií vůbec a matematických zvláště. Tak jako se ukázalo dík LOBAČEVSKÉMU, že geometrie (pojem prostorů), dík EINSTEINOVI — že mechanika (pojem času) a dík FREGEOVI — že aritmetika (pojem přirozeného čísla) nejsou apriorní, jak myslil KANT a jeho následovníci, tak rovněž — jak soudím — dík objevitelům antinomií se ukázalo (třeba že se oni, jako idealisté, neorientovali ve svém vlastním objevu), že není apriorní ani logika. Pro ty, kdož zaujímají ve vědě stanovisko materialistické, není v tom nic divného. Oni také z toho důvodu nejsou nuceni k víře v relativismus vědy hlásaný protivníky, a zřetel k pokroku vědy vytyčuje jim cestu, na které — podle známých ENGELSOVÝCH slov — materialismus „musí změnit podobu zároveň s každým epochálním objevem."

CITÁTY.

1. *S. Banach Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych,* Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1951 (v tisku).
2. *S. Banach* et *A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes,* Fundamenta Mathematicae 6 (1924), s. 244—277.
3. *D. A. Bočvar, K voprosu o paradoksach matěmatičeskoj logiki i těorii množestv,* Matěmatičeskij Sbornik 15 (1944), s. 369—382.
4. *L. E. J. Brouwer, Zur Analysis Situs,* Mathematische Annalen 68 (1910), s. 422—434.
5. *L. Byrne, Two brief formulations of Boolean Algebra,* Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), s. 269—272.
6. *E. Čech, Problème,* Fundamenta Mathematicae 34 (1947), s. 332.
7. *G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik,* Wrocław 1884.
8. *G. Frege. Grundgesetze der Arithmetik begriffsschriftlich abgeleitet,* I, Jena 1891, II, Jena 1893.
9. *K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme,* I, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), s. 173—198.
10. *K. Gödel, The consistency of the continuum hypothesis,* Annals of mathematics studies N° 3, Princeton 1940.
11. *H. Hahn, Gibt es Unendliches? Alte Probleme — neue Lösungen in den exakten Wissenschaften* — Lipsko a Vídeň 1934.
12. *F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre,* Lipsko 1914, s. 32.
13. *D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie,* Vydání VII, Lipsko-Berlín 1930.
14. *S. Janiszewski, Sur les continus irréductibles entre deux points* (Thèse de doctorat), Paris 1911.
15. *B. Knaster, Quelques coupures singulières du plan,* Fundamenta Mathematicae 7 (1925), s. 264—289.
16. *B. Knaster, Un théorème sur les fonctions d'ensembles,* Comptes rendus de la Société Polonaise de Mathématique 6 (1928), s. 133—134.
17. *B. Knaster* and *K. Kuratowski, Remark on a theorem of R. L. Moore,* Proceedings of the National Academy of Sciences 13 (1926), s. 647—649.
18. *A. Kolmogorov, Osnovnyje ponjatija těorii verojatnostěj,* Moskva 1936.
19. *K. Kuratowski, Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles,* Fundamenta Mathematicae 2 (1921), s. 161—171 (Définition V).
20. *K. Kuratowski, Sur les coupures irréductibles du plan,* Fundamenta Mathematicae 6 (1924), s. 130—145.

21. *K. Kuratowski, Evaluation de la classe borelienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques.* Fundamenta Mathematicae 17 (1931), s. 249—272.
22. *K. Kuratowski, Topologie* I, Vydání II, Monografie Matematyczne, Warszawa — Wrocław 1948.
23. *K. Kuratowski* et *A. Tarski, Les opérations logiques et les ensembles projectifs,* Fundamenta Mathematicae 17 (1931), s. 240—248.
24. *E. Landau, Grundlagen der Analysis,* Lipsko 1930 (Vydání II, New York 1946).
25. *A. J. Malcev, Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik,* Matěmatičeskij Sbornik 43 (1936), s. 323—336.
26. *S. Mazurkiewicz, Sur une propriété des ensembles C(A),* Fundamenta Mathematicae 10 (1927), s. 172—174.
27. *S. Mazurkiewicz* et *W. Sierpiński, Sur un problème concernant les fonctions continues,* Fundamenta Mathematicae 6 (1924), s. 161—169.
28. *R. L. Moore, Concerning indecomposable continua and continua which contain no subsets that separate the plane,* Proceedings of the National Academy of Sciences 12 (1926), s. 362.
29. *A. Mostowski, Logika metamatyczna,* Monografie Matematyczna, Warszawa-Wrocław 1948.
30. *O. Nikodym, Sur les points linéairement accessibles des ensembles plans,* Fundamenta Mathematicae 7 (1925), s. 250—258.
31. *G. Peano, Sul concetto di numero,* Rivista di matematica 1 (1891), s. 87—102 a 256—267.
32. *F. Riesz, Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre,* Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, II, Roma 1909.
33. *A. Schönflies, Die Entwickelung der Lehre von Punktmannigfaltigkeiten,* II, Lipsko 1908, s. 124.
34. *C. E. Shannon, A symbolic analysis of relay and switching circuits,* Transactions of the American Institute of Electrical Engineers 57 (1938), s. 1—11.
35. *W. Sierpiński, Les exemples effectifts et l'axiome du choix,* Fundamenta Mathematicae 2 (1921), s. 112—118.
36. *W. Sierpiński, Teoria liczb niewymiernych,* Lwów 1928.
37. *W. Sierpiński, Hypothèse du continu,* Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1934.
38. *W. Sierpiński, Sur un problème concernant les fonctions continues,* Fundamenta Mathematicae 15 (1930), s. 287—291.
39. *H. Steinhaus, Sur les fonctions indépendantes VIII (Loi des grands nombres, suites indépendantes, suites aléatoires),* Studia Mathematica 11 (1950), s. 133 až 144.
40. *V. I. Šestakov, Predstavlenije charaktěrističeskich funkcij predloženij posredstvom vyraženij, realizujemych reliejno-kontaktnymi schemami,* Izvestija Akademii Nauk SSSR 10 (1946), s. 529—565.
41. *A. Tarski, Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych,* Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Nr 34 (1933).
42. *A. Tarski, Quelques théorèmes généraux sur les images d'ensembles,* Comptes rendus de la Société Polonaise de Mathématique, 6 (1928), p. 132—133.
43. *P. Urysohn, Sur les points accessibles des ensembles fermés,* Proceedings Koniklijke Akademie van Wetenschappente Amsterdam 28 (1925), s. 984—993.
44. *O. Veblen, A system of axioms for Geometry,* Transactions of the American Mathematical Society 5 (1904), s. 343—384.
45. *E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre,* Mathematische Annalen, 65 (1908), s. 107—128.